JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WITOLD POGORZELSKI

Sur une équation intégrale de première espèce

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 18 (1939), p. 97-109.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__97_0>

Sur une équation intégrale de première espèce;

PAR WITOLD POGORZELSKI.

1. INTRODUCTION. — Dans ce travail nous étudierons l'équation intégrale singulière de première espèce de la forme suivante (¹) :

$$\int_0^a [N(x, y) + L_r(x, y)]\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{1}$$

où le noyau est la somme d'une fonction $N(x, y)$ à singularité *polaire* pour $x = y$ et d'une fonction $L_r(x, y)$ à singularité *logarithmique* pour $x = y$; $\varphi(y)$ est une fonction inconnue dans l'intervalle $(0, a)$ et l'intégrale impropre a la valeur principale de *Cauchy*, c'est-à-dire

$$\int_0^a (N + L_r)\varphi\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_0^{x-\varepsilon}(N + L_r)\varphi\,dy + \int_{x+\varepsilon}^a (N + L_r)\varphi\,dy\right],$$

x étant un point intérieur de l'intervalle $(0, a)$.

Précisément, les propriétés des fonctions données $N(x, y)$, $L_r(x, y)$ et $f(x)$ sont définies par les conditions suivantes :

1° $N(x, y)$ est une fonction analytique de deux variables qui par rapport à l'une variable, par exemple y, admet le pôle simple $y = x$, c'est-à-dire une singularité telle que la fonction $\frac{1}{y - x}$.

(¹) L'équation intégrale singulière de cette espèce dans le cas particulier du noyau $\cot g(x - y)$ était étudiée pour la première fois par O. KELLOGG (*Götting. Nachr.*, 1902); *voir* aussi l'ouvrage de D. HILBERT : *Grundzüge einer allg. theorie der Integralgleichungen* (1910). L'équation intégrale avec le noyau à singularité polaire a été étudiée ensuite par H. VILLAT (*Acta mathematica*, t. 40, 1916); G. BERTRAND (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences,* Paris, 1921); G. GIRAUD (*Annales de l'École Normale supérieure,* 1934).

2° $L_r(x, y)$ est *la partie réelle* d'une fonction $L(x, y)$ de la forme

$$L(x, y) = q(x, y) \log M(x, y), \tag{2}$$

où $q(x, y)$ et $M(x, y)$ sont des fonctions holomorphes, si les points x et y sont situés dans une bande (Ω) du plan de la variable complexe, contenant l'axe réel à son intérieur, en outre la fonction $M(x, y)$ s'*annule* pour $x = y$ et possède une valeur principale $x - y$, si $x - y$ tend vers zéro.

3° La fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande (Ω).

4° Les fonctions $N(x, y)$, $q(x, y)$, $M(x, y)$, $f(x)$ sont réelles pour les valeurs réelles des variables x et y.

5° Les fonctions $N(x, y)$, $q(x, y)$, $M(x, y)$, $f(x)$ ont une période réelle a par rapport à la variable x et à la variable y.

6° Les fonctions $N(x, y)$ et $L(x, y)$ n'ont d'autres singularités que la singularité $x = y$, en négligeant les multiples de la période a (x et y étant situés dans la bande Ω).

2. Transformations de certaines intégrales itérées. — Pour la résolution de l'équation intégrale proposée (1), nous citerons certaines transformations des intégrales itérées suivantes :

$$\int_0^a N_1(x, y) \left[\int_0^a N(y, z) \varphi(z) \, dz \right] dy, \tag{3}$$

$$\int_0^a N(x, y) \left[\int_0^a L_r(y, z) \varphi(z) \, dz \right] dy, \tag{4}$$

x et les variables d'intégration étant réelles, $N_1(x, y)$ étant une fonction analytique satisfaisant aux mêmes conditions, précisées précédemment, que la fonction $N(x, y)$, $\varphi(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine qui comprend le segment réel $(0, a)$ et les intégrales impropres ont la valeur principale de *Cauchy*.

L'intégrale de la forme (3) a été étudiée par H. Poincaré à propos d'un problème aux limites concernant l'équation du type elliptique [1]. D'après ces recherches, nous écrivons la transformation suivante de

[1] H. Poincaré, *Mécanique céleste*, t. 3 (*Théorie des Marées*), 1910; *et* « *Göttinger Vorträge* » (Teubner, 1909).

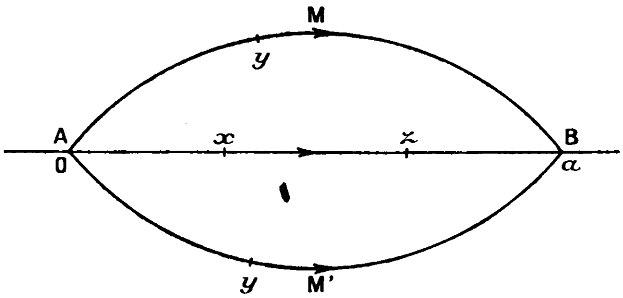
l'intégrale (3)

$$(5) \qquad \int_0^a N_1(x, y) \left[\int_0^a N(y, z)\, \varphi(z)\, dz \right] dy$$
$$= -\pi^2 R(x) R_1(x)\, \varphi(x) + \int_0^a F(x, z)\, \varphi(z)\, dz,$$

x étant un point intérieur d'intervalle (o, x), $R(x)$ et $R_1(x)$ désignant les résidus au pôle $y = x$ des fonctions $N(x, y)$ et $N_1(x, y)$, traitées comme les fonctions d'une variable y, c'est-à-dire

$$(6) \qquad \begin{cases} R(x) = \lim\limits_{y \to x} (y - x)\, N(x, y), \\ R_1(x) = \lim\limits_{y \to x} (y - x)\, N_1(x, y); \end{cases}$$

$F(x, z)$ est une fonction exprimée par la somme suivante des intégrales le long des arcs AMB et AM'B (*fig.*) du plan de variable



complexe, embrassant le segment d'axe réel AB (l'intervalle d'intégration o, a)

$$(7) \quad F(x, z) = \frac{1}{2} \int_{AMB} N_1(x, y)\, N(y, z)\, dy + \frac{1}{2} \int_{AM'B} N_1(x, y)\, N(y, z)\, dy.$$

Nous voyons, d'après l'expression (7), que la fonction $F(x, z)$ est holomorphe si les points x et z sont situés dans le domaine limité par les arcs AMB et AM'B. Dans la relation (5) les variables x, y, z ont les valeurs *réelles* comprises dans l'intervalle (o, a), et dans ce cas la fonction (7) prend les valeurs réelles égales aux valeurs principales de

Cauchy de l'intégrale

$$(7') \qquad F(x, z) = \int_0^a N_1(x, y) N(y, z)\, dy \qquad (x \neq z).$$

La fonction $F(x, z)$, d'après l'expression (7), *reste bornée même si la différence $x - z$ tend vers zéro*, ce qui est une propriété essentielle dans nos études. En outre, d'après la remarque de H. Poincaré, la fonction $F(x, z)$ reste aussi bornée lorsque x et z tendent vers la même extrémité d'intervalle d'intégration AB. En effet, les fonctions $N(x, y)$ et $N_1(y, z)$ étant périodiques de période x, la valeur de l'intégrale (7') ne change pas, lorsque l'on déplace le segment d'intégration AB sur l'axe réel, en conservant sa longueur. Cette propriété est aussi évidente en considérant la somme des intégrales

$$(8) \quad F(x, z) = \frac{1}{4}\int_{A_1M_1B_1} N_1(x, y) N(y, z)\, dy + \frac{1}{4}\int_{A_1M'_1B_1} N_1(x, y) N(y, z)\, dy$$

le long des arcs $A_1M_1B_1$ et $A_1M'_1B_1$ qui embrassent le segment d'axe réel $A_1B_1 = 2a$, contenant à son intérieur l'intervalle d'intégration AB; la fonction (8) est notamment holomorphe dans le domaine qui contient le segment AB à son intérieur et pour deux points arbitraires x et z du segment AB prend les mêmes valeurs que l'intégrale (7').

Nous ajoutons que la transformation (5) de H. Poincaré était généralisée par G. Bertrand (*loc. cit.*) pour les intégrales le long des courbes fermées dans le plan de la variable complexe.

Passons maintenant à l'intégrale itérée (4), contenant la fonction à singularité polaire et la fonction à singularité logarithmique. Nous avons transformé l'intégrale de cette espèce dans un ouvrage (1) consacré à la résolution complète du problème aux limites de H. Poincaré. D'après ce travail, nous écrirons la transformation suivante :

$$(9) \qquad \int_0^a N(x, y)\left[\int_0^a L_r(y, z)\,\varphi(z)\, dz\right] dy$$
$$= \int_0^a F_1(x, z)\,\varphi(z)\, dz - \pi^2 \int_x^a R(x)\, q(x, z)\,\varphi(z)\, dz,$$

(1) W. Pogorzelski, *Problème aux limites de H. Poincaré* (*Annales de l'Académie des Sciences techniques à Varsovie*, t. 1, 1935, Paris, Dunod).

où $q(x, z)$ est définie par la supposition (2), x est une valeur réelle à l'intérieur de l'intervalle $(0, a)$ et $F_1(x, z)$ est une fonction exprimée par la somme des intégrales (*fig.*).

$$(10)\quad F_1(x, z) = \frac{1}{2}\int_{AMB} N(x, y)\,L(y, z)\,dy + \frac{1}{2}\int_{AM'B} N(x, y)\,L(y; z)\,dy.$$

La fonction $F_1(x, z)$ est donc holomorphe si les points x et z sont situés à l'intérieur du domaine limité par les arcs AMB et AM'B. Pour les valeurs réelles des variables x, z dans l'intervalle $(0, a)$, la fonction (10) prend les mêmes valeurs réelles que l'intégrale impropre suivante le long du segment $(0, a)$

$$(11)\qquad F_1(x, z) = \int_0^a N(x, y)\,L_r(y, z)\,dy \qquad (x \neq z),$$

à la condition que la branche de la fonction multiforme $L(y, z)$, dans l'intégrale (10), tende vers la valeur réelle, si les points x et y tendent vers les points z_0 et y_0 du segment AB tels que $z_0 < y_0$. En outre, de même que la fonction (7), la fonction $F_1(x, z)$ reste bornée si la différence $x - z$ tend vers zéro. Aux extrémités d'intervalle $(0, a)$ s'applique pour la fonction $F_1(x, z)$ la même remarque que pour la fonction $F(x, z)$.

5. Le noyau singulier fermé. — Soit $N(x, y)$ une fonction analytique à singularité polaire pour $x = y$ qui remplit toutes les conditions précisées dans l'Introduction.

Nous appellerons la fonction $N(x, y)$ *le noyau singulier fermé*, si l'équation intégrale

$$(12)\qquad \int_0^a N(x, y)\,h(y)\,dy = 0 \qquad (0 < x < a)$$

n'admet d'autre solution analytique que la solution banale $h = 0$.

Cherchons la condition pour que le noyau singulier $N(x, y)$ soit fermé. Remarquons donc que si la fonction analytique $h(y)$ satisfait à l'équation (12) dans l'intervalle $(0, a)$, elle va satisfaire à l'équation

$$(13)\qquad \int_0^a N(z, x)\left[\int_0^a N(x, y)\,h(y)\,dy\right]dx = 0;$$

par conséquent, d'après la transformation (5) de H. Poincaré, elle satisfera à l'équation intégrale homogène de seconde espèce

$$(14)\qquad -\pi^2 R^2(z)\, h(z) + \int_0^a \left[\int_0^a N(z, x)\, N(x, y)\, dx\right] h(y)\, dy = 0,$$

$R(z)$ désignant le résidu de la fonction $N(z, x)$ par rapport à la variable x au point $x = z$, que nous supposons différent de zéro dans l'intervalle d'intégration $(0, a)$:

$$|R(z)| \neq 0.$$

D'après l'expression (7), le noyau de l'équation intégrale (14) est borné dans l'intervalle d'intégration et prend les mêmes valeurs qu'une fonction holomorphe dans un domaine contenant le segment $(0, a)$. Pour que le noyau singulier $N(x, y)$ soit fermé, *il suffit* donc que le noyau

$$(15)\qquad \frac{1}{R^2(z)} \int_0^a N(z, x)\, N(x, y)\, dx$$

de l'équation intégrale homogène (14) n'admette pas pour *valeur caractéristique* la valeur $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$, puisque alors l'équation (14) et de même l'équation (12) n'admettent que la solution banale $h = 0$.

Cette condition est aussi *nécessaire*. En effet, toute solution $h(y)$ de l'équation (14) est une fonction holomorphe au voisinage du segment $(0, a)$ qui satisfait l'équation (13) et l'équation (12), le noyau étant fermé; donc, si l'équation (12) n'admet d'autre solution analytique que la solution $h = 0$, l'équation (14) n'admet pas d'autre solution non plus.

Citons maintenant quelques exemples. Soit la fonction

$$(16)\qquad N(x, y) = \cot \frac{\pi}{a}(x - y),$$

qui a toutes les propriétés précisées dans l'Introduction.

Le noyau singulier (16) n'est pas fermé, nous avons, en effet,

$$(17)\qquad \int_0^a \cot \frac{\pi}{a}(x - y)\, dy = 0 \qquad (0 < x < a);$$

donc l'équation intégrale

$$\int_0^a \cot\frac{\pi}{a}(x-y)\,h(y)\,dy = 0 \tag{18}$$

est satisfaite si $h(y)$ *est une constante arbitraire*. Nous verrons que le noyau un peu différent

$$N(x, y) = \cot\frac{\pi}{a}(x-y) + \mu \tag{19}$$

sera fermé si μ est une constante différente de zéro. Dans le cas actuel le résidu a la valeur

$$R(z) = \lim_{y \to z}(y-z)\,N(z, y) = -\frac{a}{\pi}, \tag{20}$$

et l'équation (14) prend la forme

$$-a^2 h(z) + \int_0^a \left\{ \int_0^a \left[\cot\frac{\pi}{a}(z-x)+\mu\right]\left[\cot\frac{\pi}{a}(x-y)+\mu\right] dx \right\} h(y)\,dy = 0. \tag{21}$$

Or, d'après la propriété (17) et la transformation

$$\begin{aligned}\cot\frac{\pi}{a}(z-x)\cot\frac{\pi}{a}(x-y) \\ = 1 + \cot\frac{\pi}{a}(z-y)\left[\cot\frac{\pi}{a}(z-x) + \cot\frac{\pi}{a}(x-y)\right],\end{aligned} \tag{22}$$

l'équation (21) devient

$$-a^2 h(z) + \int_0^a a(1+\mu^2)\,h(y)\,dy = 0. \tag{21'}$$

Cette équation n'admet que la solution $h = \text{const.} = h_0$, vérifiant la relation $-a^2 h_0 + a^2(1+\mu^2)h_0 = 0$, donc elle n'admet que la solution $h = 0$, si $\mu \neq 0$. Le noyau singulier (19) est par conséquent fermé si $\mu \neq 0$.

Plus généralement, cherchons la condition pour que le noyau singulier de la forme

$$N(x, y) = A_1(y)\cot\frac{\pi}{a}(x-y) + A_2(x)\,A_3(y) \tag{22}$$

soit fermé; on suppose que $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(y)$ sont des fonctions d'une variable qui satisfont aux mêmes conditions que la fonction $f(x)$ dans l'Introduction. Remarquons donc que toute solution analytique $h(y)$ de l'équation

$$\int_0^a \left[A_1(y)\cot\frac{\pi}{a}(x-y) + A_2(x)A_3(y)\right] h(y)\,dy = 0 \tag{23}$$

remplit de même l'équation

$$\begin{aligned}\int_0^a &\left[\cot\frac{\pi}{a}(z-x)+\mu\right]\\ &\times\left\{\int_0^a \left[A_1(y)\cot\frac{\pi}{a}(x-y)+A_2(x)A_3(y)\right]h(y)\,dy\right\}dx = 0,\end{aligned} \tag{24}$$

et inversement, μ étant une constante différente de zéro. Or, le résidu de la fonction (22) par rapport à la variable y au pôle $y = x$ a la valeur $-\frac{a}{\pi}A_1(x)$, donc, d'après la transformation (5), l'équation (24) est équivalente à l'équation

$$-a^2 A_1(z)\,h(z) + \int_0^a K(z, y)\,h(y)\,dy = 0, \tag{25}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}K(z, y) = \int_0^a &\left[\cot\frac{\pi}{a}(z-x)+\mu\right]\\ &\times\left[A_1(y)\cot\frac{\pi}{a}(x-y)+A_2(x)A_3(y)\right]dx.\end{aligned} \tag{26}$$

Remarque faite de la relation (22) et de la propriété (17), nous amènerons le noyau (26) à la forme

$$K(z, y) = A_1(y)a + A_3(y)\overline{A_2}(z), \tag{26'}$$

où l'on a posé

$$\overline{A_2}(z) = \int_0^a \cot\frac{\pi}{a}(z-x)\,A_2(x)\,dx + \mu\int_0^a A_2(x)\,dx. \tag{27}$$

L'équation intégrale (25) aura donc la forme simple

$$-a^2 A_1(z)\,h(z) + \int_0^a \left[A_1(y)a + A_3(y)\overline{A_2}(z)\right]h(y)\,dy = 0. \tag{28}$$

En supposant que la fonction donnée $A_1(z)$ est différente de zéro dans l'intervalle d'intégration, nous en concluons que l'équation (28) n'admet que la solution de la forme

$$h(z) = \frac{M + N\overline{A_2}(z)}{A_1(z)}, \tag{29}$$

M et N étant certaines constantes. En substituant l'expression (29) dans l'équation (28) on aura une identité

$$-a^2 M - a^2 N\overline{A_2}(z) + \int_0^a [A_1(y)a + A_3(y)\overline{A_2}(z)] \frac{M + N\overline{A_2}(y)}{A_1(y)} dy = 0,$$

d'où nous concluons que les constantes M et N ne peuvent que s'annuler, si les fonctions données $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$ vérifient la condition

$$\int_0^a \overline{A_2}(y)\, dy \int_0^a \frac{A_3(y)}{A_1(y)} dy \neq 0,$$

ou bien la condition

$$\int_0^a A_2(y)\, dy \int_0^a \frac{A_3(y)}{A_1(y)} dy \neq 0, \tag{30}$$

puisque, d'après la formule (27), nous avons

$$\int_0^a \overline{A_2}(z)\, dz = \mu a \int_0^a A_2(x)\, dx \qquad (\mu \neq 0).$$

Si la condition (30) n'est pas vérifiée, l'une au moins des constantes M et N pourrait être différente de zéro et l'équation (28) admet une solution non nulle de la forme (29). En somme, pour que le noyau

$$N(x, y) = A_1(y) \cot \frac{\pi}{a}(x - y) + A_2(x) A_3(y)$$

soit fermé, il faut et il suffit que les fonctions $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$ précisées précédemment vérifient la condition

$$\int_0^a A_2(x)\, dx \int_0^a \frac{A_3(x)}{A_1(x)} dx \neq 0.$$

4. Résolution du problème proposé. — Nous allons résoudre mainte-

nant l'équation intégrale proposée

$$(31)\qquad \int_0^a [N(x, y) + L_r(x, y)]\varphi(y)\,dy = f(x).$$

La fonction $\varphi(y)$ étant holomorphe au voisinage du segment (o, a), l'intégrale (31) est égale à la moitié de la somme des deux intégrales le long des arcs qui joignent les extrémités du segment réel (o, a) et embrassent ce segment [1]; donc, s'il existe une fonction φ holomorphe au voisinage du segment (o, a) qui satisfait sur ce segment à l'équation proposée (31), elle satisfera à l'équation

$$(32)\qquad \int_0^a N_1(x, y)\left\{\int_0^a [N(y, z) + L_r(y, z)]\varphi(z)\,dz - f(y)\right\}dy = 0,$$

où $N_1(z, x)$ est un noyau singulier arbitraire mais *fermé*. On pourra, par exemple, prendre le noyau de la forme (19) ou de la forme plus générale (22), remplissant la condition (30). D'après les transformations (5) et (9), l'équation (32) est équivalente à l'équation

$$(33)\qquad -\pi^2 R(x)R_1(x)\varphi(x) - \pi^2\int_x^a R_1(x)q(x, z)\varphi(z)\,dz + \int_0^a [F(x, z) + F_1(x, z)]\varphi(z)\,dz = \int_0^a N_1(x, z)f(z)\,dz$$

ou à l'équation

$$(34)\qquad \varphi(x) = -\int_x^a \frac{q(x, z)}{R(x)}\varphi(z)\,dz + \lambda\int_0^a \frac{F(x, z) + F_1(x, z)}{R(x)R_1(x)}\varphi(z)\,dz + f_1(x);$$

où l'on a posé

$$f_1(x) = -\frac{1}{\pi^2 R(x)R_1(x)}\int_0^a N_1(x, z)f(z)\,dz; \qquad \lambda = \frac{1}{\pi^2};$$

et où les fonctions holomorphes $F(x, z)$ et $F_1(x, z)$ sont données par les expressions (7) et (10); on suppose que les résidus $R(x)$ et $R_1(x)$ sont différents de zéro dans le domaine qui contient le segment (o, a).

Réciproquement, la solution holomorphe de l'équation (34) satis-

---

[1] *Voir* l'article cité de l'auteur.

fera à l'équation (32), donc à l'équation proposée (31), le noyau auxiliaire $N_1(x, y)$ étant supposé fermé. Nous avons donc ramené notre problème à la recherche de la solution de l'équation (34), qui est du type mixte, puisqu'elle contient une intégrale à limites variables et une intégrale à limites fixes.

On pourra amener l'équation (34) à l'équation de Fredholm, en remarquant que l'équation de Volterra

$$\varphi(x) = -\int_x^a \frac{q(x, z)}{R(x)} \varphi(z)\, dz + \bar{f}(x)$$

a une solution et une seule de la forme

$$\varphi(x) = \int_x^a \Gamma(x, y) \bar{f}(y)\, dy + \bar{f}(x), \tag{35}$$

où le noyau résolvant Γ est la somme d'une série absolument convergente

$$\Gamma(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x, y), \tag{36}$$

dont les termes sont les fonctions holomorphes au voisinage du segment (o, a) données par une relation de récurrence

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_n(x, y) &= \int_y^x \Phi_1(x, z)\, \Phi_{n-1}(z, y)\, dz, \\ \Phi_1(x, z) &= -\frac{q(x, z)}{R(x)}. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Nous en concluons que toute solution de l'équation (34) satisfera à l'équation de Fredholm

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^a K(x, z)\, \varphi(z)\, dz + \bar{f}_1(x), \tag{38}$$

où $K(x, z)$ et $\bar{f}_1(x)$ sont des fonctions holomorphes au voisinage du segment (o, a), données par les expressions

$$\left\{\begin{aligned} K(x, z) &= \int_x^a \frac{F(y, z) + F_1(y, z)}{R(y)\, R_1(y)} \Gamma(x, y)\, dy + \frac{F(x, z) + F_1(x, z)}{R(x)\, R_1(x)}, \\ \bar{f}_1(x) &= -\int_x^a \frac{\Gamma(x, y)}{\pi^2 R(y)\, R_1(y)} f_1(y)\, dy + f_1(x). \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Si la constante $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$ n'est pas une valeur propre du noyau $K(x, z)$, il existe une solution et une seule de l'équation (38) sous la forme

$$(40) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^a \mathfrak{N}(x, z) \overline{f}_1(z)\, dz + \overline{f}_1(x),$$

$\mathfrak{N}(x, z)$ étant le noyau résolvant du noyau $K(x, z)$. Or, le noyau $K(x, z)$ étant holomorphe au voisinage du segment $(0, a)$, son noyau résolvant est aussi holomorphe dans ce domaine, donc la solution (40) est holomorphe et, par conséquent, elle est la solution unique des équations (34), (33), (32) et de l'équation proposée (31), le noyau auxiliaire $N_1(x, y)$ étant fermé.

Considérons encore l'équation intégrale proposée sous la forme particulière

$$(41) \qquad \int_0^a N(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x).$$

Si le noyau $N(x, y)$ est fermé, alors, d'après les études précédentes, la solution holomorphe de l'équation (41) satisfait à l'équation

$$(42) \qquad \int_0^a N(x, y) \left[\int_0^a N(y, z)\, \varphi(z)\, dz - f(y) \right] dy = 0,$$

et inversement. Mais l'équation (42) est équivalente à l'équation de Fredholm

$$(43) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^a \frac{F(x, z)}{R^2(x)} \varphi(z)\, dz - \frac{1}{\pi^2 R^2(x)} \int_0^a N(x, z) f(z)\, dz,$$

où $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$, $R(x)$ est supposé différent de zéro, $F(x, z)$ est une fonction holomorphe qui, pour les valeurs réelles des variables dans l'intervalle $(0, a)$, prend les mêmes valeurs que l'intégrale impropre de Cauchy

$$\int_0^a N(x, y)\, N(y, z)\, dy,$$

et qui est représentée par la formule (7), en posant $N_1(x, y) = N(x, y)$. Or, le noyau $N(x, y)$ étant supposé fermé, la valeur $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$ n'est pas une valeur propre du noyau de l'équation (43), d'après l'article précédent, donc l'équation (43) a la solution unique donnée par la formule bien connue de Fredholm et cette solution sera aussi la solution unique de l'équation (41).

Si le noyau $N(x, y)$ n'est pas fermé, on transforme l'équation (41) en utilisant un noyau auxiliaire fermé $N_1(x, y)$ et l'on arrive à l'équation transformée (34) sous la forme

$$(44) \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^a \frac{F(x, z)}{R(x) R_1(x)} \varphi(z)\, dz - \frac{1}{\pi^2 R(x) R_1(x)} \int_0^a N_1(x, z) f(z)\, dz.$$

La valeur $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$ étant maintenant une valeur propre du noyau, l'équation (44) n'admet des solutions que si la fonction

$$\frac{1}{\pi^2 R(x) R_1(x)} \int_0^a N_1(x, z) f(z)\, dz$$

remplit les conditions connues d'orthogonalité aux solutions de l'équation associée

$$\psi(x) = \lambda \int_0^a \frac{F(z, x)}{R(z) R_1(z)} \psi(z)\, dz.$$

Ces conditions étant remplies, l'équation (44) admet des solutions holomorphes qui satisferont à l'équation proposée (41).

(Varsovie, novembre 1936.)