JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN CHAZY

Sur une loi corrective de la loi de Newton

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 261-280.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_261_0>

Sur une loi corrective de la loi de Newton;

Par Jean CHAZY.

---

1. M. Popovici et M. Armellini ont considéré [1] la loi de force corrective de la loi de Newton, définie sur le segment joignant deux points matériels de masses m et m' situés à la distance r, par la valeur algébrique

$$-\frac{fmm'}{r^2}\left(1+\varepsilon\frac{dr}{dt}\right), \tag{1}$$

où f est la constante de la gravitation universelle, et où le facteur ε de la dérivée $\frac{dr}{dt}$ est une constante positive extrêmement petite. Par ses dimensions, la constante ε est ainsi l'inverse d'une vitesse linéaire, nous désignerons cette vitesse linéaire par $\frac{1}{V}$: soit $\varepsilon = \frac{1}{V}$. D'après l'origine notamment que M. Popovici donne à la force (1), la vitesse V pourrait être celle de la lumière : nous allons montrer qu'en fait, si la loi de force (1) s'appliquait aux mouvements planétaires, la vitesse V serait de beaucoup supérieure à la vitesse de la lumière.

Dans le mouvement d'une planète par rapport au corps central, réduit à un point matériel O, fixe et de coefficient attractif $fm = \mu$,

---

[1] Popovici, *Bulletin astronomique*, t. 3, 1923, p. 257-261, et *Comptes rendus*, t. **208**, 1939, p. 2052; t. **210**, 1940, p. 39 et 138; Armellini, *Atti della R. Accademia dei Lincei*, t. **26**, 1937, p. 209-215; t. **27**, 1938, p. 609-614; t. **28**, 1938, p. 117-123; t. **29**, 1939, p. 649-655, et *Scientia*, n° **65**, 1939, p. 10-17. *Voir* aussi Chazy, *Comptes rendus*, t. **209**, 1939, p. 133; Zagar, *Memorie della Società Astronomica Italiana*, vol. **12**, 1939, p. 261-277; vol. **13**, 1940.

M. Popovici et M. Armellini ont déterminé la trajectoire correspondant à la force considérée. Cette force étant centrale, la trajectoire est plane, décrite suivant la loi des aires, soit

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{C},$$

où θ désigne un angle polaire compté à partir du pôle O et d'un axe fixe, et C la constante des aires supposée positive. Par application de la formule de Binet, et éliminant la différentielle dt de l'expression (1) au moyen de l'intégrale des aires, on obtient pour équation différentielle de la trajectoire l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{\mathrm{C}^2}\left(1 - \varepsilon \mathrm{C} \frac{d \frac{1}{r}}{d\theta}\right).$$

Par suite, après intégration, la trajectoire peut être représentée par l'équation

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \mathrm{A}\,\mathrm{E}^{-\alpha\theta} \cos\left[\sqrt{1 - \alpha^2}\,(\theta - \theta_0)\right]}{k};$$

E désigne la base des logarithmes naturels, les constantes k et α sont données en fonction de la constante des aires C par les formules

$$k = \frac{\mathrm{C}^2}{\mu}, \qquad \alpha = \frac{\varepsilon \mu}{2\mathrm{C}},$$

et A et θ_0 sont deux constantes d'intégration dont la première est positive. Avec la loi de Newton, pour $\varepsilon = 0$, le coefficient α est nul aussi, les constantes k et A sont le paramètre et l'excentricité de l'orbite, de l'ellipse si le mouvement est elliptique. Pour ε positif et petit, et quand l'angle θ tend vers $+\infty$, la trajectoire obtenue présente un amortissement analogue à celui du mouvement vibratoire amorti par rapport au mouvement vibratoire ordinaire : dans le mouvement vibratoire amorti le point matériel tend vers la position d'équilibre, ici la trajectoire tend vers la circonférence de centre O et de rayon k.

M. Armellini a calculé, dans le mouvement d'une planète, réduite à un point matériel P, la force corrective par rapport à l'attraction newtonienne résultant de la loi élémentaire (1) et de la rotation du

Soleil, ou du moins la partie principale de cette force corrective correspondant à un mouvement circulaire de la planète P dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du Soleil. Il a considéré d'autre part, supposant une planète seule en présence du Soleil, l'effet de la loi de force (1) sur l'inclinaison de l'orbite de cette planète sur l'équateur du Soleil.

2. Je me propose ici de calculer systématiquement les corrections séculaires apportées par la loi élémentaire (1) d'une part au grand axe et à l'excentricité de l'orbite dans les mouvements planétaires, d'autre part à l'orientation du plan du mouvement osculateur, et de comparer ces corrections aux résidus de la théorie newtonienne et aux incertitudes possibles de cette théorie.

Considérons un mouvement planétaire quelconque autour du Soleil, réduit à une sphère homogène de centre O, de rayon R et de masse M; définissons à partir de l'origine O, du plan de l'écliptique xOy et du coefficient attractif $\mu = fM$, les éléments osculateurs classiques de ce mouvement, soient a, e, i, Ω, ϖ, l_0, $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ et l'anomalie u : rappelons seulement l'expression classique du rayon vecteur $OP = r$, et l'équation de Képler

$$r = a(1 - e\cos u), \qquad u - e\sin u = nt + l_0 - \varpi.$$

Supposons d'ailleurs la sphère solaire animée d'une rotation d'ensemble constante en grandeur et direction, soit $\vec{\omega}$; désignons par ω la valeur absolue de cette rotation, par p, q, s ses composantes sur les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, et par ω_1 sa projection sur l'axe OZ, perpendiculaire au plan du mouvement osculateur, dirigé dans le sens boréal, et qui a pour cosinus directeurs $\sin\Omega\sin i$, $-\cos\Omega\sin i$, $\cos i$.

Selon un théorème élémentaire établi par Newton, l'attraction newtonienne de la planète P par le Soleil homogène, supposé fixe ou animé d'un mouvement quelconque autour de son centre O, est la même que si toute la masse M était concentrée en O. Cette attraction a pour valeur algébrique sur le rayon vecteur OP la quantité $-\frac{fM}{\overline{OP}^2}$, si $\overline{\mathrm{OP}}$ désigne la distance du centre O à la planète P, et si la masse de cette planète est prise pour unité : elle peut être représentée par le vecteur

$$-\frac{f\mathrm{M}}{\overline{\mathrm{OP}}^3}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}},$$

qui est le produit du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ par le nombre algébrique $-\dfrac{f\mathrm{M}}{\overline{\mathrm{OP}}^3}$.

Dans la position P de la planète à l'instant t, définie par les coordonnées x, y, z, désignons par $\vec{\mathrm{F}}$ la force corrective ajoutée à l'attraction newtonienne par la loi de force (1), compte tenu de la rotation du Soleil : la force $\vec{\mathrm{F}}$ est la résultante des forces correctives élémentaires exercées par les points matériels constituant le Soleil. Soient A l'un de ces points, dm sa masse, α, β, γ les coordonnées de sa position à l'instant t; sa distance à la planète P est au même instant

$$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}.$$

L'attraction newtonienne et la force corrective exercées par le point A peuvent être représentées respectivement par l'expression

$$-f\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,\frac{dm}{\overline{\mathrm{AP}}^3},$$

qui est le produit du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ par les deux facteurs algébriques $-f$ et $\dfrac{dm}{\overline{\mathrm{AP}}^3}$, et par les expressions

$$-f\varepsilon\,\frac{d\overline{\mathrm{AP}}}{dt}\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,\frac{dm}{\overline{\mathrm{AP}}^3} = -f\varepsilon\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,\frac{d\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{dt}\right)\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,\frac{dm}{\overline{\mathrm{AP}}^4},$$

qui sont égales, car le produit scalaire mis entre parenthèses est égal au produit algébrique $\overline{\mathrm{AP}}\dfrac{d\overline{\mathrm{AP}}}{dt}$, puisqu'on peut écrire $(\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2 = (\overline{\mathrm{AP}})^2$ et par dérivation

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,\frac{d\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{dt} = \overline{\mathrm{AP}}\,\frac{d\overline{\mathrm{AP}}}{dt}.$$

La force $\vec{\mathrm{F}}$ est l'intégrale du vecteur élémentaire obtenu, étendue, comme toutes les intégrales qui vont suivre, à la masse du Soleil.

3. Nous calculerons d'abord la correction, soit $\delta \frac{da}{dt}$, de la dérivée $\frac{da}{dt}$ du demi-grand axe osculateur, correspondant à la loi de force considérée. Nous pouvons exprimer cette correction en appliquant l'équation de Lagrange en $\frac{da}{dt}$, classique dans la théorie des perturbations, ou plutôt une transformation de cette équation particulièrement adaptée ([1]) au calcul actuel, soit

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n^2 a} \vec{F}\vec{v},$$

$\vec{v}$ désignant le vecteur vitesse de la planète étudiée. Après substitution de l'expression de la force $\vec{F}$, nous obtenons

$$\delta \frac{da}{dt} = -\frac{2f\varepsilon}{n^2 a} \iiint \left(\overrightarrow{AP}\,\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right)\left(\overrightarrow{AP}\,\vec{v}\right) \frac{dm}{\overline{AP}^4}.$$

Transformons l'élément de cette intégrale. On a d'abord

$$\overrightarrow{AP}\,\vec{v} = \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right)\vec{v} = rr' - \overrightarrow{OA}\,\vec{v},$$

puisque de l'égalité $\left(\overrightarrow{OP}\right)^2 = r^2$ on déduit par dérivation $\overrightarrow{OP}\,\vec{v} = rr'$. On a ensuite

$$\overrightarrow{AP}\,\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt} = \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\vec{v} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right) = rr' - \overrightarrow{OA}\,\vec{v} - \overrightarrow{OP}\,\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt},$$

car le carré $\left(\overrightarrow{OA}\right)^2 = \overline{OA}^2$ étant constant, la dérivée $\overrightarrow{OA}\,\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$ est nulle.

D'après les formules du mouvement de rotation, la dérivée $\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$ est égale au produit vectoriel de la rotation $\vec{\omega}$ par le vecteur $\overrightarrow{OA}$

$$\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA},$$

([1]) Au sujet de cette transformation et des équations transformées des équations de Lagrange en $\frac{de}{dt}$, $\frac{di}{dt}$, $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{d\sqrt{\mu k}}{dt}$, k désignant le paramètre osculateur, et $\frac{d\varpi}{dt}$, que nous employons plus loin, *voir Comptes rendus*, t. **210**, 1940, p. 158, et *Bulletin astronomique*, t. **11**, 1938, p. 360-374.

d'où

$$-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{OP}}\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right),$$

selon les propriétés du produit mixte, soit au total

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,\frac{d\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{dt} = rr' + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\left(-\vec{v} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right).$$

On peut écrire enfin

$$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)^2 = r^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \rho^2,$$

ρ désignant la distance $\overline{\mathrm{OA}}$, d'où le développement

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{AP}}^4} = \frac{1}{r^4}\left[1 + 4\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{r^2} - 2\,\frac{\rho^2}{r^2} + 12\,\frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)^2}{r^4}\cdots\right],$$

et l'on déduit l'expression

$$\delta\,\frac{da}{dt} = -\frac{2f\varepsilon}{n^2 a r^4}\iiint\left[1 + 4\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{r^2} - 2\,\frac{\rho^2}{r^2} + 12\,\frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)^2}{r^4}\cdots\right]$$
$$\times\left[rr' + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\left(-\vec{v} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\right]\left(rr' - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\,\vec{v}\right)dm.$$

Sous la forme obtenue pour l'élément d'intégrale, nous voyons que le terme indépendant de $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, qui correspond au cas où l'on réduit le Soleil à un point matériel, donne par intégration

$$-\frac{2f\varepsilon\mathrm{M}\,r'^2}{n^2 a r^2} = -\frac{2\varepsilon n^2 a^2 e^2 \sin^2 u}{(1 - e\cos u)^4},$$

compte tenu des relations classiques

$$f\mathrm{M} = n^2 a^3, \qquad r = a(1 - e\cos u), \qquad r' = \frac{nae\sin u}{1 - e\cos u}.$$

Après expression des produits scalaire et vectoriel en coordonnées cartésiennes, les termes du premier degré en α, β, γ donnent zéro par intégration, l'intégrale $\iiint\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,dm$ est nulle, puisque le Soleil est supposé homogène de centre O. Les intégrales du second degré en α, β, γ $\iiint \beta\gamma\, dm$, $\iiint \gamma\alpha\, dm$, $\iiint \alpha\beta\, dm$ sont de même nulles par symétrie, et les intégrales $\iiint \alpha^2\, dm$, $\iiint \beta^2\, dm$, $\iiint \gamma^2\, dm$ sont les moments d'inertie de la sphère homogène par rapport à un plan diamétral, et ont pour valeur commune $\frac{\mathrm{MR}^2}{5}$. Considérons alors le produit de deux produits scalaires, comprenant tous deux le facteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et comprenant comme seconds facteurs deux vecteurs quelconques $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, indépendants du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et de composantes a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2 sur les axes $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$; ce produit

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,\vec{v}_1\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,\vec{v}_2\right) = (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1)\,(\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2),$$

multiplié par l'élément dm, et intégré dans tout le volume du Soleil, donne pour intégrale

$$\frac{\mathrm{MR}^2}{5}\,(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) = \frac{\mathrm{MR}^2}{5}\,\vec{v}_1\,\vec{v}_2,$$

c'est-à-dire le produit scalaire $\vec{v}_1\,\vec{v}_2$ multiplié par la quantité $\frac{\mathrm{MR}^2}{5}$.

Donc, dans l'intégrale qui exprime la correction $\delta\frac{da}{dt}$, les termes de degré 2 en α, β, γ donnent par intégration, d'une part

$$-\frac{2\varepsilon n^2 a^2 e^2 \sin^2 u}{(1 - e\cos u)^4}\,\frac{\mathrm{R}^2}{5}\left(-\frac{6}{r^2} + 12\,\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^4}\right) = -\frac{12\varepsilon n^2 \mathrm{R}^2 e^2 \sin^2 u}{5(1 - e\cos u)^6},$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} &-\frac{2f\varepsilon \mathrm{MR}^2}{5n^2 a r^4}\left[\vec{v}\left(\vec{v} - \vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) - 4\,\frac{r'}{r}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\left(2\vec{v} - \vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\right] \\ &= -\frac{2\varepsilon \mathrm{R}^2}{5a^2(1 - e\cos u)^4}\left[v^2 - \vec{v}\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) - 8r'^2\right], \end{aligned}$$

car le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,\vec{v}$ est égal à rr', nous l'avons vu déjà, et le produit mixte $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$, où deux facteurs sont égaux, est nul. On a d'ailleurs, selon les formules classiques,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} = n^2 a^2\,\frac{1 + e\cos u}{1 - e\cos u}.$$

Enfin, après une permutation circulaire, le produit mixte

$$\vec{v}(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = \vec{\omega}(\overrightarrow{OP} \times \vec{v})$$

est le produit scalaire de la rotation du Soleil $\vec{\omega}$ et du produit vectoriel $\overrightarrow{OP} \times \vec{v}$, égal au moment cinétique de la planète au point O; ce moment est porté par l'axe OZ, perpendiculaire au plan du mouvement osculateur, et, comme dans ce mouvement lui-même, a pour valeur algébrique sur OZ $na^2\sqrt{1-e^2}$: donc le produit scalaire considéré est égal au produit de cette valeur algébrique et de la projection ω_1 de la rotation du Soleil sur OZ, soit au total $n\omega_1 a^2\sqrt{1-e^2}$.

En définitive, commettant des erreurs relatives de l'ordre de $\frac{R^4}{a^4}$ sur le premier terme et de l'ordre de $\frac{R^2}{a^2}$ sur le second, nous obtenons comme correction de la dérivée $\frac{da}{dt}$ l'expression [1]

$$(2)\quad \delta\frac{da}{dt} = -\frac{2\varepsilon n^2a^2e^2\sin^2 u}{(1-e\cos u)^4}\left[1+\frac{6R^2}{5a^2(1-e\cos u)^2}\right] + \frac{2}{5}\frac{\varepsilon n R^2}{(1-e\cos u)^4}\left[\omega_1\sqrt{1-e^2} - n\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u} + \frac{8ne^2\sin^2 u}{(1-e\cos u)^2}\right].$$

Faisant $e = 0$, $\omega_1 = \omega$, on retrouve la correction correspondant à la force calculée par M. Armellini

$$(3)\qquad \delta\frac{da}{dt} = \frac{2}{5}\varepsilon n(\omega - n)R^2,$$

qui donne pour les différentes planètes un allongement du grand axe $2a$ et une accélération séculaire négative. Mais le premier terme de l'expression (2) est au contraire négatif en général, et dans les mouvements des planètes classiques, sauf Vénus et Neptune, cette expression a une valeur moyenne négative.

---

(1) Cette expression et l'expression que je donne plus loin de la correction $\delta\frac{di}{dt}$ rectifient légèrement sur deux points sans importance pratique les deux expressions que j'ai données dans ma Note antérieure (*Comptes rendus*, t. 209, 1939, p. 134 et 135).

Appliquons au mouvement de la planète Mercure la valeur absolue de la correction séculaire obtenue : à une erreur relative près de l'ordre du centième, et puisque la valeur moyenne du facteur $\sin^2 u$ est $\frac{1}{2}$, cette correction est

$$\delta \frac{da}{dt} = -\varepsilon n^2 a^2 e^2.$$

On déduit des relations

$$n^2 a^3 = \mu, \qquad 2\frac{dn}{n} + 3\frac{da}{a} = 0,$$

la correction

$$\delta \frac{dn}{dt} = \frac{3}{2}\varepsilon n^3 a e^2,$$

puis, par intégration à partir de l'instant $t = 0$, les corrections séculaires

$$\delta n = \frac{3}{2}\varepsilon n^3 a e^2 t, \qquad \delta l = \frac{3}{4}\varepsilon n^3 a e^2 t^2,$$

l désignant la longitude moyenne de la planète P : soit pour la durée de k révolutions, pour $nt = 2k\pi$,

$$\delta l = 3k^2\pi^2 \varepsilon n a e^2.$$

Si l'on admet comme résultat des observations que l'accroissement de la longitude moyenne de la planète Mercure ne peut atteindre $0'',5$ par siècle, on déduit pour l'inverse V du coefficient ε et en C. G. S. l'inégalité

$$3.415^2.\pi^2.\frac{1}{V}.\frac{2\pi}{88.24.3600}.5,8.10^{12}.0,04 < 0,5.\frac{\pi}{180.3600},$$

soit environ

$$V > 4.10^{17}.$$

Ainsi *il résulte de l'étude de la longitude de la planète Mercure que la vitesse linéaire* V, *non seulement est supérieure à la vitesse de la lumière* 3.10^{10}, *valeur qu'avait donnée M. Popovici, mais est supérieure aussi à la valeur de l'ordre de* 10^{14} *qu'a suggérée M. Armellini.* On remarque d'ailleurs que la limite précédente est obtenue à partir du terme qui correspond au cas où l'on réduit le Soleil à un point matériel, et cette limite reste valable dans les différentes hypothèses qu'on peut faire sur la constitution et le mouvement du Soleil.

Autre remarque : la correction (3), si l'on réduit le facteur $\omega - n$ à ω, devient identique à la correction qu'on obtient en valeur principale en supposant que l'attraction newtonienne a une vitesse de propagation finie $V = \frac{1}{\varepsilon}$, et en calculant l'effet de la rotation du Soleil sur la longitude d'une planète selon l'hypothèse que Lehmann-Filhès a appliquée au mouvement de translation du système solaire; si, au contraire, on applique au mouvement de rotation du Soleil le raisonnement que, dans l'hypothèse aussi d'une vitesse de propagation finie de l'attraction newtonienne, Laplace a appliqué au mouvement de révolution des planètes autour du Soleil, on obtient une correction de même valeur absolue, mais de signe opposé. Et l'on sait (1) que les limites inférieures de la vitesse de propagation de l'attraction formées à partir des corrections précédentes sont de beaucoup supérieures à la vitesse de la lumière.

4. Calculons de même dans le mouvement d'une planète la correction apportée par la loi de force (1) et la rotation du Soleil à la dérivée de l'excentricité $\frac{de}{dt}$, au moyen de l'équation transformée de l'équation de Lagrange

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\vec{F}\left(\overrightarrow{OZ_1} \times \overrightarrow{OP}\right) + \frac{1-e^2}{2ae}\frac{da}{dt},$$

où Z_1 désigne (2) le point d'abscisse 1 sur l'axe OZ.

(1) *Voir* par exemple CHAZY, *Comptes rendus*, t. **190**, 1930, p. 1273, et t. **191**, 1930, p. 761.

(2) De sorte que le produit mixte

$$\vec{F}\left(\overrightarrow{OZ_1} \times \overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{OZ_1}\left(\overrightarrow{OP} \times \vec{F}\right)$$

est égal à la projection sur OZ du moment en O de la force $\vec{F}$, c'est-à-dire au moment de cette force par rapport à l'axe OZ (voir *Comptes rendus*, t. **210**, 1940, p. 158, et *Bulletin astronomique*, t. **11**, 1938, p. 371); mais dans le présent calcul mieux vaut conserver l'expression du produit mixte. Deux remarques analogues s'appliquent aux expressions que nous employons plus loin des dérivées $\frac{di}{dt}$, $\frac{d\Omega}{dt}$.

Le premier terme de la correction peut s'écrire, après substitution de l'expression de la force $\vec{F}$,

$$\frac{f\varepsilon\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\iiint\left(\overrightarrow{AP}\,\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right)\left[\overrightarrow{AP}\left(\overrightarrow{OZ_1}\times\overrightarrow{OP}\right)\right]\frac{dm}{\overline{AP}^4}.$$

Or on a

$$\overrightarrow{AP}\,\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}=rr'+\overrightarrow{OA}\left(-\vec{\nu}+\vec{\omega}\times\overrightarrow{OP}\right),$$

comme précédemment, et

$$\overrightarrow{AP}\left(\overrightarrow{OZ_1}\times\overrightarrow{OP}\right)=\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{OZ_1}\times\overrightarrow{OP}\right)=-\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OZ_1}\times\overrightarrow{OP}\right),$$

puisque le produit mixte $\overrightarrow{OP}\left(\overrightarrow{OZ_1}\times\overrightarrow{OP}\right)$, où deux vecteurs coïncident, est nul. Selon le calcul antérieur, à une erreur près de l'ordre du quotient $\frac{R^2}{a^2}$ en valeur relative moyenne, le terme considéré devient

$$\frac{\varepsilon naR^2\sqrt{1-e^2}}{5er^4}\left(\vec{\nu}-\vec{\omega}\times\overrightarrow{OP}\right)\left(\overrightarrow{OZ_1}\times\overrightarrow{OP}\right).$$

Le produit mixte

$$\vec{\nu}\left(\overrightarrow{OZ_1}\times\overrightarrow{OP}\right)=\overrightarrow{OZ_1}\left(\overrightarrow{OP}\times\vec{\nu}\right)$$

est égal au produit scalaire du moment cinétique en O de la planète P, moment qui est porté par l'axe OZ et a pour valeur algébrique sur cet axe $na^2\sqrt{1-e^2}$ et du vecteur de valeur algébrique 1 sur OZ, soit au total $na^2\sqrt{1-e^2}$. D'autre part, en appliquant la formule de transformation du produit scalaire de deux produits vectoriels en une différence de produits de deux produits scalaires ([1]), nous pouvons écrire

$$-\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{OP}\right)\left(\overrightarrow{OZ_1}\times\overrightarrow{OP}\right)=\left(\vec{\omega}\,\overrightarrow{OP}\right)\left(\overrightarrow{OP}\,\overrightarrow{OZ_1}\right)-\left(\vec{\omega}\,\overrightarrow{OZ_1}\right)\left(\overrightarrow{OP}\right)^2.$$

([1]) Soit, d'une façon générale,

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\,\vec{c}\right)\left(\vec{b}\,\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\,\vec{d}\right)\left(\vec{b}\,\vec{c}\right),$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ désignant quatre vecteurs quelconques. Cette formule est aussi une extension de l'identité de Lagrange (*Cf.* BRICARD, *Le Calcul vectoriel*, p. 33).

Or, au premier terme, le produit scalaire $\overrightarrow{OP}\,\overrightarrow{OZ_1}$ est identiquement nul, puisque l'axe OZ est à chaque instant perpendiculaire au plan du mouvement osculateur; au dernier terme nous remplaçons $(\overrightarrow{OP})^2$ par $\overline{OP}^2 = r^2 = a^2(1 - e\cos u)^2$, et le produit scalaire $\vec{\omega}\,\overrightarrow{OZ_1}$ de la rotation du Soleil et du vecteur de valeur algébrique 1 sur OZ est égal à la projection ω_1 de la rotation du Soleil sur OZ. L'expression considérée est égale à $-\omega_1 a^2(1 - e\cos u)^2$. Et le terme calculé se réduit à

$$\frac{\varepsilon n R^2\sqrt{1-e^2}}{5ae(1-e\cos u)^4}\left[n\sqrt{1-e^2} - \omega_1(1-e\cos u)^2\right].$$

En définitive, après substitution de l'expression (2) de la correction $\delta\dfrac{da}{dt}$, après réductions, et si l'on néglige les termes en R^4, on obtient l'expression

$$(4)\quad \delta\frac{de}{dt} = -\frac{\varepsilon n^2 ae(1-e^2)\sin^2 u}{(1-e\cos u)^4}\left[1 + \frac{6R^2}{5a^2(1-e\cos u)^2}\right] + \frac{\varepsilon n R^2\sqrt{1-e^2}}{5a(1-e\cos u)^4}\left[\omega_1[2\cos u - e(1+\cos^2 u)] - \frac{2n\sqrt{1-e^2}\cos u}{1-e\cos u} + \frac{8ne\sqrt{1-e^2}\sin^2 u}{(1-e\cos u)^2}\right]:$$

notamment l'excentricité e ne figure plus aux dénominateurs.

Si l'on applique l'expression (4) aux différentes planètes, on constate qu'on obtient, avec une erreur relative de l'ordre du centième, la partie séculaire de la correction en réduisant celle-ci à la quantité

$$(5)\qquad \delta\frac{de}{dt} = -\frac{\varepsilon n^2 ae}{2}.$$

Pour la planète Mercure, la correction de la dérivée $\dfrac{de}{dt}$ en un siècle est, exprimée en secondes d'arc et si l'on fait en C. G. S. $\varepsilon = \dfrac{1}{V}$, environ

$$-\frac{2{,}6.10^{14}}{V}.$$

Or la valeur de cette dérivée donnée [1] par Newcomb comme résidu de la théorie newtonienne est la suivante : Newcomb obtient

Valeur observée..................	$3'',36$
» calculée..................	$4'',24$
O—C..........................	$-0'',88 \pm 0,50$,

le dernier terme représentant l'erreur moyenne.

Si l'on considère la variation séculaire de l'excentricité de la planète Mercure, il est donc encore tout à fait impossible que dans la loi de force (1) *la vitesse linéaire* V *soit la vitesse de la lumière :* et ceci, d'après l'origine du terme efficace (5) à partir de l'expression (4), quels que soient la constitution et le mouvement du Soleil. Au contraire, la valeur V de l'ordre de 10^{14} proposée par M. Armellini, et d'ailleurs incompatible avec les observations de la longitude moyenne de Mercure, serait acceptable ici, compte tenu de l'incertitude qui peut exister sur les valeurs données par Newcomb.

5. Calculons de même la correction de la dérivée de l'inclinaison $\frac{\delta di}{dt}$ au moyen de l'équation transformée de l'équation de Lagrange

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\vec{F}(\overrightarrow{OJ_1} \times \overrightarrow{OP})}{na^2\sqrt{1-e^2}},$$

J_1 désigne le point d'abscisse 1 sur l'axe OJ situé dans le plan du mouvement osculateur, perpendiculaire à la ligne des nœuds, et de sens tel que l'axe ON joignant O au nœud ascendant, et les axes OJ et OZ forment un trièdre d'orientation directe; par rapport aux axes de référence Ox, Oy, Oz les cosinus directeurs de l'axe OJ, ou les coordonnées du point J_1, sont $-\sin\Omega\cos i$, $\cos\Omega\cos i$, $\sin i$.

Par suite, la correction $\frac{\delta di}{dt}$ est donnée par l'intégrale

$$\delta\frac{di}{dt} = \frac{f\varepsilon}{na^2\sqrt{1-e^2}}\iiint\left(\overrightarrow{AP}\,\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right)\left[\overrightarrow{AP}(\overrightarrow{OJ_1}\times\overrightarrow{OP})\right]\frac{dm}{\overline{AP}^4},$$

[1] *The elements of the four inner Planets and the fundamental Constants of Astronomy*, p. 109.

où l'on a encore

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,\frac{d\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{dt} = rr' + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\left(-\vec{\nu} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right).$$

Le facteur entre crochets est égal à

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1 \times \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = -\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\left(\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1 \times \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right).$$

A l'approximation antérieure, l'intégrale se réduit à

$$\frac{\varepsilon n a \mathrm{R}^2}{5\sqrt{1-e^2}\,r^4}\left(\vec{\nu} - \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1 \times \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right).$$

Le produit mixte $\vec{\nu}\left(\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1 \times \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$, où les trois vecteurs sont dans le plan du mouvement osculateur, est nul. Il reste un produit scalaire de deux produits vectoriels que nous transformons par la formule antérieure

$$-\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1 \times \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = \left(\vec{\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1\right) - \left(\vec{\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1\right)\overline{\mathrm{OP}}^2.$$

Le produit scalaire $\vec{\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ peut être exprimé au moyen des composantes des deux vecteurs $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ sur les axes $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$, soit $px + qy + sz$. Le produit scalaire $\vec{\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1$ est égal à la projection du vecteur $\vec{\omega}$ sur l'axe $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$; par suite, on peut évaluer ce produit en écrivant que la projection s du vecteur $\vec{\omega}$ sur l'axe $\mathrm{O}z$ est la somme de ses deux projections sur les axes OJ et OZ, puisque l'axe $\mathrm{O}z$ est situé dans le plan de ces deux axes; ces deux projections sont le produit $\vec{\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1$ à évaluer et la quantité ω_1, et l'axe $\mathrm{O}z$ fait avec les axes OJ et OZ les angles $\frac{\pi}{2} - i$ et $-i$, d'où la relation

$$s = \vec{\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1 \sin i + \omega_1 \cos i, \qquad \text{ou} \qquad \vec{\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1 = \frac{s - \omega_1 \cos i}{\sin i}.$$

La même relation appliquée au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, perpendiculaire à l'axe OZ et de projection z sur $\mathrm{O}z$, se réduit à

$$z = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}_1 \sin i,$$

et donne la valeur du dernier produit scalaire figurant dans l'expression considérée, qui devient

$$\frac{z(px + qy + sz) - (s - \omega_1 \cos i) a^2 (1 - e \cos u)^2}{\sin i}.$$

D'où, en négligeant les termes en R^4, la correction

$$\delta \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon n R^2}{5a^3\sqrt{1-e^2}\sin i (1 - e\cos u)^4} [z(px+qy+sz)-(s-\omega_1 \cos i)a^2(1-e\cos u)^2],$$

où x, y, z doivent être remplacés en fonction des éléments osculateurs selon les formules connues.

Si l'on néglige l'excentricité, la correction a pour valeur moyenne l'expression

$$(6) \qquad \delta \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon n R^2}{10a} (p \sin\Omega \cos i - q \cos\Omega \cos i - s \sin i),$$

qui se réduit pour $p = 0$, $q = 0$, $s = \omega$ à la valeur donnée par M. Armellini

$$\delta \frac{di}{dt} = -\frac{\varepsilon \omega n R^2 \sin i}{10a},$$

et où la parenthèse n'est autre chose que la projection de la rotation $\vec{\omega}$ sur l'axe opposé à l'axe OJ, c'est-à-dire sur la ligne de plus grande pente du plan du mouvement osculateur par rapport au plan de référence.

Appliquons la formule (6) aux mouvements des planètes Mercure et Vénus en prenant comme plan de référence xOy le plan de l'écliptique à l'instant t, l'axe Ox passant par l'équinoxe moyen; d'après la *Connaissance des Temps*, la rotation du Soleil $\vec{\omega}$ correspond à une durée de 25 jours environ, et l'équateur perpendiculaire dans le sens direct correspond à un nœud ascendant de longitude 75° et à une inclinaison de 7°15′. Si V est égal à la vitesse de la lumière, on déduit comme corrections de la dérivée $\frac{di}{dt}$ en un siècle des valeurs voisines de — 0″,06 pour Mercure et de 0″,06 pour Vénus, valeurs très petites et compatibles avec les valeurs de cette dérivée données [1]

[1] *The elements of the four inner Planets and the Constants of Astronomy*, p. 109.

par Newcomb comme résidus de la théorie newtonienne, soit respectivement $0'',38 \pm 0,80$ et $0'',38 \pm 0,33$.

6. Calculons enfin la correction de la dérivée de la longitude du nœud $\delta \frac{d\Omega}{dt}$ à partir de l'équation transformée de l'équation de Lagrange

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\vec{F}(\overrightarrow{ON_1} \times \overrightarrow{OP})}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i},$$

où N_1 désigne le point d'abscisse 1 sur la ligne des nœuds ON, point qui a pour coordonnées $\cos\Omega$, $\sin\Omega$, 0 par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.

Le calcul est analogue à celui de la correction $\delta \frac{di}{dt}$, et conduit à l'expression

$$\delta \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\varepsilon n R^2}{5a^3\sqrt{1-e^2}\sin i(1-e\cos u)^4} [(x\cos\Omega + y\sin\Omega)(px + qy + sz) \\ - (p\cos\Omega + q\sin\Omega)a^2(1-e\cos u)^2],$$

dont la valeur séculaire, si l'on néglige l'excentricité, est

$$\frac{\varepsilon n R^2}{10 a \sin i}(p\cos\Omega + q\sin\Omega),$$

et donne de même pour Mercure une correction voisine de $2'',25$ en un siècle, si V est égal à la vitesse de la lumière. Cette valeur est compatible avec le résidu de la théorie newtonienne obtenu (¹) par Newcomb

$$\frac{0'',61 \pm 0,52}{\sin i}, \qquad \text{soit environ} \quad 5'' \pm 4,3.$$

7. En définitive les corrections des dérivées $\frac{di}{dt}$, $\frac{d\Omega}{dt}$, qui sont nulles si l'on réduit le Soleil à un point matériel ayant la masse connue M, sont négligeables si l'on tient compte des dimensions et de la rotation du Soleil, et si la vitesse V est au moins égale à la vitesse de la lumière. D'autre part, dans l'expression de la correction $\delta \frac{de}{dt}$, la partie séculaire

(¹) *The elements of the four inner Planets and the Constants of Astronomy*, p. 109.

retenue (5) est indépendante des dimensions et de la rotation du Soleil, et conserve la même valeur si l'on réduit le Soleil à un point matériel; cette partie séculaire provient de la correction du terme en $\frac{da}{dt}$, c'est-à-dire que la correction de la dérivée du paramètre osculateur, soit k ce paramètre, selon l'équation

$$\frac{d\sqrt{\mu k}}{dt} = \text{moment de } \vec{F} \text{ par rapport OZ},$$

est de même négligeable, si la vitesse V est au moins égale à la vitesse de la lumière. Au total, dans la dernière hypothèse, *les trois corrections* $\delta\,\frac{d\sqrt{\mu k}}{dt}$, $\delta\,\frac{di}{dt}$, $\delta\,\frac{d\Omega}{dt}$ *sont négligeables.*

Nous pouvons faire dépendre cette triple propriété d'une équation unique en remplaçant les trois équations correspondantes par l'équation vectorielle qui exprime le théorème des moments cinétiques appliqué au mouvement de la planète P et au point fixe O, soit

$$\frac{d\overrightarrow{OK}}{dt} = \text{moment de } \vec{F} \text{ en O},$$

si $\overrightarrow{OK}$ désigne le moment cinétique de la planète P au point O. On déduit de l'expression antérieure de la force corrective $\vec{F}$

$$\begin{aligned}\delta\,\frac{d\overrightarrow{OK}}{dt} &= -f\varepsilon\iiint\left(\overrightarrow{AP}\,\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right)\left(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{AP}\right)\frac{dm}{\overline{AP}^4}\\ &= -\frac{f\varepsilon}{r^4}\iiint\left[rr' + \overrightarrow{OA}\left(-\vec{v}+\vec{\omega}\times\overrightarrow{OP}\right)\right]\\ &\qquad\times\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OP}\right)\left(1+4\,\frac{\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OP}}{r^2}\cdots\right)dm,\end{aligned}$$

puisqu'on a

$$\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}\times\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OP},$$

le produit vectoriel $\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OP}$ de deux vecteurs égaux étant nul.

Dans le développement de la dernière intégrale, il n'y a pas de terme indépendant du vecteur $\overrightarrow{OA}$; si, en effet, le Soleil est réduit à un point matériel, la forme corrective $\vec{F}$ est dirigée suivant le rayon vecteur OP, son moment en O est nul. Le terme du premier degré en $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, c'est-à-dire par rapport aux coordonnées α, β, γ, peut s'écrire

$$rr'\left(\iiint \overrightarrow{\mathrm{OA}}\, dm\right) \times \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0 :$$

il est nul parce que l'intégrale placée entre parenthèses est nulle. Pour former les termes de degré 2 en α, β, γ, nous pouvons considérer d'une façon générale le produit d'un produit scalaire et d'un produit vectoriel comprenant tous deux le facteur variable $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, et comprenant comme seconds facteurs deux vecteurs quelconques $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ indépendants de $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$; compte tenu des relations entre les composantes α, β, γ, du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, le produit considéré donne pour intégrale dans le volume du Soleil

$$\iiint (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\, \vec{v}_1)(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \vec{v}_2)\, dm = \frac{\mathrm{MR}^2}{5}(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2), \tag{7}$$

c'est-à-dire le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ multiplié par la quantité $\frac{\mathrm{MR}^2}{5}$.

Dès lors, dans l'intégrale obtenue comme expression de la correction $\delta \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OK}}}{dt}$, écrivons successivement les termes de degré 2. Un premier terme est

$$4\frac{r'}{r}\iiint (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\, \overrightarrow{\mathrm{OP}})(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}})\, dm = 0;$$

ce terme est nul d'après l'égalité (7), où les deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont égaux à $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$. Un second terme est

$$-\iiint (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\, \vec{v})(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}})\, dm = \frac{\mathrm{MR}^2}{5}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} \times \vec{v}) = \frac{\mathrm{MR}^2}{5}\, \overrightarrow{na^2\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{OZ}_1},$$

d'après l'égalité (7), et puisque le moment cinétique de la planète P en O est porté par l'axe OZ et a pour valeur algébrique sur OZ la quantité $na^2\sqrt{1-e^2}$.

Nous appliquons au troisième terme successivement la formule (7) et la formule de transformation du vecteur résultant de deux multiplications vectorielles successives (1)

$$\iiint \left[\overrightarrow{OA}\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}\right)\right]\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OP}\right) dm = \frac{MR^2}{5}\left[\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}\right) \times \overrightarrow{OP}\right]$$
$$= \frac{MR^2}{5}\left[\overrightarrow{OP}\left(\vec{\omega}\,\overrightarrow{OP}\right) - \vec{\omega}\,\overline{OP}^2\right].$$

Nous obtenons ainsi, en négligeant les termes en R^4, l'équation vectorielle

$$\delta\frac{d\overrightarrow{OK}}{dt} = -\frac{f\varepsilon MR^2}{5r^4}\left[\overrightarrow{na^2\sqrt{1-e^2}\,OZ_1} + \overrightarrow{OP}\left(\vec{\omega}\,\overrightarrow{OP}\right) - \vec{\omega}\,\overline{OP}^2\right],$$

qui, par projection (2) sur les axes OJ, ON, OZ, donne les trois corrections $-\sqrt{\mu k}\,\delta\frac{di}{dt}$, $\sqrt{\mu k}\sin i\,\delta\frac{d\Omega}{dt}$, $\delta\frac{d\sqrt{\mu k}}{dt}$, ou du moins leurs parties principales, et où l'on constate selon les calculs antérieurs que le second membre est négligeable si la vitesse linéaire $V = \frac{1}{\varepsilon}$ est au moins égale à la vitesse de la lumière.

8. Ajoutons enfin que la correction de la dérivée de la longitude du périhélie $\delta\frac{d\varpi}{dt}$ correspondant à la loi étudiée peut être calculée de même à partir de l'équation

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\cos u + e}{na^2\sqrt{1-e^2}}\vec{F}\,\overrightarrow{OP} + \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{2ae}\left(\frac{1 - e\cos u}{1-e^2} + 1\right)\frac{da}{dt} + 2\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dt}.$$

Dans cette équation le dernier terme donne ainsi la correction $2\sin^2\frac{i}{2}\,\delta\frac{d\Omega}{dt}$, et l'on constate d'autre part que les corrections séculaires

(1) Soit, d'une façon générale,

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{b}\left(\vec{a}\,\vec{c}\right) - \vec{a}\left(\vec{b}\,\vec{c}\right),$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ désignant trois vecteurs quelconques, et la parenthèse du premier membre désignant le premier produit vectoriel effectué (*Cf.* BRICARD, *Le calcul vectoriel*, p. 29-32).

(2) Cf. *Bulletin astronomique*, t. 11, 1938, p. 372.

déduites des deux termes précédents ne comportent ni termes indépendants du rayon R, ni termes du premier degré en $\frac{R^2}{a^2}$, mais au plus des termes en $\frac{R^4}{a^4}$. Il résulte que la correction séculaire $\delta \frac{d\varpi}{dt}$ est, pour une même valeur de la vitesse V, très petite par rapport à celles que nous avons plus haut mises en évidence, et en particulier est tout à fait négligeable dans les mouvements des planètes si V est au moins égal à la vitesse de la lumière.

9. Nous pouvons conclure cette étude sous la forme suivante : *Parmi les corrections apportées par la loi de force* (1) *à la théorie newtonienne des mouvements planétaires, celle dont l'effet est le plus sensible est* la correction de la dérivée du grand axe osculateur, c'est-à-dire *l'introduction d'une accélération séculaire dans l'expression de la longitude des planètes :* on sait, en effet, que dans la théorie newtonienne la longitude d'une planète ne peut avoir qu'une accélération séculaire négligeable, selon les théorèmes de Lagrange et de Poisson sur l'invariabilité des grands axes. Si l'on admet comme résultat des observations de ses passages sur le disque du Soleil, que l'accroissement de la longitude de la planète Mercure correspondant à l'accélération obtenue ne peut dépasser 0",5 par siècle, cette limitation entraîne une limite inférieure de la vitesse V figurant dans l'expression (1) de la loi considérée : V doit être supérieur à $4 \cdot 10^{17}$ en unités C. G. S., soit à 10^7 fois la vitesse de la lumière.

Il est à peine besoin de l'ajouter, une telle accélération ne peut donner aucune explication, et doit être au contraire nettement séparée de l'anomalie célèbre du mouvement de la planète Mercure, qui constitue le désaccord le plus saillant entre l'observation et la théorie newtonienne des planètes : la longitude du périhélie de Mercure résultant des observations présente une avance de 43" par siècle par rapport à la longitude calculée. En effet, cette avance change la valeur séculaire de la dérivée première de la longitude de Mercure, tandis que la correction considérée ici donnerait à la dérivée seconde une valeur séculaire qui ne serait pas négligeable si la vitesse V était trop petite.