JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAÏUS JACOB

Sur le problème de Dirichlet dans un domaine plan multiplement connexe et ses applications à l'hydrodynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 18 (1939), p. 363-383.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__363_0>

Sur le problème de Dirichlet dans un domaine plan multiplement connexe et ses applications à l'Hydrodynamique;

PAR CAÏUS JACOB,

Cluj (Roumanie).

L'étude de l'écoulement plan d'un liquide parfait dans un domaine multiplement connexe, en l'absence des forces extérieures, a fait dernièrement l'objet d'un assez grand nombre de travaux. Nous nous contenterons d'indiquer ici les recherches de MM. H. Villat (1), D. Riabouchinsky (2), B. Demtchenko (3), M. Lagally (4), C. Ferrari (5), G. Schmitz (6), dans le cas des domaines doublement connexes, pour certaines configurations particulières. Ensuite, M. P. Koebe (7) a donné un théorème d'existence et d'unicité de l'écoulement d'un liquide autour d'obstacles quelconques, avec une vitesse de translation donnée à l'infini, le potentiel de l'écoulement ayant en outre des circulations imposées autour de ces obstacles.

La différence avec le cas des domaines simplement connexes réside dans la présence des circulations autour de chaque obstacle ainsi que dans l'impossibilité, en général, de transformer conformément le

(1) H. VILLAT, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 38, 1921, p. 214-227.
(2) D. RIABOUCHINSKY, *Thèses* (Paris), 1922, p. 111-130.
(3) B. DEMTCHENKO, *Thèses* (Paris), 1928.
(4) M. LAGALLY, *Zeitschrift für angew. Math. Mech.*, t. 9, 1929, p. 299-305.
(5) C. FERRARI, *Memorie R. Accad. delle Scienze Torino*, 2e série, t. LXVII, n° 2.
(6) G. SCHMITZ, *Annalen der Physik*, t. 23, 1934-35, p. 37-66.
(7) P. KOEBE, *Berichte Verh. sächs. Akad. Leipzig*, 87, 1935, p. 287-318.

domaine envisagé en un autre donné à l'avance; aussi croyons-nous qu'il ne sera pas inutile d'indiquer comment on peut former directement la solution pour un domaine donné afin de satisfaire aux conditions concernant les circulations.

Les résultats que nous donnons se rattachent à ceux obtenus auparavant sur le calcul des périodes de la conjuguée harmonique de la solution du problème de Dirichtet pour un tel domaine [8]; nous les rétablissons ici d'une façon plus simple et indépendamment de la théorie des équations intégrales. Ils nous permettent aussi de retrouver, dans des cas particuliers, d'une façon naturelle, certaines relations qui n'avaient été obtenues, par les auteurs cités, que par des calculs assez longs.

Enfin, dans le deuxième chapitre de ce travail, nous étendons les résultats concernant le problème de Dirichlet à un problème mixte que nous avons déjà considéré dans notre Thèse [9]. Ce problème, qui généralise celui résolu par M. H. Villat [10] pour l'anneau circulaire, se rapporte à la détermination d'une fonction analytique en chaque point d'un domaine multiplement connexe par la connaissance de sa partie réelle sur certaines frontières et de sa partie imaginaire sur les autres frontières du domaine.

CHAPITRE I.

I. — Remarques sur le problème de Dirichlet.

1. Nous considérons, dans le plan $z = x + iy$, un domaine (Ω) situé tout entier à distance finie, qui soit limité à l'extérieur par une courbe fermée simple (C_0) et à l'intérieur par p courbes fermées simples (C_j) $(j = 1, 2, \ldots, p)$. Ces courbes sont supposées à tangentes et à courbures continues, sauf peut-être pour un nombre

(8) C. Jacob, *C. R. Acad. Sc.*, t. **205**, 1937, p. 1201.
(9) C. Jacob, *Thèses* (Paris), 1935; *Mathematica*, t. XI, p. 58-175.
(10) H. Villat, *Acta mathematica*, t. **40**, 1916, p. 101-178.

fini de points ([11]). On pourrait d'ailleurs toujours se ramener par des représentations conformes de domaines simplement connexes, convenablement choisies, au cas où les frontières sont des courbes analytiques. Nous désignerons par (C) la frontière totale de (Ω).

Dans ces conditions, on sait que la fonction harmonique régulière du point M, dans (Ω), qui prend sur (C) la suite de valeurs continues $\Phi(Q)$, est donnée par la formule ([12])

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \Phi(Q)\frac{dG(Q, M)}{dn_Q}\,ds_Q, \tag{1}$$

en désignant par G(M, P) la fonction de Green du domaine (Ω). Nous désignerons par H(M, P) la conjuguée harmonique de G(M, P) par rapport au point M.

Le premier problème que nous allons aborder est celui de la formation de la fonction de courant $g(M, P)$ de l'écoulement d'un liquide remplissant le domaine (Ω), en présence d'un tourbillon au point P, les (C_j) étant considérés comme des parois rigides. La fonction $g(M, P)$ devra satisfaire aux conditions suivantes :

a. C'est une fonction harmonique du point M, régulière dans (Ω) sauf au point P, et qui est continue sur la frontière.

b. $g(M, P)$ est égale à zéro pour M situé sur (C_0), elle prend des valeurs constantes lorsque M se trouve sur l'une des frontières intérieures du domaine. De plus, elle se comporte comme $\log\frac{1}{r_{MP}}$ au voisinage du point P, r_{MP} désignant la longueur du segment $\overline{MP}$.

c. La fonction ([13]) $h(M, P)$, conjuguée harmonique de $g(M, P)$, par rapport au point M, doit avoir des périodes imposées $-\omega_j$ relativement à des chemins fermés simples entourant les frontières (C_j) et ne contenant pas le point P à leur intérieur. On suppose que ces chemins sont parcourus dans le sens qui laisse à gauche leur intérieur.

([11]) D'une façon plus générale, il nous suffirait de supposer que la frontière soit telle que la formule (1) donne la solution du problème de Dirichlet pour le domaine (Ω).

([12]) Les dérivées normales seront toujours prises vers l'intérieur de (Ω).

([13]) $-h(M, P)$ est le potentiel des vitesses et ω_j la « circulation » correspondant au contour (C_j).

Il est clair que les données précédentes seraient surabondantes si les valeurs constantes prises par $g(M, P)$ sur les contours intérieurs étaient données à l'avance; aussi devra-t-on les considérer comme des inconnues.

La solution de ce problème est aisée. Supposons d'abord que la fonction $h(M, P)$ doive être uniforme autour des (C_j), c'est-à-dire que tous les ω_j soient nuls. Nous poserons

$$g(M, P) = G(M, P) - U(M, P). \tag{2}$$

La fonction $U(M, P)$ ainsi introduite sera harmonique par rapport au point M, régulière dans (Ω), et elle devra prendre aux contours des valeurs opposées à celles de $g(M, P)$. Les constantes cycliques de sa conjuguée harmonique devront en outre être égales à celles de $H(M, P)$ pour que $h(M, P)$ soit uniforme. Or, il est facile de trouver la période Ω_j de $H(M, P)$ relative au contour (C_j). On a

$$\Omega_j = \int_{(C_j)} \frac{dG(Q, P)}{dn_Q} ds_Q,$$

et si l'on compare cette expression à la formule (1), il vient

$$\Omega_j = 2\pi u_j(P) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

en désignant par $u_j(M)$ la fonction harmonique, régulière dans (Ω), qui est nulle sur $(C - C_j)$ et égale à l'unité sur (C_j) $(j = 1, 2, \ldots, p)$.

On a ainsi, en passant, le résultat suivant, qui sera généralisé au Chapitre II : *La conjuguée harmonique* $H(M, P)$ *de la fonction de Green, par rapport au point* M, *admet comme période autour de* (C_j) *la valeur au point* P *de la fonction harmonique qui est égale à* 2π *sur* (C_j), *à zéro sur* $(C - C_j)$ *et qui est partout régulière dans* (Ω) (14).

Introduisons encore les fonctions $U_j(M)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ qui sont harmoniques et régulières dans (Ω), nulles sur (C_0) et constantes sur

(14) Pour une autre démonstration (plus compliquée) de ce fait, voir par exemple G. Julia, *Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes*, Paris, 1934, p. 61.

les autres contours et telles en outre que les périodes cycliques de la conjuguée de $U_j(M)$ soient nulles pour toutes les frontières intérieures à l'exception de (C_j); la période correspondante devra être égale à 2π. Ces fonctions s'obtiennent par des combinaisons linéaires des $u_j(M)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ et, comme celles-ci, sont linéairement indépendantes.

Dès lors, on peut poser

$$U(M, P) = \sum_{j=1}^{p} U_j(M)\, u_j(P). \tag{3}$$

On vérifie en effet que cette fonction vérifie toutes les conditions aux contours ainsi que celles concernant les périodes. La solution de notre problème sera donc donnée par (2); elle est d'ailleurs unique, comme on le constate tout de suite. Si maintenant on impose à la solution d'avoir des circulations ω_j, il faudra ajouter à l'expression déjà trouvée de la fonction de courant le terme $-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{p}\omega_j U_j(M)$. La fonction conjuguée $h(M, P)$ s'en déduira aussitôt.

2. Le terme qu'on vient de retrancher, dans la formule (2), à la fonction de Green, jouit encore de la propriété de symétrie

$$U(M, P) = U(P, M). \tag{4}$$

Nous établirons ceci en montrant que les deux membres de (4), considérés comme fonction du point M, sont harmoniques, nuls sur (C_0), constants sur les contours (C_j) et leurs conjuguées possèdent les mêmes constantes cycliques. Leur identité en résultera en vertu d'un lemne connu ([15]). Remarquons à cet effet que la conjuguée harmonique de $U(M, P)$, par rapport à M, admet la période $2\pi u_j(P)$ autour de (C_j), tandis que celle de $U(P, M)$ admet la période $\sum_{k=1}^{p}\omega_k^{(j)} U_k(P)$ autour du même contour, en désignant par $\omega_k^{(j)}$ la période de la conju-

([15]) Voir par exemple G. Julia, *loc. cit.* ([14]), p. 48. Ce lemne résulterait de la formule de Green qui est ici applicable.

guée de $u_k(M)$ autour de (C_j). Tout revient donc à prouver l'égalité

$$(5) \qquad 2\pi u_j(P) = \sum_{k=1}^{p} \omega_k^{(j)} U_k(P).$$

Or, si l'on applique la formule de Green aux deux fonctions $u_j(M)$ et $u_k(M)$, on trouve $\omega_k^{(j)} = \omega_j^{(k)}$, de sorte que (5) s'écrit encore

$$(5') \qquad 2\pi u_j(P) = \sum_{k=1}^{p} \omega_j^{(k)} U_k(P);$$

sous cette dernière forme, on vérifie que l'égalité a lieu puisque ses deux membres sont des fonctions harmoniques régulières dans (Ω), nulles sur (C_0), constantes sur les autres frontières, autour desquelles leurs conjuguées ont des périodes identiques. La différence de deux telles fonctions, devant en général être constante, est ici identiquement nulle. La propriété de symétrie de $U(M, P)$ est finalement établie et celle de $g(M, P)$ en résulte.

Le terme additif $U(M, P)$ qui intervient dans l'expression de la fonction de courant peut être interprété comme provenant d'une distribution tourbillonnaire, d'intensité égale à $\frac{dU(P, Q)}{dn_Q} ds_Q$, qui soit répartie sur le contour. On a, en effet,

$$U(M, P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \frac{dU(Q, P)}{dn_Q} \log r_{QM} \, ds_Q,$$

d'après la formule même de Green.

3. De l'étude du cas particulier qui précède, on obtient immédiatement la solution du problème plus général suivant :

Déterminer la fonction harmonique $U(M)$, *régulière dans le domaine* (Ω), *prenant, à des constantes près, les valeurs* $\Phi(Q)$ *sur les frontières, et telle que sa conjuguée harmonique* $V(M)$ *soit uniforme dans* (Ω). *De plus, la constante additive relative à la frontière* (C_0) *est assujettie à être égale à zéro.*

Il est clair que, dans ces conditions, la solution du problème est unique. On l'obtient tout de suite si l'on remplace dans (1) la fonction $G(M, P)$ par sa valeur tirée de (2). On a, en tenant compte de la symétrie de $g(M, P)$,

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \Phi(Q)\frac{dg(M, Q)}{dn_Q}\, ds_Q + \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \Phi(Q)\frac{dU(M, Q)}{dn_Q}\, ds_Q.$$

La solution $u(M)$ du problème de Dirichlet pour les données $\Phi(Q)$ est ainsi décomposée en deux termes; le premier admet manifestement une conjuguée uniforme, quant au deuxième, qui s'écrit encore

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{p} U_j(M)\int_{(C)} \Phi(Q)\frac{du_j(Q)}{dn_Q}\, ds_Q,$$

il représente une fonction harmonique régulière dans (Ω), qui est nulle sur (C_0), et prend des valeurs constantes sur les (C_k). Sa conjuguée est en général multiforme et ses périodes sont données par

$$\omega_j = \int_{(C)} \Phi(Q)\frac{du_j(Q)}{dn_Q}\, ds_Q. \tag{6}$$

Par conséquent, la fonction

$$U(M) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \Phi(Q)\frac{dg(M, Q)}{dn_Q}\, ds_Q \tag{7}$$

est la solution de notre problème [16]. Chemin faisant nous avons aussi trouvé les périodes ω_j de la conjuguée d'une fonction harmonique qui prend des valeurs données aux contours [17]. Remarquons encore que les valeurs prises par $U(M)$ sur le contour (C_k) sont données par

$$\Phi(Q) - \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{p} C_j^{(k)}\omega_j,$$

$C_j^{(k)}$ étant la valeur constante que prend $U_j(M)$ sur (C_k).

---

[16] M. J. Plemelj a résolu le même problème d'uniformité par la méthode des équations intégrales, sans toutefois obtenir la solution d'une façon aussi simple (Cf. *Monatshefte für Math. und Physik*, t. **18**, 1907, p. 187.)

[17] Dans le travail déjà cité [8], nous avons obtenu le résultat par la voie des équations intégrales. Faisons encore remarquer que si la fonction $u(M)$ admet sur la frontière une dérivée normale bornée et intégrable, (6) est une conséquence de la formule de Green.

Enfin si l'on ajoutait à U(M) un terme de la forme $\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{p}\Omega_j U_j(M)$, on obtiendrait une fonction harmonique prenant, à des constantes près, des valeurs données sur les frontières et dont la conjuguée aurait des périodicités Ω_j.

II. — Applications a l'Hydrodynamique.

1. Nous avons déjà indiqué au paragraphe I comment on forme l'expression de la fonction de courant d'un écoulement liquide dans le domaine (Ω), à un certain instant, en présence d'un tourbillon au point P_0. Si l'intensité du tourbillon est égale à Γ, on aura

$$\Psi_1(M, P_0) = \frac{\Gamma}{2\pi} g(M, P_0) - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{p}\omega_j U_j(M), \tag{8}$$

les ω_j étant les circulations autour des contours (C_j).

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un écoulement liquide dans le même domaine, en présence d'un doublet [18] (double-source) au point P_0. Le potentiel complexe $f_2(z_M) = \varphi_2(M, P_0) + i\Psi_2(M, P_0)$ devra se comporter au point $z = z_{P_0}$ comme

$$\frac{\alpha + i\beta}{z_M - z_{P_0}} + \text{partie régulière,}$$

α et β étant des constantes réelles données, et être régulier partout ailleurs. La fonction de courant $\Psi_2(M, P_0)$, nulle sur (C_0), devra prendre des valeurs constantes (inconnues) sur les (C_j); nous supposerons en outre que les circulations correspondant à ces contours soient nulles.

Pour avoir la solution de ce problème, nous chercherons la fonction harmonique $u(M, P)$, régulière dans (Ω), qui prenne sur les frontières, à des constantes près, les mêmes valeurs que

$$\mathcal{I}m\left[-\frac{\alpha + i\beta}{z_M - z_P}\right] = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial y_P} - \beta\frac{\partial}{\partial x_P}\right)\log\frac{1}{r_{MP}}$$

---

[18] Pour la définition du doublet, voir par exemple H. Villat, *Mécanique des fluides*, 2e éd., Paris, 1938, p. 30.

et dont la conjuguée soit uniforme. Cette fonction sera donnée par la formule (7). On aura donc

$$u(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi}\left(\alpha \frac{\partial}{\partial y_{\mathrm{P}}} - \beta \frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{P}}}\right) \int_{(\mathrm{C})} \log \frac{1}{r_{\mathrm{QP}}} \frac{dg(\mathrm{Q}, \mathrm{M})}{dn_{\mathrm{Q}}} ds_{\mathrm{Q}};$$

si l'on remarque que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{(\mathrm{C})} \log \frac{1}{r_{\mathrm{QP}}} \frac{dg(\mathrm{Q}, \mathrm{M})}{dn_{\mathrm{Q}}} ds_{\mathrm{Q}} = \log \frac{1}{r_{\mathrm{MP}}} - g(\mathrm{M}, \mathrm{P})$$

d'après la formule (7) elle-même, il vient

$$u(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \left(\beta \frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{P}}} - \alpha \frac{\partial}{\partial y_{\mathrm{P}}}\right) \left\{ g(\mathrm{M}, \mathrm{P}) - \log \frac{1}{r_{\mathrm{MP}}} \right\}.$$

La fonction de courant $\Psi_2(\mathrm{M}, \mathrm{P}_0)$ de l'écoulement cherché s'obtiendra en ajoutant à $u(\mathrm{M}, \mathrm{P}_0)$ la fonction $\mathcal{I}m\left[\frac{\alpha + i\beta}{z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{P}_0}}\right]$; on aura donc

$$\Psi_2(\mathrm{M}, \mathrm{P}_0) = \left[\beta \frac{\partial g(\mathrm{M}, \mathrm{P})}{\partial x_{\mathrm{P}}} - \alpha \frac{\partial g(\mathrm{M}, \mathrm{P})}{\partial y_{\mathrm{P}}}\right]_{\mathrm{P}_0}. \tag{9}$$

Si maintenant on superpose les deux écoulements définis par les formules (8) et (9), on en obtient un troisième qui présente un doublet et un tourbillon au point P_0 et a en outre des circulations données autour des (C_j). La fonction de courant qui lui correspond est donnée par

$$\begin{aligned} \Psi(\mathrm{M}, \mathrm{P}_0) = & \left[\beta \frac{\partial g(\mathrm{M}, \mathrm{P})}{\partial x_{\mathrm{P}}} - \alpha \frac{\partial g(\mathrm{M}, \mathrm{P})}{\partial y_{\mathrm{P}}}\right]_{\mathrm{P}_0} \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi} g(\mathrm{M}, \mathrm{P}_0) - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{p} \omega_j \mathrm{U}_j(\mathrm{M}), \end{aligned} \tag{10}$$

et le potentiel $\varphi(\mathrm{M}, \mathrm{P}_0)$ s'en déduit aussitôt. Les valeurs constantes $\Psi_{\mathrm{K}}(\mathrm{P}_0)$ que prend la fonction de courant sur les contours (C_k) résultent de (10). On a

$$\Psi_k(\mathrm{P}_0) = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{C}_j^{(k)} \left[\alpha \frac{\partial u_j(\mathrm{P})}{\partial y_{\mathrm{P}}} - \beta \frac{\partial u_j(\mathrm{P})}{\partial x_{\mathrm{P}}} - \frac{\Gamma}{2\pi} u_j(\mathrm{P}) - \frac{\omega_j}{2\pi}\right]_{\mathrm{P}_0}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

où la signification des $\mathrm{C}_j^{(k)}$ a déjà été donnée. Les équations précédentes nous donnent ainsi les liaisons entre les *flux* $\Psi_k(P_0)$ à travers des coupures liant (C_0) aux (C_k), et les circulations ω_j. Ces relations peuvent d'ailleurs être inversées puisque le déterminant des $C_j^{(k)}$ est différent de zéro, mais on peut encore obtenir le même résultat en appliquant la formule de Green aux deux fonctions $\Psi(M, P_0)$ et $u_j(M)$ [19]. On obtient ainsi

$$(11)\quad \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p}\Psi_k(P_0)\int_{(C_k)}\frac{du_j}{dn}\,ds$$
$$=\left[\alpha\frac{\partial u_j(P)}{\partial y_P}-\beta\frac{\partial u_j(P)}{\partial x_P}-\frac{\Gamma}{2\pi}u_j(P)\right]_{P_0}-\frac{\omega_j}{2\pi}\qquad (j=1, 2, \ldots, p).$$

2. Les résultats précédents trouvent une application importante à l'étude de l'écoulement d'un liquide dans un domaine (Ω') contenant le point à l'infini à son intérieur, qui soit limité par $p+1$ courbes fermées (C'_j) $(j=0, 1, 2, \ldots, p)$; la vitesse du courant, de composantes u_∞ et v_∞, est donnée à l'infini et de plus le potentiel des vitesses est assujetti à avoir des circulations données autour des (C'_j).

Ce cas se ramène immédiatement à celui que nous venons de traiter en faisant, par exemple, la représentation conforme de l'extérieur de (C'_0) sur l'intérieur d'une courbe (C_0) de façon que le point à l'infini corresponde à un point P_0 du nouveau plan. L'écoulement initial sera alors transformé en un autre, autour de certains contours (C_j) $(j=1, 2, \ldots, p)$, en présence d'un doublet et d'un tourbillon au point P_0.

On peut cependant, sans faire cette transformation, indiquer les formules, correspondant à (11), qui donnent la liaison entre les flux à travers des coupures joignant (C'_0) aux (C'_j) et les circulations Γ_j. Il suffira à cet effet d'appliquer la formule de Green à la fonction de

---

(19) En vertu des hypothèses faites sur les frontières, l'application de la formule de Green est légitime; on pourrait aussi obtenir le résultat en partant des relations

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p}C_j^{(k)}\omega_l^{(k)}=\begin{cases}1 & \text{si}\quad j=l,\\ 0 & \phantom{\text{si}}\quad j\neq l,\end{cases}$$

tirées de (5′).

courant $\psi(M)$ de cet écoulement et à l'une des fonctions $\bar{u}_k(M)$, $(k=1, 2, \ldots, p)$, linéairement distinctes, définies dans (Ω') qui y sont harmoniques régulières, nulles à l'infini et constantes sur les frontières. Soient ψ_j $(j=0, 1, 2, \ldots, p)$ les valeurs constantes que prend la fonction de courant sur les contours; les flux en question seront donnés par $\psi_j - \psi_0$ $(j=1, 2, \ldots, p)$. On sait d'autre part que le potentiel complexe, régulier en chaque point à distance finie de (Ω'), se comporte à l'infini comme

$$f(z) = \varphi + i\psi = (u_\infty - iv_\infty)z + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{p}\Gamma_j \log z + F\left(\frac{1}{z}\right),$$

$F\left(\frac{1}{z}\right)$ étant régulière à l'infini. La formule de Green nous donnera par conséquent

$$\int_{(C')}\left(\bar{u}_k \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\bar{u}_k}{dn}\right)ds + \int_{(R)}\left(\bar{u}_k \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\bar{u}_k}{dn}\right)ds = 0$$

en désignant par (C') la frontière totale de (Ω') et par (R) une circonférence de rayon R suffisamment grand pour contenir (C') à son intérieur, et qu'on fera ensuite tendre vers l'infini. Or puisque, aux grandes distances, $\bar{u}_k(M)$ admet un développement de la forme

$$\bar{u}_k(M) = \frac{u_k^{(1)}(\theta)}{R} + \frac{u_k^{(2)}(\theta)}{R^2} + \ldots,$$

R et θ étant les coordonnées polaires de M, on trouve aisément

$$\int_{(R)}\left(\bar{u}_k \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\bar{u}_k}{dn}\right)ds$$
$$= \int_{(R)}\left[\bar{u}_k \frac{d}{dn}(u_\infty y - v_\infty x) - (u_\infty y - v_\infty x)\frac{d\bar{u}_k}{dn}\right]ds + \ldots,$$

en désignant par .... une expression qui tend vers zéro si R croît indéfiniment. Si l'on applique ensuite la même formule de Green aux deux fonctions $u_\infty y - v_\infty x$ et $u_k(M)$, dans le même domaine, il vient

$$\int_{(C')}(u_\infty y - v_\infty x)\frac{d\bar{u}_k}{dn}ds = \int_{(R)}\left[\bar{u}_k \frac{d}{dn}(u_\infty y - v_\infty x) - (u_\infty y - v_\infty x)\frac{d\bar{u}_k}{dn}\right]ds.$$

Finalement, en tenant compte des conditions que vérifie $\psi(M)$ sur les frontières, et en faisant tendre R vers l'infini, on aura

$$\sum_{j=0}^{p} \psi_j \int_{(C_j)} \frac{d\bar{u}_k}{dn} ds = \int_{(C')} (u_\infty y - v_\infty x) \frac{d\bar{u}_k}{dn} ds - \sum_{j=0}^{p} c_k^{(j)} \Gamma_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

$C_k^{(j)}$ étant les valeurs constantes que prend $\bar{u}_k(M)$ sur les (C_j), $(j = 0, 1, \ldots, p)$. En retranchant du premier membre la quantité

$$\psi_0 \sum_{j=0}^{p} \int_{(C_j)} \frac{d\bar{u}_k}{dn} ds$$

qui est nulle, on obtient les équations

$$(12) \qquad \sum_{j=1}^{p} (\psi_j - \psi_0) \int_{(C_j)} \frac{d\bar{u}_k}{dn} ds = \int_{(C')} (u_\infty y - v_\infty x) \frac{d\bar{u}_k}{dn} ds - \sum_{j=0}^{p} c_k^{(j)} \Gamma_j$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

qui définissent les flux $\psi_j - \psi_0$, le déterminant du système étant différent de zéro en vertu de l'indépendance des $\bar{u}_k(M)$. Dans les applications, pour calculer l'intégrale du deuxième membre de (12), on peut aussi se servir de la relation

$$\int_{(C')} (u_\infty y - v_\infty x) \frac{d\bar{u}_k}{dn} ds = 2 \int_0^{2\pi} (v_\infty \cos\theta - u_\infty \sin\theta) u_k^{(1)}(\theta)\, d\theta.$$

De la même façon on pourrait transposer ici tous les autres résultats obtenus pour un domaine situé entièrement à distance finie.

3. *Exemple.* — Nous allons appliquer les formules précédentes à un cas particulier déjà considéré par MM. H. Villat, D. Riabouchinsky (problème symétrique) et par M. Lagally et G. Schmitz (problème non symétrique), où l'on a affaire au domaine (Ω') limité par deux cercles (C_0) et (C_1) extérieurs l'un à l'autre et de rayons égaux ou non. On peut définir ces deux cercles comme faisant partie d'un faisceau de cercles, en prenant par exemple, $\log\left|\frac{z+z_0}{z-z_0}\right| = \lambda$ $(\lambda > 0)$ pour équation du cercle (C_0) et $\log\left|\frac{z+z_0}{z-z_0}\right| = -\mu$ $(\mu > 0)$ pour le cercle (C_1), avec $z_0 = x_0 + iy_0$. Dans ce cas, le système des fonc-

tions $\bar{u}_k(M)$ se réduit à la seule fonction

$$u = \log\left|\frac{z+z_0}{z-z_0}\right|$$

et l'on a au voisinage de l'infini

$$u = 2\,\frac{x_0\cos\theta + y_0\sin\theta}{R} + \ldots,$$

d'où la valeur de $u^{(1)}(\theta)$. Par suite (12) deviendra

$$2\pi(\psi_1 - \psi_0) = 4\pi(x_0 v_\infty - y_0 u_\infty) - \Gamma_0\lambda + \Gamma_1\mu;$$

nous retrouvons ainsi par une voie directe la relation de MM. Lagally et Schmitz (20).

Si l'on veut expliciter la solution dans ce cas particulier, il n'y a qu'à se ramener par la transformation

$$t = -e^{-\lambda}\,\frac{z+z_0}{z-z_0}$$

à une couronne circulaire de rayons 1 et $q = e^{-(\lambda+\mu)}$, dans le plan t, ou bien encore, en posant

$$Z = -i\log t, \qquad \log(-e^{-\lambda}) = -\lambda + i\pi,$$

à un rectangle $0 \leqq X \leqq 2\omega_1$, $0 \leqq Y \leqq \frac{\omega_3}{i}$, du plan $Z = X + iY$, dont les côtés verticaux ne sont pas considérés comme distincts, avec $\omega_1 = \pi$, $\omega_3 = i(\lambda + \mu)$. Dans cette transformation, le point P_0 d'affixe $Z_{P_0} = \pi + i\lambda$ correspondra au point $t = -e^{-\lambda}$, ou encore à $z = \infty$, le cercle (C_0), parcouru dans le sens laissant à gauche son intérieur, au segment de l'axe réel parcouru dans le sens des X décroissants, et le cercle (C_1), décrit dans le même sens que (C_0), au segment $0 \leqq X \leqq 2\omega_1$, $Y = \frac{\omega_3}{i}$, dans le sens des X croissants. On s'assure ensuite facilement que le potentiel complexe transformé devra se comporter au point Z_{P_0} comme

$$-2iz_0\frac{u_\infty - iv_\infty}{Z - Z_{P_0}} - \frac{\Gamma_0 + \Gamma_1}{2\pi i}\log(Z - Z_{P_0}) + \text{partie régulière},$$

(20) *Loc. cit.* (1) et (6).

de sorte qu'on aura un doublet et un tourbillon en ce point avec $\alpha = 2(u_\infty y_0 - v_\infty x_0)$, $\beta = -2(u_\infty x_0 + v_\infty y_0)$, $\Gamma = -(\Gamma_0 + \Gamma_1)$, $\omega_1 = \Gamma_1$.

Par ailleurs, on connaît l'expression de la fonction de Green pour l'anneau circulaire ou bien pour le rectangle du plan Z qui lui correspond ([21]). On a

$$G(M, P) + iH(M, P) = \log\frac{\sigma(Z_M - \overline{Z}_P)}{\sigma(Z_M - Z_P)} - \frac{2\eta_3 i}{\omega_3} Z_M Y_P \qquad (\overline{Z}_P = X_P - iY_P),$$

la transcendante $\sigma(Z)$ étant construite à partir des périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$; on a posé d'après des notations classiques $\eta_1 = \zeta\omega_1$, $\eta_3 = \zeta\omega_3$. Pour avoir maintenant la fonction $\gamma(M, P) = g(M, P) + ih(M, P)$, il nous faut trouver l'expression de $U(M, P)$ définie par (3). Or, pour le rectangle, on a

$$u_1(M) = \frac{iY_M}{\omega_3}, \qquad U_1(M) = -\frac{\pi Y_M}{\omega_1} \qquad (j = 1),$$

de sorte que

$$U(M, P) = -\frac{\pi i}{\omega_1 \omega_3} Y_M Y_P,$$

en laissant pour l'instant aux demi-périodes ω_1 et ω_3 des valeurs quelconques. Il vient alors

$$\gamma(M, P) = \log\frac{\sigma(Z_M - \overline{Z}_P)}{\sigma(Z_M - Z_P)} - \frac{2\eta_1 i}{\omega_1} Z_M Y_P, \tag{13}$$

en tenant compte de la réaction classique

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{i\pi}{2}.$$

La formule (10) nous donne ensuite (en prenant $\psi_0 = 0$),

$$\psi - i\varphi = \beta[\zeta(Z_M - Z_{P_0}) - \zeta(Z_M - \overline{Z}_{P_0})] - \alpha i\left[\zeta(Z_M - Z_{P_0}) + \zeta(Z_M - \overline{Z}_{P_0}) - \frac{2\eta}{\omega_1} Z_M\right]$$
$$- \frac{\Gamma_0 + \Gamma_1}{2\pi}\left[\log\frac{\sigma(Z_M - \overline{Z}_{P_0})}{\sigma(Z_M - Z_{P_0})} - \frac{2\eta_1 i}{\omega_1} Z_M Y_{P_0}\right] - \frac{\Gamma_1 i}{2\omega_1} Z_M, \tag{14}$$

([21]) Voir, par exemple, E. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, 4e édition, p. 241, ou bien avec les notations employées ici, C. Jacob, *loc. cit.* ([9]), p. 98.

et il n'y a plus qu'à remplacer Z_{P_0}, ω_1, ω_3, α et β par leurs valeurs actuelles.

Il est encore à peine besoin d'ajouter que la formule (14) convient également à l'écoulement d'un liquide dans un domaine limité par deux ellipses homofocales. Si les coordonnées elliptiques sont ξ et η, $\xi = \xi_0$ et $\xi = \xi_1$ définissant les deux frontières ($\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_0$, $0 \leqq \eta \leqq 2\pi$), il suffira de poser, dans (14), $Z = \eta - i(\xi - \xi_0)$, $\omega_1 = \pi$, $\omega_3 = i(\xi_0 - \xi_1)$; naturellement, on devra aussi remplacer α et β par les valeurs correspondant à ce nouveau cas.

Indiquons enfin ce que deviendrait la formule (7) dans le cas actuel. En posant $\Phi(Q) = \Phi_0(X)$ pour Q situé sur le segment $(0, 2\omega_1)$ de l'axe réel et $\Phi(Q) = \Phi_1(X)$ pour l'autre segment frontière $0 \leqq X \leqq 2\omega_1$, $Y = \frac{\omega_3}{i}$, on aura

$$\begin{aligned} F(Z_M) = U(M) + iV(M) = &-\frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1} \Phi_0(X)\zeta(X - Z_M)\,dX \\ &+ \frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1} \Phi_1(X)\zeta_3(X - Z_M)\,dX \\ &- \frac{\eta_1 i}{\pi\omega_1} Z_M \int_0^{2\omega_1} [\Phi_0(X) - \Phi_1(X)]\,dX. \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi l'une des formules de M. H. Villat ([22]).

4. Comme deuxième application, nous allons traiter le problème suivant : Déterminer, à un certain instant, la fonction de courant d'un mouvement liquide dans le domaine (Ω), déjà considéré, en supposant connue la distribution tourbillonnaire continue $\zeta(P)$ dans un domaine (S) intérieur à (Ω).

On sait ([23]) que la fonction de courant $\psi(M)$, à dérivées partielles premières continues dans (Ω), doit être harmonique régulière dans

---

([22]) H. Villat, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 33, 1912, p. 134-174.

([23]) *Cf.* H. Villat, *Leçons sur la Théorie des Tourbillons*, Paris, 1930, p. 45.

$(\Omega - S)$ et vérifier l'équation

$$(15) \qquad \Delta_M \psi = -2\zeta(M)$$

en tout point de (S). De plus $\psi(M)$, nulle sur (C_0), doit prendre des valeurs constantes (inconnues) sur les (C_j) et sa conjuguée harmonique, définie dans $(\Omega - S)$, devra avoir des périodes imposées ω_j par rapport aux contours (C_j).

Pour trouver une fonction qui satisfasse à ces conditions, supposons d'abord qu'on ait $\omega_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$, et posons

$$\psi_0(M) = \frac{1}{\pi} \iint_{(S)} \zeta(P) G(M, P)\, d\sigma_P.$$

Cette fonction qui conviendrait à un domaine simplement connexe ([24]), vérifie encore les conditions requises à l'exception de celles concernant les périodes. En effet, elle s'annule sur tous les contours et vérifie bien l'équation (15) dans (S), tout en étant harmonique dans $(\Omega - S)$. Les périodes de sa conjuguée relatives aux (C_j) sont cependant différentes de zéro en général. Elles sont égales à

$$\Omega_j = 2 \iint_{(S)} \zeta(P) u_j(P)\, d\sigma_P \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

la fonction $u_j(P)$ étant celle définie au paragraphe **1**. Par suite, la fonction

$$\psi(M) = \psi_0(M) - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{p} \Omega_j U_j(M) = \frac{1}{\pi} \iint_{(S)} \zeta(P) g(M, P)\, d\sigma_P$$

satisfera aussi aux conditions d'uniformité exigées. Enfin, si les périodes ω_j sont différentes de zéro, il viendra

$$(16) \qquad \psi(M) = \frac{1}{\pi} \iint_{(S)} \zeta(P) g(M, P)\, d\sigma_P + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{p} \omega_j U_j(M).$$

Cette formule nous donnera les valeurs que prend $\psi(M)$ sur les parois.

([24]) *Loc. cit.* ([23]), p. 27 et 199.

CHAPITRE II.

SUR UN PROBLÈME MIXTE DE DIRICHLET.

Les questions traitées au paragraphe 1 peuvent être généralisées de plusieurs façons. Il est clair tout d'abord que tout ce qui vient d'être dit à propos du problème de Dirichlet, à deux dimensions, peut s'appliquer au cas des fonctions harmoniques de trois variables, à condition qu'on remplace la notion de périodicité de la conjuguée harmonique par celle de flux de la fonction à travers la surface considérée. Nous n'allons pas étudier ici en détail cette extension, quoiqu'elle pourrait trouver des applications intéressantes à la théorie des tourbillons, où l'on rencontre quelques difficultés (dans le problème de Poincaré-Stekloff) si le volume considéré est limité par plusieurs surfaces, l'équation homogène de Fredholm pour le problème de Dirichlet, qui y intervient ([25]), admettant dans ce cas des solutions effectives.

En restant cependant au cas de deux variables, on peut essayer d'étendre les résultats déjà acquis à un problème mixte de Dirichlet, consistant en la donnée des valeurs d'une fonction harmonique sur certains contours, et de celles de sa conjuguée harmonique sur les autres contours limitant le domaine.

Supposons que le domaine (Ω) que nous considérons soit limité par un contour extérieur (C_0) et par $p+q$ contours intérieurs que nous désignerons respectivement par $(C_j)(j=1, 2, \ldots, p)$ et $(D_k)(k=1, 2, \ldots, q)$ suivant les données qu'ils porteront. Sur ces contours, on fait les mêmes hypothèses que précédemment. D'une façon précise, le problème mixte dont il s'agit (Problème I) est le suivant : *Trouver une fonction analytique $f(z)=u+iv$, régulière en chaque point de (Ω), uniforme dans le domaine rendu doublement connexe par des lacets convenables liant (C_0) aux (C_j) et les (D_k) entre eux, connaissant la*

([25]) H. VILLAT, *loc. cit.* ([23]), p. 33 et suivantes.

suite des valeurs $\Phi(Q)$ *que prend* u *sur* (C_0) *et sur les* (C_j) *ainsi que les valeurs* $\Psi(Q)$ *que prend* v *sur les* (D_k).

Nous avons donné un théorème d'existence et d'unicité de la solution de ce problème en le traitant au moyen des équations intégrales [26]. La solution présentant des périodes cycliques réelles S_k autour des (D_k) et des périodes imaginaires pures iP_j autour des (C_j), la question, analogue à celle traitée au paragraphe **1**, que nous posons ici est : *Déterminer une fonction* $F(z) = U + iV$ *régulière dans tout le domaine (et par suite uniforme), telle que* U *prenne, à des constantes près, des valeurs* $\Phi(Q)$ *données sur* (C) *et que* V *prenne, également à des constantes près, les valeurs* $\Psi(Q)$ *sur* (D) (Problème II).

Nous avons désigné ici par (C) l'ensemble des courbes (C_0), (C_j), et par (D) l'ensemble des courbes (D_k). De même qu'au paragraphe **1**, nous pouvons prendre la constante additive concernant (C_0) égale à zéro; il en est de même de la constante relative à l'un des (D_k), par exemple à (D_1).

Soit $f_j(z) = u_j + iv_j$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ la solution du problème I pour les données $u_j = 0$ sur $(C - C_j)$, $u_j = 1$ sur (C_j), $v_j = 0$ sur (D). Soit ensuite $\varphi_k(z) = \bar{u}_k + i\bar{v}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ la solution du même problème pour les données $\bar{u}_k = 0$ sur (C), $\bar{v}_k = 0$ sur $(D - D_k)$, $\bar{v}_k = 1$ sur (D_k). Supposons pour l'instant que $\Phi(Q)$ et $\Psi(Q)$ soient des fonctions analytiques de l'arc sur la frontière. Alors, il est facile de vérifier que la formule [27]

$$(1) \qquad \int_{(C)} \left(u_j \frac{du}{dn} - u \frac{du_j}{dn} \right) ds - \int_{(D)} \left(v_j \frac{dv}{dn} - v \frac{dv_j}{dn} \right) ds = 0$$

est applicable, $f(z) = u + iv$ étant la solution du problème I; en effet, la dérivée normale de u sera continue sur (C) ainsi que celle de v sur (D). Cette formule nous donne tout de suite l'expression de P_j. On a

$$(2) \quad P_j = \int_{(C_j)} \frac{du}{dn} ds = \int_{(C)} \Phi(Q) \frac{du_j}{dn} ds - \int_{(D)} \Psi(Q) \frac{dv_j}{dn} ds \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

La relation (1) nous fournit encore, si on l'applique aux fonc-

---

[26] *Loc. cit.* [9], p. 67-109.
[27] *Loc. cit.* [9], p. 71.

tions $f(z)$ et $\varphi_k(z)$,

$$(3)\quad S_k = -\int_{(D_k)} \frac{dv}{dn}\,ds = \int_{(C)} \Phi(Q)\frac{d\bar{u}_k}{dn}\,ds - \int_{(D)} \Psi(Q)\frac{d\bar{v}_k}{dn}\,ds \qquad (k=1, 2, \ldots, q)$$

et l'on vérifie bien que $\sum_{k=1}^{q} S_k = 0$ puisque, de toute évidence, $\sum_{k=1}^{q}\varphi_k(z) = i$.
Ces formules une fois établies, on peut, par un raisonnement classique (*cf.* E. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III; 4^e^ éd., p. 220), se débarrasser de l'hypothèse de l'analyticité de $\Phi(Q)$ et de $\Psi(Q)$, mais nous n'en avons pas besoin pour ce qui suit.

Supposons en particulier qu'il s'agisse de la fonction

$$\mathcal{G}(M, P) + i\mathcal{H}(M, P),$$

analytique régulière par rapport à z_M, qui est définie par les conditions

$$\mathcal{G} = \log\frac{1}{r_{QP}} \quad \text{sur (C)}, \qquad \mathcal{H} = \theta_{QP} \quad \text{sur (D)},$$

en posant [28]

$$\theta_{MP} = \operatorname{arc\,tang}\frac{y_M - y_P}{x_M - x_P},$$

et en suivant par continuité la détermination choisie pour l'arc. On aura, en appliquant les formules (2) et (3), et en tenant aussi compte de la formule (1) appliquée aux fonctions $\log(z_M - z_P)$ et $f_j(z_M)$ ou $\varphi_k(z_M)$, après exclusion du point P au moyen d'un petit cercle dont on fait ensuite tendre le rayon vers zéro,

$$P_j = -\int_{(C)} u_j\frac{d\log r_{QP}}{dn_Q}\,ds_Q - \int_{(D)} v_j\frac{d\theta_{QP}}{dn_Q}\,ds_Q - 2\pi u_j(P) = -2\pi u_j(P),$$

$$S_k = -\int_{(C)} \bar{u}_k\frac{d\log r_{QP}}{dn_Q}\,ds_Q - \int_{(D)} \bar{v}_k\frac{d\theta_{QP}}{dn_Q}\,ds_Q - 2\pi\bar{u}_k(P) = -2\pi\bar{u}_k(P).$$

Par conséquent, *la fonction de Green*

$$G(M, P) + iH(M, P) = \log\frac{1}{z_M - z_P} - [\mathcal{G}(M, P) + i\mathcal{H}(M, P)],$$

---

[28] z_M et z_P sont les affixes des points M et P.

qui admet une singularité logarithmique au point z_P *et vérifie les conditions* $G = 0$ *sur* (C), $H = 0$ *sur* (D), *est telle que sa période correspondant à un contour simple entourant* (C_j) (*et ne contenant pas le point* P *à son intérieur*) *est égale à* $2\pi i u_j(P)$; *sa période relative à* (D_k) *est de même égale* à $2\pi \bar{u}_k(P)$.

Posons $\Gamma(M, P) = G(M, P) + iH(M, P)$; en nous rapportant [29] alors à la formule qui donne la solution du problème I, qu'on pourrait du reste rétablir à partir de (1), on a

$$f(z_M) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \Phi(Q)\frac{d\Gamma(M, Q)}{dn_Q}\,ds_Q - \frac{1}{2\pi}\int_{(D)} \Psi(Q)\frac{d\Gamma(M, Q)}{ds_Q}\,ds_Q. \tag{4}$$

Introduisons maintenant les fonctions

$$F_j(z) = U_j + iV_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, q),$$

définies par les conditions suivantes : *a.* $U_j = 0$ sur (C_0), $U_j = \text{const.}$ sur (C_l) $(l = 1, 2, \ldots, p)$, $V_j = \text{const.}$ sur les (D_k); *b.* les périodes de U_j relatives aux (D_k) sont nulles, les périodes de V_j relatives (C_l) $(l \neq j)$ sont nulles sauf celle concernant (C_j), qui est égale à 2π. De plus, on prend $V_j = 0$ sur (D_1). Définissons de même les fonctions $\Phi_k(z) = \overline{U}_k + i\overline{V}_k$ $(k = 2, 3, \ldots, q)$ par les conditions : *a.* $\overline{U}_k = 0$ sur (C_0), $\overline{U}_k = \text{const.}$ sur (C_j), $\overline{V}_k = 0$ sur (D_1), $V_k = \text{const.}$ sur les autres contours (D_k); *b.* la période de $\overline{U}_k$ est égale à -2π pour (D_1), à 2π pour (D_k) et à zéro pour les autres contours (D); les périodes de $\overline{V}_k$ concernant les (C_j) sont nulles. L'existence de ces fonctions résulte d'un théorème que nous avons donné dans le Mémoire déjà cité [30].

Ces fonctions une fois construites, posons

$$W(M, P) = U(M, P) + iV(M, P)$$

avec

$$U(M, P) = \sum_{j=1}^{p} U_j(M)u_j(P) + \sum_{k=2}^{q} \overline{U}_k(M)\bar{u}_k(P),$$

$$V(M, P) = \sum_{j=1}^{p} V_j(M)u_j(P) + \sum_{k=2}^{q} \overline{V}_k(M)\bar{u}_k(P).$$

---

(29) *Loc. cit.* (9), p. 95.

(30) *Loc. cit.* (9), p. 85.

W(M, P) présente les mêmes périodes que la fonction de Green pour les contours (C_j) $(j=1, 2, \ldots, p)$ et (D_k) $(k=1, 2, \ldots, q)$, puisque $\sum_{k=1}^{q} \bar{u}_k(P) \equiv 0$. En remplaçant, dans la formule (4), $\Gamma(M, P)$ par la fonction $\gamma(M, P) = \Gamma(M, P) - W(M, P)$, on aura enfin la solution du problème II.

La fonction W(M, P) jouit encore de certaines propriétés de symétrie. Si l'on introduit la conjuguée $V_1(M, P)$ de U(M, P), par rapport à P, en posant

$$V_1(M, P) = \sum_{j=1}^{p} U_j(M) v_j(P) + \sum_{k=2}^{q} \bar{U}_k(M) \bar{v}_k(P),$$

on a les relations

$$U(M, P) = U(P, M), \qquad V(M, P) = V_1(P, M).$$

En effet, on peut prouver, en tenant compte de certaines propriétés de symétrie des $f_j(z)$ et des $\varphi_k(z)$, que la différence $U(M,P) - U(P,M)$ est une fonction harmonique uniforme dans (Ω), qui prend des valeurs constantes sur (C), dont la conjuguée est aussi uniforme et prend des valeurs constantes sur (D). Par suite cette différence doit se réduire à une constante qui est ici nulle puisque nulle sur (C_0). La différence $V(M, P) - V_1(P, M)$ doit donc être aussi constante, et même nulle à cause des conditions concernant (D_1). Nous n'entrons pas dans le détail de la démonstration qui se ferait de la même façon qu'au paragraphe **1**.

Remarquons, pour terminer, que si le domaine (Ω) est doublement connexe, la fonction $f(z_M)$ solution du problème mixte, qui est donnée par (4), est toujours uniforme.