JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN DIEUDONNÉ

Quelques résultats quantitatifs de théorie analytique des polynomes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 121-132.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_121_0>

Quelques résultats quantitatifs de théorie analytique des polynomes;

PAR J. **DIEUDONNÉ.**

Dans un Mémoire récent [1], j'ai obtenu un certain nombre de propositions d'ordre *qualitatif* concernant les domaines décrits par les zéros des dérivées d'une fraction rationnelle dont on assujettit un certain nombre de zéros et un certain nombre de pôles à varier dans des ensembles fermés du plan complexe, les autres zéros et pôles de la fraction étant arbitraires. J'aborde, dans ce travail, le côté *quantitatif* de ces questions, qui consiste à essayer de déterminer les domaines dont les raisonnements qualitatifs prouvent l'existence, ou tout au moins d'obtenir quelques renseignements sur leur ordre de grandeur. Mais, tandis que, pour la partie qualitative de ces problèmes, on dispose de méthodes générales [2] permettant, dans un grand nombre de cas, d'épuiser complètement la question, on n'a pu jusqu'ici obtenir de résultats quantitatifs que par l'emploi d'artifices variés et de valeur très inégale; et le présent Mémoire ne constitue pas une exception à cette règle, comme le lecteur s'en apercevra aisément. La plupart des résultats que nous obtenons sont sans doute très loin d'être les meilleurs possibles, même en ce qui concerne leur ordre

(1) J. DIEUDONNÉ, *Sur la variation des zéros des dérivées des fractions rationnelles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 54, 1937, p. 101-150).

(2) *Voir* un article de l'auteur, intitulé : *L'aspect qualitatif de la théorie analytique des polynomes* (*Annals of Mathematics*, t. 40, 1939, p. 748-754).

de grandeur; ils ne donnent en somme qu'un premier dégrossissage des questions traitées.

Dans les problèmes que j'étudie ici, on ne fait d'hypothèses que sur les *pôles* de la fraction rationnelle; les zéros restent arbitraires. De façon précise, on considère l'équation

$$(1)\qquad \frac{a_1}{(z-z_1)^{m+1}}+\frac{a_2}{(z-z_2)^{m+1}}+\ldots+\frac{a_q}{(z-z_q)^{m+1}}+\ldots+\frac{a_n}{(z-z_n)^{m+1}}=0,$$

où les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont arbitraires, ainsi que les $(n-q)$ pôles $z_{q+1}, \ldots, z_n$; les autres pôles $z_1, z_2, \ldots, z_q$ sont assujettis à rester dans un ensemble fermé Δ du plan complexe; je me bornerai au cas où Δ est formé de l'intérieur d'un cercle et de sa circonférence; on peut toujours supposer que c'est le cercle-unité $|z|\leqq 1$. J'ai démontré alors [1] que l'équation (1) a toujours $N=m(q-1)$ racines bornées, autrement dit qu'il existe un nombre R_N tel que l'équation (1) ait au moins N racines dans le cercle $|z|\leqq R_N$, quels que soient les coefficients a_i, les pôles arbitraires $z_{q+1}, \ldots, z_n$, et les pôles $z_1, \ldots, z_q$ dans Δ; en outre, cette propriété n'est plus exacte quand on remplace N par $N+1$.

Soit r_N la borne inférieure des nombres R_N ayant la propriété précédente; et plus généralement, pour chaque nombre p compris entre 1 et N, soit r_p la borne inférieure des nombres R_p tels que l'équation (1) ait au moins p racines dans le cercle $|z|\leqq R_p$. Le problème quantitatif qui se pose consiste à déterminer les nombres r_p $(1\leqq p\leqq N)$ en fonction de n, m, p et q, ou tout au moins à obtenir des limites inférieures et supérieures de ces nombres.

Je n'ai pu jusqu'ici trouver de méthode permettant de traiter ce problème dans tous les cas. Dans ce qui suit, je détermine en premier lieu une limite supérieure de r_N dans le cas particulier où $q=n$; puis j'obtiens une limite supérieure pour r_1 dans tous les cas; enfin, dans une troisième partie, je traite complètement un problème particulier, correspondant au cas où $m=1$, $q=2$ et où l'on assujettit en outre les pôles arbitraires $z_3, \ldots, z_n$ à être confondus, ainsi que tous les

---

[1] *Voir* le Mémoire cité dans la Note [1] de la page précédente, p. 146.

zéros de la fraction rationnelle de degré n dont (1) est la dérivée; dans ces conditions, on peut obtenir la valeur exacte de la borne inférieure des nombres R tels que (1) ait toujours une racine au moins dans $|z| \leqq R$.

I.

Lorsque $q = n$, on a $N = m(n-1)$; il existe donc au plus $n-1$ zéros de (1) de module supérieur à r_N. Or, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n zéros de (1) (distincts ou non), les $2n$ nombres $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont liés par la relation obtenue en divisant, par le produit des déterminants de Vandermonde des x_i et des z_i, la relation

$$(2) \quad \|(x_i - z_j)^{-m-1}\| \equiv \begin{vmatrix} (x_1 - z_1)^{-m-1} & (x_1 - z_2)^{-m-1} & \ldots & (x_1 - z_n)^{-m-1} \\ (x_2 - z_1)^{-m-1} & (x_2 - z_2)^{-m-1} & \ldots & (x_2 - z_n)^{-m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_n - z_1)^{-m-1} & (x_n - z_2)^{-m-1} & \ldots & (x_n - z_n)^{-m-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Soit ρ un nombre positif et < 1, et posons $y_i = \frac{1}{\rho x_i}$; on aura donc

$$(3) \qquad \|(1 - \rho y_i z_j)^{-m-1}\| = 0.$$

Nous allons chercher à déterminer une valeur de ρ telle que l'équation (3) (divisée par les déterminants de Vandermonde des y_i et des z_i) ne puisse être vérifiée pour $|y_i| \leqq 1$ et $|z_i| \leqq 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Il en résultera, d'après ce qui précède, que $r_N \leqq \frac{1}{\rho}$.

Pour trouver une telle valeur de ρ, nous nous plaçons dans l'hypothèse où $|y_i| \leqq 1$ et $|z_i| \leqq 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$); nous développerons en série entière suivant les puissances de ρ le déterminant qui figure au premier membre de (3); après mise en facteur des déterminants de Vandermonde, il restera une série dont nous majorerons les coefficients par des nombres indépendants des y_i et z_i.

Comme

$$(1-u)^{-m-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m-1}{k} u^k,$$

il est immédiat qu'on aura le développement du déterminant (3) en faisant la somme, pour tous les systèmes de n nombres entiers α_1, α_2, ..., α_n, tels que $0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, des expressions

$$(4) \qquad (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\binom{-m-1}{\alpha_1}\cdots\binom{-m-1}{\alpha_n}\rho^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} \times \begin{vmatrix} y_1^{\alpha_1} & y_1^{\alpha_2} & \ldots & y_1^{\alpha_n} \\ y_2^{\alpha_1} & y_2^{\alpha_2} & \ldots & y_2^{\alpha_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{\alpha_1} & y_n^{\alpha_2} & \ldots & y_n^{\alpha_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1^{\alpha_1} & z_1^{\alpha_2} & \ldots & z_1^{\alpha_n} \\ z_2^{\alpha_1} & z_2^{\alpha_2} & \ldots & z_2^{\alpha_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n^{\alpha_1} & z_n^{\alpha_2} & \ldots & z_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Nous allons montrer qu'après division de cette expression par les déterminants de Vandermonde des y_i et des z_i, il reste un polynome en y_i et z_i *à coefficients positifs*. Comme $(-1)^k\binom{-m-1}{k} > 0$, il suffira de voir que le quotient du déterminant

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_1^{\alpha_2} & \ldots & x_1^{\alpha_n} \\ x_2^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_2} & \ldots & x_2^{\alpha_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{\alpha_1} & x_n^{\alpha_2} & \ldots & x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix},$$

par le déterminant de Vandermonde

$$V(x_1, \ldots, x_n) \equiv \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \equiv \prod_{\substack{2 \leqq i \leqq n \\ j<i}} (x_i - x_j),$$

est un polynome *à coefficients positifs*.

La proposition est évidente pour $n = 2$; nous la démontrerons par récurrence. En divisant au besoin par $(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\alpha_1}$, on peut supposer $\alpha_1 = 0$; en retranchant la première ligne du déterminant (5) de toutes les autres, on obtient le déterminant d'ordre $n-1$

$$\begin{vmatrix} x_2^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_2} & x_2^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_3} & \ldots & x_2^{\alpha_n} - x_1^{\alpha_n} \\ x_3^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_2} & x_3^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_3} & \ldots & x_3^{\alpha_n} - x_1^{\alpha_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{\alpha_2} - x_1^{\alpha_2} & x_n^{\alpha_3} - x_1^{\alpha_3} & \ldots & x_n^{\alpha_n} - x_1^{\alpha_n} \end{vmatrix},$$

qui est égal au produit de $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)$ par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1^{\alpha_2-1}+x_1^{\alpha_2-2}x_2+\ldots+x_2^{\alpha_2-1} & x_1^{\alpha_3-1}+\ldots+x_2^{\alpha_3-1} & \ldots & x_1^{\alpha_n-1}+\ldots+x_2^{\alpha_n-1} \\ x_1^{\alpha_2-1}+x_1^{\alpha_2-2}x_3+\ldots+x_3^{\alpha_2-1} & x_1^{\alpha_3-1}+\ldots+x_3^{\alpha_3-1} & \ldots & x_1^{\alpha_n-1}+\ldots+x_3^{\alpha_n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\alpha_2-1}+x_1^{\alpha_2-1}x_n+\ldots+x_n^{\alpha_2-1} & x_1^{\alpha_3-1}+\ldots+x_n^{\alpha_3-1} & \ldots & x_1^{\alpha_n-1}+\ldots+x_n^{\alpha_n-1} \end{vmatrix}.$$

En multipliant la colonne d'ordre k par $x_1^{\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}}$ et en la retranchant de la colonne d'ordre $k+1$ ($k=1, 2, \ldots, n-2$), on voit que ce déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} x_1^{\alpha_2-1}+\ldots+x_2^{\alpha_2-1} & x_1^{\alpha_3-\alpha_2-1}x_2^{\alpha_2}+\ldots+x_2^{\alpha_3-1} & \ldots & x_1^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-1}x_2^{\alpha_{n-1}}+\ldots+x^{\alpha_n-1} \\ x_1^{\alpha_2-1}+\ldots+x_3^{\alpha_2-1} & x_1^{\alpha_3-\alpha_2-1}x_3^{\alpha_2}+\ldots+x_3^{\alpha_3-1} & \ldots & x_1^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-1}x_3^{\alpha_{n-1}}+\ldots+x_3^{\alpha_n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\alpha_2-1}+\ldots+x_n^{\alpha_2-1} & x_1^{\alpha_3-\alpha_2-1}x_n^{\alpha_2}+\ldots+x_n^{\alpha_3-1} & \ldots & x_1^{\alpha_n-\alpha_{n-1}-1}x_n^{\alpha_{n-1}}+\ldots+x_n^{\alpha_n-1} \end{vmatrix}.$$

Or, ce dernier déterminant se décompose en une somme de produits d'une puissance de x_1 par un déterminant du même type que (5), mais d'ordre $n-1$; par hypothèse, chacun de ces déterminants est égal au produit de $V(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ par un polynome à coefficients positifs; comme

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1)V(x_2, x_3, \ldots, x_n) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

on obtient finalement le résultat cherché.

Pour avoir une majoration des coefficients de notre série (autres que le premier terme, indépendant des y_i et des z_i), il nous suffira donc d'y faire tous les y_i et les z_i *égaux à un*.

Pour cela, laissons d'abord fixes les y_i; le déterminant (3) est de la forme

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} f_1(z_1) & f_1(z_2) & \ldots & f_1(z_n) \\ f_2(z_1) & f_2(z_2) & \ldots & f_2(z_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(z_1) & f_n(z_2) & \ldots & f_n(z_n) \end{vmatrix}.$$

Si, dans un tel déterminant, on pose $z_1=1$, $z_2=1+h$, $z_3=1+2h$, $\ldots$, $z_n=1+(n-1)h$, qu'on développe chaque fonction suivant la formule de Taylor et qu'on fasse tendre h vers zéro, on voit qu'après mise en facteur d'une puissance de h, qui n'est autre que le déterminant de Vandermonde des z_i, il reste, à un facteur constant près, le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1(1) & f'_1(1) & \dots & f_1^{(n-1)}(1) \\ f_2(1) & f'_2(1) & \dots & f_2^{(n-1)}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(1) & f'_n(1) & \dots & f_n^{(n-1)}(1) \end{vmatrix},$$

ce qui donne, dans le cas actuel, à un facteur constant près,

$$\begin{vmatrix} (1-\rho y_1)^{-m-1} & \rho y_1(1-\rho y_1)^{-m-2} & \dots & \rho^{n-1} y_1^{n-1}(1-\rho y_1)^{-m-n} \\ (1-\rho y_2)^{-m-1} & \rho y_2(1-\rho y_2)^{-m-2} & \dots & \rho^{n-1} y_2^{n-1}(1-\rho y_2)^{-m-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1-\rho y_n)^{-m-1} & \rho y_n(1-\rho y_n)^{-m-2} & \dots & \rho^{n-1} y_n^{n-1}(1-\rho y_n)^{-m-n} \end{vmatrix},$$

ou encore

$$\frac{\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}(y_1 y_2 \dots y_n)^{n-1}}{[(1-\rho y_1)(1-\rho y_2)\dots(1-\rho y_n)]^{m+n}} \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{\rho y_1}-1\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{\rho y_1}-1\right)^{n-2} & \dots & 1 \\ \left(\frac{1}{\rho y_2}-1\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{\rho y_2}-1\right)^{n-2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{1}{\rho y_n}-1\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{\rho y_n}-1\right)^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Mais il est immédiat que le déterminant en facteur n'est autre que le déterminant de Vandermonde des quantités $\frac{1}{\rho y_i} - 1$; en divisant par le déterminant de Vandermonde des y_i et faisant ensuite les y_i égaux à 1, il reste enfin la série de somme

$$\frac{1}{(1-\rho)^{n(m+n)}}.$$

On voit donc que la somme des termes dépendant des y_i et des z_i que nous avons majorée, est certainement inférieure, en valeur absolue, à

$$\frac{1}{(1-\rho)^{n(m+n)}} - 1.$$

L'équation (3), divisée par les déterminants de Vandermonde des y_i et des z_i, ne pourra donc être vérifiée si l'on a

$$\frac{1}{(1-\rho)^{n(m+n)}} - 1 \leqq 1,$$

c'est-à-dire

$$\rho \leqq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n(m+n)}},$$

ce qui donne

(7) $$r_N \leqq \frac{2^{\frac{1}{n(m+n)}}}{2^{\frac{1}{n(m+n)}} - 1}.$$

Lorsque m et n sont grands, le second membre de (7) est équivalent à $\frac{n(m+n)}{\log 2}$. Mais il est vraisemblable que cette expression est très loin de donner l'ordre de grandeur de r_N en fonction de m et n.

On vérifie aisément que, pour $n = 2$, r_N croît indéfiniment, en fonction de m, comme une expression de la forme km (k constante). Mais, au contraire, tous les exemples où, grâce à une répartition simple des points x_i et z_i, on peut calculer des limites inférieures de r_N en fonction de n, m restant fixe, donnent des valeurs *bornées* lorsque n croît indéfiniment. La limitation (7) est donc sans doute très grossière.

On peut étudier de la même manière les systèmes de $2n$ nombres, $x_1, x_2 \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots z_n$, liés par la relation

(8) $$\|(x_i - z_j)^k\| = 0 \qquad (k \text{ entier} \geqq n),$$

divisée par les déterminants de Vandermonde des x_i et des z_i. En posant ici $y_i = -\frac{1}{\rho x_i}$, où $\rho < 1$, on a

(9) $$\|(1 + \rho y_i z_j)^k\| = 0,$$

et l'on peut déterminer ρ de sorte que (9), divisée par les déterminants de Vandermonde des y_i et des z_i, ne puisse être vérifiée pour $|y_i| \leqq 1$ et $|z_i| \leqq 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Le calcul est tout à fait analogue au précédent; on aura certainement un nombre ρ répondant à la question si

$$(1 + \rho)^{n(k-n+1)} \leqq 2,$$

c'est-à-dire si

$$\rho \leqq 2^{\frac{1}{n(k-n+1)}} - 1.$$

Cette limitation est encore très grossière, car pour $k = n$, on sait, d'après le théorème de Grace, que tout cercle contenant les x_i contient aussi un au moins des z_i.

II.

Dans un travail antérieur ([1]), j'ai montré que, lorsque $q = n$, on a $r_1 = 1$, quel que soit m, autrement dit que l'équation (1) a toujours *une* racine au moins dans un cercle contenant *tous* les points z_i. En appliquant une méthode analogue à celle qui nous a conduit à ce résultat, nous allons obtenir une limite supérieure pour r_1, lorsque q est quelconque ($2 \leqq q \leqq n$).

Cette méthode repose sur l'identité suivante ([1]) : en désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_{(m+1)(n-1)}$ les racines de (1), on a, quel que soit k ($1 \leqq k \leqq n$),

$$(10) \quad \frac{1}{z_1 - z_k} + \frac{1}{z_2 - z_k} + \ldots + \frac{1}{z_{k-1} - z_k} + \frac{1}{z_{k+1} - z_k} + \ldots + \frac{1}{z_n - z_k} = \frac{2}{m+1} \sum_{p=1}^{(m+1)(n-1)} \frac{1}{x_p - z_k}.$$

Supposons alors *tous* les x_i à l'extérieur du cercle $|z| \leqq \mathrm{R}$ ($\mathrm{R} > 1$) et les points $z_1, z_2, \ldots, z_q$, dans le cercle $|z| \leqq 1$; on peut évidemment supposer qu'un des z_i, par exemple z_1, est sur la circonférence $|z| = 1$ (sans quoi on ferait une homothétie amenant ceux des points z_i ($1 \leqq i \leqq q$) de plus grand module sur la circonférence $|z| = 1$, ce qui augmenterait le nombre R); par une rotation, on peut en outre supposer que $z_1 = i$. Effectuons, sur les x_i et les z_i, la même substitution homographique

$$y' = i \frac{\mathrm{R}i + y}{\mathrm{R}i - y},$$

et, pour simplifier, appelons encore x_i et z_i les points transformés; l'équation (1) est invariante par cette substitution. Les points x_i [$1 \leqq i \leqq (m+1)(n-1)$] sont alors dans le *demi-plan inférieur* $\mathcal{I}(y) \leqq 0$; les points $z_1, z_2, \ldots, z_q$ sont dans le cercle (γ) ayant pour

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, t. **203**, 1936, p. 767-769.

diamètre le segment joignant les points ia et ib, où $a=\frac{(R+1)}{(R-1)}$, $b=\frac{(R-1)}{(R+1)}$; en outre, on a $z_1=ia$.

Faisons la somme des identités (10), pour $k=1$, et pour les indices k tels que $\mathcal{I}(z_k)>a$; on remarquera qu'il y a au plus $(n-q)$ indices ayant cette dernière propriété. Dans la somme des premiers membres de ces identités, les termes $\frac{1}{(z_k-z_{k'})}$, correspondant à deux des indices considérés, se détruisent; et, en vertu du choix des indices, il reste uniquement des termes dont la partie imaginaire est *positive;* en outre, ceux de ces termes qui sont de la forme $\frac{1}{(z_h-z_1)}$ ont une somme dont la partie imaginaire est au moins égale à $\frac{(q-1)}{(a-b)}$; cette quantité est donc aussi une limite inférieure de la partie imaginaire du premier membre de l'identité obtenue.

D'autre part, pour chacun des indices k considérés, la partie imaginaire de $\frac{1}{(x_p-z_k)}$ est au plus égale à $\frac{1}{a}$, quel que soit p; comme on a additionné au plus $(n-q+1)$ identités (10), il vient donc

$$\frac{q-1}{a-b}\leqq\frac{2}{m+1}\,\frac{(m+1)(n-1)(n-q+1)}{a},$$

d'où

$$\frac{(R+1)^2}{4R}\leqq\frac{2(n-q+1)(n-1)}{q-1},$$

et *a fortiori*

$$R\leqq\frac{8(n-q+1)(n-1)}{q-1}. \tag{11}$$

Le second membre de (11) est donc une limite supérieure de r_1; cette limite n'est d'ailleurs certainement pas la meilleure possible, puisque pour $q=n$, elle est égale à 8, alors que $r_1=1$. Pour $q=2$, elle est de l'ordre de n^2, ce qui est sans doute trop élevé; mais il faut remarquer que la valeur de r_1, dans ce cas, est au moins de l'ordre de n, car le théorème de Grace-Heawood [1] montre que tous les zéros de

[1] *Voir*, par exemple, J. DIEUDONNÉ, *La théorie analytique des polynomes* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 93, p. 46).

la dérivée d'un polynome de degré n qui s'annule aux points ± 1, peuvent être confondus en un point de module $\cot g \frac{\pi}{n}$.

On remarquera que la limite (11) est indépendante de m, et qu'elle reste bornée si n et q croissent indéfiniment, de sorte que $n-q$ soit borné; il est vraisemblable d'ailleurs que, dans ce cas, r_1 tend vers *un*.

III.

Considérons la famille F des fractions rationnelles de degré n de la forme

$$R(x) = \frac{(x-\alpha)^n}{(x^2-1)(x-\beta)^{n-2}},$$

où α et β peuvent prendre des valeurs arbitraires. Nous supposerons d'abord $n > 3$; dans ces conditions, la dérivée de $R(x)$ doit être considérée comme ayant un zéro d'ordre $n-3$ au point β; elle a par ailleurs un zéro d'ordre $n-1$ au point α; enfin, elle a encore deux autres zéros x_1, x_2, qui sont racines de l'équation

$$\frac{n}{x-\alpha} - \frac{n-2}{x-\beta} - \frac{2x}{x^2-1} = 0,$$

c'est-à-dire de

$$x^2[n\alpha-(n-2)\beta] - 2x(1+\alpha\beta) + [n\beta-(n-2)\alpha] = 0. \tag{12}$$

Soit $r(\alpha, \beta)$ le module minimum des quatre nombres x_1, x_2, α, β; nous allons déterminer la *borne supérieure* ρ de $r(\alpha, \beta)$ lorsque α et β varient arbitrairement, n restant fixe. Le nombre ρ est la valeur de $r(\alpha, \beta)$ pour une fraction $R(x)$ de la famille F telle que trois des nombres x_1, x_2, α, β aient *même module* $r(\alpha, \beta)$, le quatrième ayant un module $\geqq r(\alpha, \beta)$; en effet, deux quelconques des quatre nombres x_1, x_2, α, β sont fonctions algébriques des deux autres; s'il y avait au plus deux de ces nombres ayant un module égal à $r(\alpha, \beta)$, les autres ayant un module $> r(\alpha, \beta)$, on pourrait faire varier deux de ces quatre nombres de façon que le module minimum $r(\alpha', \beta')$ correspondant à leurs nouvelles positions soit $> r(\alpha, \beta)$; on aurait donc $r(\alpha, \beta) \neq \rho$.

D'après (12), on a

$$(13)\qquad x_1+x_2=\frac{2(1+z\alpha^2)}{n\alpha(1-az)},$$

$$(14)\qquad x_1x_2=\frac{z-a}{1-az},$$

en posant $z=\frac{\beta}{\alpha}$, $a=\frac{n-2}{n}$.

De (14), on tire que $|x_1x_2|\leqq 1$ si $|z|\leqq 1$; on a donc dans ce cas $r(\alpha,\beta)\leqq 1$; or, nous allons voir qu'on peut avoir $r(\alpha,\beta)>1$. Il en résulte que, pour la recherche de ρ, on peut se borner aux fractions $R(x)$ de la famille F telles que $|x_1|=|x_2|=|\alpha|=r$, et $|z|>1$.

On déduit alors de (13) et (14) que

$$(15)\qquad r^2=\left|\frac{z-a}{1-az}\right|>1.$$

Posons $u=\alpha^2$, $t=\frac{z-a}{1-az}$; on a $|t|=|u|=r^2$, et

$$(16)\qquad x_1x_2=t,$$

$$(17)\qquad x_1+x_2=\frac{n}{2(n-1)}\,\frac{tu+a(t+u)+1}{\alpha},$$

ou encore, comme on peut écrire $t=xe^{i\omega}$, $u=xe^{-i\omega}$, avec $|x|=r^2$,

$$(18)\qquad x_1x_2=\alpha^2e^{2i\omega},$$

$$(19)\qquad x_1+x_2=\frac{n}{n-1}\,\alpha\,e^{i\omega}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a\cos\omega\right].$$

La comparaison de ces deux équations, compte tenu du fait que $|x_1|=|x_2|=|\alpha|=r$, montre que l'expression $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a\cos\omega$ doit être *réelle*, ce qui entraîne que x est réel; on peut donc prendre $x=r^2$, et l'on a alors la condition

$$\left|\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)+a\cos\omega\right|\leqq\frac{2(n-1)}{n},$$

nécessaire et suffisante pour qu'on ait $|x_1|=|x_2|=|\alpha|=r$; le maximum des valeurs de r pour lesquelles il existe une valeur de ω

satisfaisant à cette condition est évidemment tel que

$$\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)-a=\frac{2(n-1)}{n}.$$

Ce maximum est donc la valeur de ρ, ce qui donne

$$\rho=\sqrt{1-\frac{2}{n}}+\sqrt{2-\frac{2}{n}}. \tag{20}$$

On a exclu les cas $n=2$ et $n=3$. Pour $n=3$, les zéros de la dérivée sont α (double), x_1 et x_2 ; $r(\alpha, \beta)$ est le module minimum de ces trois nombres ; on voit comme ci-dessus que la borne supérieure ρ de $r(\alpha, \beta)$ ne peut être atteinte que si $|x_1|=|x_2|=|\alpha|=r(\alpha, \beta)$ et $|z|>1$; la fin du raisonnement est alors la même, et donne encore pour ρ la valeur (20), c'est-à-dire ici $\sqrt{3}$.

Pour $n=2$, les deux zéros de la dérivée de $R(x)$ sont α et $\frac{1}{\alpha}$, donc $\rho=1$, ce qui est encore conforme à la formule (20).

On observera que la valeur de ρ croît avec n, et tend vers $1+\sqrt{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.