JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL DELENS

Sur quelques nouvelles acquisitions de la géométrie du tétraèdre

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 18 (1939), p. 303-321.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__303_0>

Sur quelques nouvelles acquisitions de la géométrie du tétraèdre;

PAR PAUL DELENS.

(Le Havre).

On sait l'intérêt particulier porté à la géométrie anallagmatique par M. J. Hadamard. Ayant moi-même reçu de lui de précieux encouragements dans des recherches sur ce sujet, j'espère que mon témoignage de gratitude justifiera mon apport à ce Recueil sous la forme de l'exposé suivant d'une étude élémentaire, mais dont la base est la géométrie anallagmatique.

1. INTRODUCTION. — La géométrie du triangle a cessé d'être un amas de faits particuliers quand la théorie des groupes a permis d'en coordonner les propriétés. A ce point de vue, comme à d'autres, la géométrie du tétraèdre est assez en retard sur la précédente. La géométrie métrique euclidienne est en effet le croisement, le carrefour, d'autres voies plus étendues : géométries projective et affine, anallagmatique, des sphères de Laguerre et de Lie, etc. Les divergences entre certaines de ces géométries s'accentuent quand augmente le nombre des dimensions de l'espace. Ainsi, les groupes des géométries affine et anallagmatique du plan dépendent de 6 paramètres et n'accordent aucun invariant à un système de 3 points; dans l'espace, ces groupes étant à 12 et 10 paramètres, le système de 4 points ne possède aucun invariant affin, mais a 2 invariants conformes.

Pour comparer les géométries du triangle et du tétraèdre et tenter l'extension au second de certaines propriétés du premier, il semble important de reconnaître d'abord *l'origine* de ces propriétés, les voies d'accès au carrefour commun. On devra s'occuper, non seulement de *la nature* (affine, anallagmatique, etc.) des propriétés, mais aussi de cette origine, de leur *hérédité*. Une particularisation métrique, par exemple, procède de propriétés *de diverses natures*; les généralisations du triangle au tétraèdre posent la question : dans quelle voie, sous quelle géométrie, telle propriété métrique trouve-t-elle son extension la mieux appropriée, la plus complète ?

Il m'est ainsi apparu, *les angles du triangle étant aussi ceux de ses côtés avec le cercle circonscrit*, que c'est sous cet aspect qu'ils intervenaient dans plusieurs questions remarquables. L'introduction d'angles analogues était alors indiquée pour le tétraèdre. Le choix de systèmes fondamentaux de quantités et d'angles à substituer aux côtés et aux angles du triangle, dépendant de la géométrie envisagée, je justifie ci-après un tel choix pour les questions touchant à la géométrie anallagmatique; avec la synthèse de mes recherches sur ce sujet, sans entrer par suite dans le détail des calculs, j'indique les résultats qu'il m'a permis d'atteindre ([1]).

2. Notations générales. — Soient $\mathcal{T} \equiv ABCD$ le tétraèdre de base, V son volume, $\mathcal{O} \equiv (O, R^2)$ sa sphère circonscrite, de centre O, rayon R. Je pose

$$BC = a, \qquad CA = b, \qquad AB = c, \qquad DA = a', \qquad DB = b', \qquad DC = c'.$$

Aux sommets $J = A, B, C, D$ sont opposées les faces $\iota = \alpha, \beta, \gamma, \delta$. L'indice J caractérise en général les éléments relatifs aux sommets de $\mathcal{T}$ ou aux faces respectivement opposées : j'appelle h_J, s_J, R_J les hauteurs du tétraèdre, les aires des faces, les rayons des cercles $\{O_J, R_J^2\}$ circonscrits à ces faces. Les éléments relatifs aux paires d'arêtes opposées, DA et BC, DB et CA, DC et AB, sont affectés d'un indice $i = 1, 2, 3$. A de tels éléments peut en être adjoint un autre dépendant symétriquement des quatre sommets, des trois paires d'arêtes, qui recevra l'indice o, généralement sous-entendu. Les

(1) Les éléments de ces recherches ont fait l'objet de Notes aux *Comptes rendus* (203, 1936, p. 837 et 1213; 204, 1937, p. 319 et 1150; erratum, p. 1516). Un exposé plus détaillé est en cours de publication dans *Mathesis* [*Sur la géométrie du tétraèdre* (1re partie), 51, 1937, p. 119-127].

Cet exposé a été complété en 51, 1937, p. 444-456 et 52, 1938, p. 62-79. *Cf.* aussi l'*Enseignement mathématique* (*Formules du tétraèdre*). — Note ajoutée à la correction des épreuves).

sommations indiquées portent donc soit sur trois termes $i = 1, 2, 3$, soit sur quatre, $J = A, B, C, D$ ou $i = 0, 1, 2, 3$.

3. Systèmes de tétraèdres desmiques. — En rappelant certaines propriétés de géométrie projective et leurs particularisations de diverses espèces, j'insiste sur un premier principe : rechercher les relations entre éléments géométriques pour en déduire les relations numériques, chacune de moindre généralité. La géométrie des points-masses et éléments analogues est appropriée à cette intention; autrement dit, l'emploi des méthodes de Möbius et Grassmann avec la contribution que j'ai pu leur apporter [1]. Cette forme du langage tensoriel moderne permet de *géométriser* le plus possible ce qui se rapporte aux systèmes de coordonnées tétraédriques et aux transformations associées.

Une notion fondamentale est celle des systèmes de *tétraèdres desmiques de Stevhanos*. Les sommets J de $\mathfrak{T}$ étant conçus comme points affectés d'une masse-unité, soient $J' = A', B', C', D'$ les points-masses en ces sommets, de masses n_J, donc $J' = n_J J$. Les deux groupes de quatre points-masses, situés en M_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ et M_J,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} 2M' = & A' + B' + C' + D', & 2M'_A = & -A' + B' + C' + D', \\ 2M'_1 = & A' - B' - C' + D', & 2M'_B = & A' - B' + C' + D', \\ 2M'_2 = & -A' + B' - C' + D', & 2M'_C = & A' + B' - C' + D', \\ 2M'_3 = & -A' - B' + C' + D', & 2M'_D = & A' + B' + C' - D', \end{array}\right.$$

définissent deux tétraèdres (M_i), (M_J) formant avec $(J) \equiv \mathfrak{T}$ un système desmique. D'après (1) et les formes équivalentes, *ces trois tétraèdres sont autopolaires chacun par rapport aux autres* et leur symétrie projective, leur réciprocité, est complète. Les relations (1) entraînent les mêmes relations, numériques, entre les masses m_i des M'_i, m_J des M'_J, n_J des J'. Par produits *extérieurs* de Grassmann, on déduit de (1) les relations entre les vecteurs glissants portés par les arêtes des tétraèdres (et les vecteurs libres); puis les relations, analogues à (1), entre les plans-masses des faces. Par produits *algébriques* de Grassmann, on tire encore de (1)

$$(2)\qquad \Sigma J'^2 = \Sigma M_i'^2 = \Sigma M_J'^2,$$

[1] *Géométrie conforme des congruences de courbes* (*Bull. Soc. Math. de France*, **61**, 1933, p. 95-127).

donc, *les sommets des tétraèdres desmiques* (J), (M_i) (M_j) *forment* 3 *groupes de* 8 *points associés, communs aux quadriques d'un réseau ponctuel. Les* 3 *tétraèdres sont conjugués à une même quadrique* Q, dont chaque membre de (2) représente le *noyau* algébrique de la forme tangentielle; cette forme est le double produit scalaire du noyau par le carré algébrique du symbole d'un plan arbitraire. Le centre-masse N' de Q est

$$(3) \qquad N' = \Sigma n_j^2 J = \Sigma m_i^2 M_i = \Sigma m_j^2 M_j,$$

et de (2) ou (3) s'ensuit encore la relation entre masses

$$(4) \qquad \Sigma n_j^2 = \Sigma m_i^2 = \Sigma m_j^2.$$

En même temps, *les faces des tétraèdres desmiques forment* 3 *groupes de* 8 *plans associés, communs aux quadriques d'un réseau tangentiel.*

4. Relations linéaires entre sphères. — En substituant dans (2) les produits *intérieurs* aux produits algébriques, on obtient des relations linéaires entre les sphères de Monge des quadriques tangentielles en jeu (quadriques et sphères réelles, dégénérées ou évanouissantes, idéales). Le produit scalaire de deux noyaux intérieurs de sphères, de masse-unité, est la puissance mutuelle des sphères. Les noyaux intérieurs seront écrits entre parenthèses : (AB) représente la sphère de diamètre AB, $\mathcal{O} \equiv (O^2 - R^2 \vec{u}^2)$ la sphère circonscrite à $\mathfrak{T}$, $\vec{u}$ désignant un vecteur unitaire arbitraire. Le système desmique (1) introduit, par (2), la sphère de Monge de Q, $\Sigma(J'^2)$, orthogonale à $\mathcal{O}$; aussi, dans un réseau orthogonal à $\mathcal{O}$, le système de 6 sphères telles que $(n_A A^2 - n_D D^2)$, ..., dont les centres

$$n_A A - n_D D \equiv A' - D' = M'_D - M'_A = -(M'_2 + M'_3), \ldots,$$

sont les points d'intersection d'arêtes des tétraèdres (J), (M_j), (M_i). D'ailleurs un procédé d'extension aux sphères des relations linéaires entre points repose sur le principe : *toute relation linéaire entre points entraîne la même relation entre les sphères ayant pour centres ces points et orthogonales à une même sphère* (condition linéaire); j'en ferai usage (n° **12**) pour des sphères orthogonales à $\mathcal{O}$ [1].

[1] Les relations linéaires, telles que (1), s'étendent aux *semi-sphères orientées de Laguerre*, chaque point en cause étant le centre d'une semi-sphère dont le

5. Coordonnées tétraédriques et transformations. — La donnée du système de masses n_J, aux sommets de $\mathfrak{T}$, équivaut à fixer, par son point-unité $\Sigma J' = \Sigma n_J J$, un système de coordonnées ($\mathfrak{T}$) linéaires ponctuelles [($\mathfrak{T}$) = tétraédrique, pour le tétraèdre $\mathfrak{T}$]; la *position* du point-unité correspond aux coordonnées homogènes, aux valeurs proportionnelles des n_J.

A chaque système de coordonnées ($\mathfrak{T}$) homogènes ponctuelles est attaché un système de coordonnées analogues de plans. La correspondance entre point et plan de mêmes coordonnées homogènes est réalisée par la *polarité* (Q), relative à la quadrique définie en (2). Les substitutions contragrédientes

$$(5) \qquad J' = n_J J, \qquad \iota' = n_J^{-1}\iota, \qquad \mu'_J = n_J^{-1}\mu_J, \qquad u'_\iota = n_J u_\iota$$

permettent le passage des coordonnées μ_J, u_ι de points et de plans à celles d'un autre système μ'_J, u'_ι de $\mathfrak{T}$ si l'on impose (en fixant des coordonnées absolues) la conservation des relations $M' = \Sigma\mu_J J = \Sigma\mu'_J J'$ pour un point, $\lambda' = \Sigma u_\iota \iota' = \Sigma u'_\iota \iota'$ pour un plan. Ci-dessus et dans la suite les μ_J désignent les coordonnées (b) (= barycentriques) homogènes ponctuelles; pour les coordonnées (b) absolues, $\Sigma\mu_J = 1$. Les coordonnées (n) (= normales) absolues d'un point sont ses distances algébriques aux faces de $\mathfrak{T}$, $d_J = \mu_J h_J$ avec μ_J absolues; les masses n_J correspondantes valent $\frac{2s_J}{6V}$.

A tout système de masses n_J appartient une *inversion* ($\mathfrak{T}$), transformation cubique involutive entre points, définie pour deux points de coordonnées ($\mathfrak{T}$) homogènes x, y, z, t et x', y', z', t' par

$$(6) \qquad xx' = yy' = zz' = tt'.$$

La polarité (Q, n_J) et l'inversion ($\mathfrak{T}$, n_J) sont indifférentes aux changements de signes des n_J, les valeurs n_J^2 intervenant seules dans (2) et (6) : *elles se rapportent à un système desmique;* les sommets de (M_i) et (M_J)

rayon (algébrique) est dans un rapport constant avec la distance (algébrique) de ce centre à un même plan, *plan d'homothétie* du système de semi-sphères ainsi constitué. Je ne m'arrête pas à cette extension ni à celle qui atteindrait, suivant les principes précédents, les sphères orientées de Lie et leurs combinaisons linéaires.

sont les points doubles de l'inversion ($\mathfrak{T}$) considérée. Les relations (5) montrent l'effet d'un changement de coordonnées sur ces transformations. La *polarité* ($\mathfrak{T}$), transformation de la géométrie projective, est indépendante des n_J.

6. Un système desmique fondamental. — Il existe un système desmique de tétraèdres $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_p \equiv (L_i)$, $\mathfrak{T}_a \equiv (L_J)$, de propriétés caractéristiques : *le tétraèdre* L_i *est le seul tétraèdre* (M_i) *autopolaire pour la sphère* $\mathcal{O}$ (donc orthocentrique); *le tétraèdre* (L_J) *est le seul tétraèdre inscrit dans* $\mathcal{O}$. Ces tétraèdres correspondent au système de masses n_J proportionnelles aux

$$(7) \qquad v_J = 4R_J s_J = ab'c',\ bc'a',\ ca'b',\ abc \qquad (J = A, B, C, D).$$

J'appelle $\mathfrak{T}_p$ le tétraèdre *principal*, $\mathfrak{T}_a$ le tétraèdre *adjoint* de $\mathfrak{T}$, et $\mathfrak{T}$ l'adjoint de $\mathfrak{T}_a$, la relation métrique entre $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_a$ (et anallagmatique quant à leurs sommets) étant réciproque. Le *point* L *de Lemoine*, point-unité du système de coordonnées *principales* correspondant aux v_J, est intérieur à $\mathfrak{T}$, donc à $\mathcal{O}$; son plan polaire pour $\mathfrak{T}$ et $\mathcal{O}$, $\Lambda \equiv L_1 L_2 L_3$, *plan de Lemoine*, extérieur à $\mathcal{O}$, définit avec cette sphère le *faisceau linéaire* $\mathcal{O}$, Λ *de sphères de Schoute*, d'axe OL, *droite de Brocard*, de points limites réels W, W*, *centres isodynamiques* de $\mathfrak{T}$ [1]. Ce faisceau contient la *sphère* (OL) *de Brocard* et la *sphère* $\mathcal{L} \equiv (L, -\lambda^2)$ *de Lemoine*, *idéale*. Au réseau de sphères orthogonal à $\mathcal{O}$, Λ appartiennent les six *sphères d'Apollonius* ($v_A A^2 - v_D D^2$), ($v_C C^2 - v_B B^2$), ... Les coordonnées normales du plan Λ sont inversement proportionnelles aux v_J, c'est-à-dire que les produits scalaires (J, Λ) satisfont à

$$(8) \qquad v_A(A, \Lambda) = v_B(B, \Lambda) = v_C(C, \Lambda) = v_D(D, \Lambda);$$

les puissances p_J des sommets de $\mathfrak{T}$ pour chaque sphère de Schoute sont aussi inversement proportionnelles aux v_J.

Les sections antiparallèles aux faces de $\mathfrak{T}$, dans les trièdres opposés à ces faces, sont des triangles Θ_J *associés* à $\mathfrak{T}$; leurs plans sont inverses

---

(1) J'ai conservé autant que possible les dénominations en usage dans la géométrie du triangle et parfois, déjà, dans celle du tétraèdre; mais la dernière, *centres isodynamiques*, est, comme on le verra (n° 14), mal appropriée au tétraèdre.

de $\mathcal{O}$ dans les inversions $(\mathrm{J}, p_{\mathrm{J}})$ et les triangles Θ_{J} sont égaux pour les puissances p_{J} relatives à une sphère de Schoute. Ces plans coupent les faces des tétraèdres correspondants sous les ternes d'angles $\mathrm{J} = \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ des faces de $\mathcal{T}$ avec $\mathcal{O}$. Les céviennes d'un point M ont pour traces dans les triangles Θ_{J} les points dont les coordonnées (Θ_{J}, n) absolues sont les ternes de quantités $\varpi_{\mathrm{J}} = \dfrac{d_{\mathrm{J}}}{\sin \mathrm{J}}$. Les coordonnées (p) (= principales) du tétraèdre sont proportionnelles à ces

$$(9) \qquad \varpi_{\mathrm{J}} = \frac{d_{\mathrm{J}}}{\sin \mathrm{J}} = \frac{2\mathrm{R} d_{\mathrm{J}}}{2\mathrm{R}_{\mathrm{J}}} = \frac{4\mathrm{R} s_{\mathrm{J}} d_{\mathrm{J}}}{v_{\mathrm{J}}} = \frac{12\mathrm{RV}}{v_{\mathrm{J}}} \mu_{\mathrm{J}} \qquad (\Sigma \mu_{\mathrm{J}} = 1);$$

les coordonnées (p) absolues sont les ϖ_{J}, liées par

$$(10) \qquad \Sigma v_{\mathrm{J}} \varpi_{\mathrm{J}} = 12\mathrm{RV} = 2\mathcal{S}_s,$$

$\mathcal{S}_s$ étant l'aire du triangle associé Θ_s de Von Staudt, de côtés aa', bb', cc'.

En rapportant à la sphère $\mathcal{O}$ les propriétés harmoniques du système desmique $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_p$, $\mathcal{T}_a$, on voit que *les sommets de ces tétraèdres définissent, à partir de $\mathcal{T}$, sur $\mathcal{O}$ la géométrie binaire complexe d'un groupe de quatre points, et dans l'espace la géométrie anallagmatique du même groupe* (1). Une inversion de pôle D, par exemple, conduit à une configuration connue du triangle $\Theta_{\mathrm{D}} \equiv \mathrm{D}_1 \mathrm{D}_2 \mathrm{D}_3$, rattachée aux centres des cercles tangents aux côtés. Plus généralement l'inversion $(\mathcal{T}, p)$ est ramenée aux inversions (Θ_{J}, n) dans les triangles Θ_{J}.

7. Système fondamental de grandeurs et d'angles du tétraèdre. — La géométrie anallagmatique conduit au choix des 7 *grandeurs fondamentales*

$$(11) \qquad j_i = aa',\ bb',\ cc', \qquad v_{\mathrm{J}} = 4\mathrm{R}_{\mathrm{J}} s_{\mathrm{J}} = ab'c',\ bc'a',\ ca'b',\ abc$$
$$(i = 1, 2, 3;\ \mathrm{J} = \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}),$$

---

(1) *Cf.* Frank et F. V. Morley, *Inversive geometry* (Londres, 1933); les éléments de cette théorie y sont exposés en divers points, sinon coordonnés. J. Neuberg, *Mémoire sur le tétraèdre* (*Bull. de l'Ac. royale de Belgique*, 1884), avait déjà reconnu l'importance des v_{J}, mais s'en était tenu au cas du tétraèdre isodynamique; *cf.* aussi N. Altshiller-Court, *Modern pure solid geometry* (New-York, 1935).

liées par l'identité

$$(12)\qquad (j_1 j_2 j_3)^2 = \rho_A \rho_B \rho_C \rho_D.$$

Inversement

$$(13)\qquad a^2 = \frac{\rho_A \rho_D}{j_2 j_3}, \qquad a'^2 = \frac{\rho_B \rho_C}{j_2 j_3}, \qquad \dots,$$

J'introduis en outre le système de 7 *angles fondamentaux*

$$(14)\qquad J_i = J_1, J_2, J_3, \qquad J = A, B, C, D,$$

les premiers étant ceux d'un triangle Θ associé à $\mathcal{T}$, les seconds ceux des faces de $\mathcal{T}$ avec $\mathcal{O}$. Ces angles sont liés par deux identités; la première est $\Sigma J_i = \pi$. Pour la seconde, j'ai fait appel à la puissance d'un point par rapport à $\mathcal{O}$, soit en coordonnées (b) absolues

$$p = -\Sigma(a^2 \mu_B \mu_C + a'^2 \mu_D \mu_A) \qquad (\Sigma \mu_J = 1).$$

Avec les notations

$$(15)\qquad \left|\begin{array}{l} \sigma_i = \sin J_i, \quad (i = 1, 2, 3); \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = S, \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = P \\ {}^{\star}\left\{\begin{array}{l} P_A(x_J) \equiv \qquad\qquad \sigma_3 x_B + \sigma_2 x_C + \sigma_1 x_D, \\ P_B(x_J) \equiv \sigma_3 x_A \qquad\qquad + \sigma_1 x_C + \sigma_2 x_D, \\ P_C(x_J) \equiv \sigma_2 x_A + \sigma_1 x_B \qquad\qquad + \sigma_3 x_D, \\ P_D(x_J) \equiv \sigma_1 x_A + \sigma_2 x_B + \sigma_3 x_C; \end{array}\right. \\ Q_i(x_J) \equiv x_B x_C + x_D x_A,\ x_C x_A + x_D x_B,\ x_A x_B + x_D x_C, \\ P(x_J) \equiv \Sigma \sigma_i Q_i(x_J) \equiv \frac{1}{2} \Sigma x_J P_J(x_J), \qquad P_J(x_J) = \dfrac{\partial P(x_J)}{\partial x_J}, \end{array}\right.$$

on a, en coordonnées (p) absolues (¹),

$$(16)\qquad p = -\frac{aa'bb'cc'}{(12RV)^2} \Sigma aa'(\varpi_B \varpi_C + \varpi_D \varpi_A) = -\frac{1}{P} \Sigma \sigma_i Q_i(\varpi_J).$$

En substituant dans (16) les coordonnées de O, $\varpi_J = R \cot J$, et posant $\chi_J = \cot J$, on obtient, entre les angles J_i et J, les identités fondamentales

$$(17)\qquad \Sigma J_i = \pi, \qquad \Sigma \sigma_i Q_i(\chi_J) = P \qquad (\chi_J = \cot J).$$

De $(17)_2$ s'ensuit que $P = P(\chi_J)$; je poserai aussi $P_J = P_J(\chi_J)$.

(¹) Il ne semble pas y avoir de confusion à craindre entre l'abréviation (p) et l'expression p de la puissance indiquée.

L'équation $p = 0$ donne une autre relation remarquable : en exprimant que le plan à l'infini est polaire ($\mathcal{O}$) de O, on obtient les relations

$$(18) \qquad h_A = \frac{2R \sin A \sin J_1 \sin J_2 \sin J_3}{\sin J_1 \cot D + \sin J_2 \cot C + \sin J_3 \cot B}, \qquad \ldots$$

ou

$$(18') \qquad h_J = 2R \sin J \frac{P}{P_J}.$$

Les relations $(17)_2$ et (18) correspondent aux relations connues du triangle

$$(\mathrm{T}, 1) \qquad \Sigma \cot B \cot C = 1, \qquad h_A = \frac{2R \sin A}{\cot B + \cot C}, \qquad \ldots.$$

8. Extension a l'anatétraèdre (1); conséquences. — Les angles J_i sont des *invariants conformes du tétraèdre*, plus exactement *du quaterne de ses sommets* (2 invariants indépendants). Les angles J sont des invariants conformes d'un système de 5 points, particularisé en les sommets de $\mathcal{C}$ et le point à l'infini, et complété par les faces de $\mathcal{C}$, la sphère $\mathcal{O}$, les arêtes et cercles d'intersection, qu'une opération sphérique transforme en système général de 5 points M, A′, B′, C′, D′, 5 sphères concourantes par 4 et leurs cercles d'intersection. Rapportant cette figure à la sphère circonscrite à A′, B′, C′, D′, dont je supprime désormais les accents, je parlerai de l'*anatétraèdre* $\mathcal{C}' \equiv$ M.ABCD, *de points-base* A, B, C, D, *de pôle* M, *de sa sphère circonscrite* $\mathcal{O}$ *et de ses invariants conformes* (ceux du système des 5 points). Les cinq invariants conformes de l'*anatétraèdre* $\mathcal{C}$ sont donnés par les angles J_i et J liés par les identités (17); ceux de $\mathcal{C}'$ sont les angles J_i (au signe près) et les angles $J' =$ A′, B′, C′, D′, des sphères Ω_J *annexes* de M [menées par M et les cercles $\{O_J, R_J^2\}$ des faces] avec $\mathcal{O}$, liés par les mêmes relations (17). Pour $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de mêmes points-base, on pourra écrire $(17)_2$ pour les J et, pour les J′, la combinaison (par différence)

$$(19) \qquad \Sigma \sigma_i Q_i(\Delta_J) + \Sigma P_J \Delta_J \equiv \frac{1}{2} \Sigma \Delta_J P_J(\chi'_J + \chi_J) = 0,$$

(1) J'ai emprunté l'usage du préfixe *ana*, dans le sens indiqué, à M. G. Bouligand *Premières leçons sur la théorie générale des groupes* (Paris, 1935, p. 58).

où

$$\chi_J = \cot J, \qquad \chi'_J = \cot J', \qquad \Delta_J = \chi'_J - \chi_J.$$

D'après (18')

$$(20) \qquad \frac{v_J}{6V} = \frac{4R_J s_J}{2h_J s_J} = \frac{2R\sin J}{h_J} = \frac{P_J}{P} \qquad \text{ou} \quad P\frac{v_J}{6V} = P_J,$$

donc : *les quantités* $\frac{v_J}{6V}$, *liées aux* cot J *par les relations* (20), *avec coefficients* $\sigma_i = \sin J_i$, *sont des invariants conformes absolus de l'anatétraèdre* (au sens indiqué); *les* v_J *en sont des invariants relatifs.*

9. Angles de Brocard. Sphère $\mathcal{L}'$ de Lemoine. — Je définis les *angles de Brocard* de $\mathfrak{T}$, U *principal*, ψ *auxiliaire* ou *normal*, par

$$(21) \qquad \Sigma \cot J = \cot U, \qquad \Sigma v_J = 12V\cot\psi;$$

ces angles se rattachent au point L ou à l'axe OL. Les combinaisons linéaires analogues à celles de (1) introduisent, pour les points associés $L_i (i = 1, 2, 3)$ et L_J, ou les axes OL_i et OL_J, les angles associés U_i, U_J, ψ_i, ψ_J, par

$$(22) \qquad \begin{cases} \Sigma\chi_J - 2(\chi_B + \chi_C) = \cot U_1, \quad \ldots, \quad \Sigma\chi_J - 2\chi_A = \cot U_A, \quad \ldots, \\ \Sigma v_J - 2(v_B + v_C) = 12V\cot\psi_1, \quad \ldots, \quad \Sigma v_J - 2v_A = 12V\cot\psi_A, \quad \ldots. \end{cases}$$

De (20) on tire en particulier les relations

$$(23) \qquad \frac{\cot U}{\cot\psi} = \frac{2P}{S} = \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}}, \qquad \frac{\cot U_i}{\cot\psi_i} = -\frac{\mathcal{R}_i}{\mathcal{R}},$$

$\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_i$ étant les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits à un même triangle Θ.

Les coordonnées ϖ_J *d'un point sont ses distances obliques* (algébriques) *aux faces de* $\mathfrak{T}$, *évaluées parallèlement aux génératrices des cônes circonscrits à* $\mathcal{O}$ *des sommets du tétraèdre* $\mathfrak{T}_t$, *tangentiel de* $\mathfrak{T}$. Ces coordonnées sont égales pour L à $R\,\text{tang}\,\psi = \mathcal{R}_{0p}$, rayon du cercle inscrit à un triangle *principal* Θ_p, dont le plan passe par L : *les quatre triangles associés principaux sont égaux et leurs cercles inscrits sont des grands cercles d'une sphère de Lemoine* $\mathcal{L}'' \equiv (L, \mathcal{R}_{0p}^2)$ *coupant les faces de* $\mathfrak{T}$ *sous les angles* $\frac{\pi}{2} - J$, *donc découpant sur chaque face un cercle de rayon*

$\mathcal{R}_{0p} \cos J$. Cette sphère correspond au *second cercle de Lemoine* d'un triangle.

Les sommets des triangles Θ_p résultant de ceux de $\mathfrak{T}$ dans les inversions (J, p_J), les inversions (J, kp_J) leur substituent ceux de triangles Θ_J égaux ; L *est le centre d'homothétie des tétraèdres dont les faces découpent sur* $\mathfrak{T}$ *des triangles associés égaux* (avec disposition convenable), *et de* $\mathfrak{T}_t$. Soit $\{I, \mathcal{R}_0^2\}$ le cercle inscrit dans un triangle Θ_J, M l'homothétique de O par $(L, 1-k)$. De $\mathcal{R}_0 = k\mathcal{R}_{0p}$, $\overline{MI} = (1-k)\overline{OJ}$, on tire

$$\rho_0^2 = \mathcal{R}_0^2 + \overline{MI}^2 = k^2\mathcal{R}_{0p}^2 + (1-k)^2 R^2; \tag{24}$$

les quatre cercles analogues à $\{I, \mathcal{R}_0^2\}$ appartiennent à une même sphère $\mathfrak{M}'' \equiv (M, \rho_0^2)$ et *les sphères* $\mathfrak{M}''$, *inscrites à quatre triangles associés égaux*, *sont celles d'un système de Tücker*, *d'axe* OL. J'étudierai ce système en le rattachant au faisceau $\mathcal{O}$, Λ de Schoute (n° **10**); les axes OL_i et OL_J introduiraient des systèmes analogues, à quelques détails près.

Pour un triangle $T \equiv ABC$, de côtés $j = a, b, c$, les coordonnées (T, p) absolues sont encore les $\varpi_J = \dfrac{d_J}{\sin J}$ et aux $\dfrac{\nu_J}{6V}$ correspondent les quantités

$$\frac{j^2}{2S} = \frac{j}{h_J} = \frac{2R\sin J}{h_J}. \tag{T. 2}$$

Appelons *cône principal* du tétraèdre un cône de sommet $J = A, B, C, D$, de base le cercle $\{O_J, R_J^2\}$; *plan central* un plan défini par O et une hauteur de $\mathfrak{T}$, chaque plan central coupe le cône principal correspondant suivant un *triangle central* de $\mathfrak{T}$, $T_J \equiv JJ_I J_{II}$, de sommet J, base $J_I J_{II} = 2R_J$, hauteur h_J, inscrit à un grand cercle de $\mathcal{O}$. *Les angles* J *de* $\mathfrak{T}$ *sont les angles minima principaux des cônes principaux, angles aux sommets des triangles centraux.* Les triangles centraux T_J complètent, avec les triangles associés Θ, la figuration des grandeurs fondamentales de $\mathfrak{T}$.

Soit V l'angle de Brocard d'un triangle T; on a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{a^2}{2S} &= \frac{a}{h_A} = \cot B + \cot C = \cot V - \cot A \\ \frac{\nu_A}{6V} &= \frac{2R_A}{h_A} = \cot A_I + \cot A_{II} = \cot V_A - \cot A \end{aligned}\right. \qquad \left(\cot V = \frac{\Sigma j^2}{4S}\right), \tag{T. 3}$$

V_A étant l'angle de Brocard de T_A.

10. Faisceau de Schoute et système normal de sphères de Tücker. — Les sphères $\mathcal{O}$ et $\mathcal{L}$ (idéale) du faisceau de Schoute sont orthogonales, leur sphère moyenne étant (OL); autrement dit $\mathcal{O}+\mathcal{L}=2(\mathrm{OL})$. La sphère courante $\mathcal{M}$, de centre M, est donnée par

$$\mathrm{M}=k\mathrm{L}+(1-k)\mathrm{O}, \qquad \mathcal{M}=k\mathcal{L}+(1-k)\mathcal{O}.$$

Soient L^* l'intersection de OL et Λ, θ le demi-diamètre apparent de $\mathcal{O}$ pour L^*. Par (16) et (23), on obtient aisément

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}&\overline{\mathrm{OL}}^2-\mathrm{R}^2=-\lambda^2=-\left(\frac{2\mathrm{S}}{\mathrm{P}}\right)\mathrm{R}^2\operatorname{tang}^2\psi=-4\mathrm{R}^2\operatorname{tang}\mathrm{U}\operatorname{tang}\psi,\\&\overline{\mathrm{OL}}^2=\mathrm{R}^2(1-4\operatorname{tang}\mathrm{U}\operatorname{tang}\psi),\end{aligned}\right.$$

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}&\lambda=\mathrm{R}\cos\theta=\mathrm{R}\sqrt{4\operatorname{tang}\mathrm{U}\operatorname{tang}\psi}\quad (^1),\\&\mathrm{OL}=\mathrm{R}\sin\theta,\qquad \mathrm{OL}^*=\frac{\mathrm{R}}{\sin\theta},\\&\mathrm{L}^*\mathrm{W}=\mathrm{L}^*\mathrm{W}^*=\mathrm{R}\cot\theta,\\&\mathrm{OW},\,\mathrm{OW}^*=\mathrm{R}\frac{1\mp\cos\theta}{\sin\theta}=\mathrm{R}\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2},\ \mathrm{R}\cot^2\frac{\theta}{2}.\end{aligned}\right.$$

D'après (24) et l'expression (M^2), la sphère $\mathcal{M}''$ de Tücker a pour noyau

$$\mathcal{M}''=\left(\mathrm{M}^2-\rho_0^2\vec{u}^2\right)=k^2\mathcal{L}''+2k(1-k)(\mathrm{OL})+(1-k)^2\mathcal{O},$$

$$\mathcal{M}''=\mathcal{M}+k^2(\mathcal{L}''-\mathcal{L})=\mathcal{M}+\frac{\overline{\mathrm{MO}}^2}{\overline{\mathrm{LO}}^2}(\mathcal{L}''-\mathcal{L}).$$

Les carrés des rayons, μ de $\mathcal{M}$, $\mu''=\rho_0^2$ de $\mathcal{M}''$, sont donc liés par

$$(27)\quad \mu''=\mu+\mathrm{K}.\overline{\mathrm{MO}}^2 \quad \text{avec}\quad \mathrm{K}=\frac{\mathcal{R}_{0p}^2+\lambda^2}{\overline{\mathrm{OL}}^2}=\frac{\operatorname{tang}^2\psi+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}.$$

Définissons la paire de points P′, P″ par la relation *algébrique* d'involution

$$(28)\quad \mathrm{WW}^*+\mathrm{K}.\mathrm{O}^2\equiv(1+\mathrm{K})\mathrm{P}'\mathrm{P}'',$$

entraînant la même relation entre les noyaux intérieurs correspon-

---

(1) Pour un triangle T, on a de même $\cos\theta=\sqrt{3}\operatorname{tang}\mathrm{V}$.

dants; d'où, pour les produits scalaires de sphères (avec le symbole |),

$$\mu = (M^2) \mid (WW^*),$$
$$\mu'' = (M^2) \mid (WW^* + K.O^2) = (1 + K).(M^2) \mid (P'P'') \equiv (1 + K)\mu'.$$

Les sphères de similitude des sphères de Tücker, prises deux à deux, forment le faisceau linéaire de sphères $\mathcal{M}' \equiv (M, \mu')$, de points limites P′, P″ *imaginaires conjugués*; (28) s'écrit encore

$$P'P'' = L^2 \cos^2\psi + O^2 \sin^2\psi,$$

donc

(29) $$P', P'' = e^{-\varepsilon i\psi}(\cos\psi . L + \varepsilon i \sin\psi . O) \qquad (\varepsilon = \pm 1;\ i = \sqrt{-1}).$$

Les coordonnées ($\mathfrak{T}$, n) de L et O étant respectivement $R \sin J \operatorname{tang}\psi$ et $R \cos J$, celles de P′ et P″ ont pour produit constant $d'_j d''_j = R^2 \sin^2\psi$, *les points* P′ *et* P″ *sont isogonaux* [1] *et sont les foyers d'un cercle* (normal) *de Brocard*, $\mathfrak{L}$, *lui-même cercle focal d'un ellipsoïde de Brocard*, $\mathcal{E}$, *de révolution autour de* OL, *aplati*, *inscrit à* $\mathfrak{T}$. *Le cercle* $\mathfrak{L}$ *appartient à la sphère* (OL) *de Brocard et est vu de* O *sous l'angle* 2ψ. *L'ellipsoïde* $\mathcal{E}$ *est l'enveloppe des sphères* $\mathcal{M}''$ *du système normal de Tücker.*

La relation (25) est, pour les sphères $\mathcal{O}$ et $\mathcal{L}''$, analogue à la relation d'Euler du triangle; il s'ensuit : *les tétraèdres ayant même sphère circonscrite* $\mathcal{O}$, *même point* L *de Lemoine et même valeur de* $\frac{S}{P}$ (donc portant des triangles associés capables d'être inscrits et circonscrits à des cercles respectivement égaux) *ont même ellipsoïde normal* $\mathcal{E}$ *et constituent le système des tétraèdres inscrits à* $\mathcal{O}$, *circonscrits à* $\mathcal{E}$.

11. Tétraèdres particuliers. — Pour un tétraèdre $\mathfrak{T}$ *isodynamique*, les j_i sont égaux, $J_i = \frac{\pi}{3}$, et $(17)_2$ se réduit à

(30) $$\Sigma\, Q_i(\chi_j) \equiv \Sigma(\cot B \cot C + \cot D \cot A) = \frac{3}{4}.$$

Pour $\mathfrak{T}$ *équifacial*, L coïncide avec O; les v_j sont égaux, ainsi que

[1] Les droites portant deux points inverses ($\mathfrak{T}$) forment un complexe du 3e ordre dont j'ai donné l'équation; celle-ci n'est pas nécessaire ici pour le complexe de l'inversion ($\mathfrak{T}$, n) considérée, auquel appartiennent OL et les axes associés.

les angles J ou les quantités χ_J; on a

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\chi_J^2 = \frac{P}{2S} = \frac{\mathcal{R}_0}{4\mathcal{R}}, \qquad \frac{\rho_J}{6V} = \frac{3S}{P}\chi_J = \frac{1}{2}\cot\psi = \cot\psi_J. \tag{31}$$

Un tétraèdre à la fois isodynamique et équifacial est *régulier*.

Dans le domaine réel, on a, *pour $\mathcal{T}$ quelconque*, $\mathcal{R} \geqq 2\mathcal{R}_0$ et, dans (25), $\overline{OL}^2 \geqq 0$, d'où pour les angles aigus positifs ψ et U, les inégalités

$$\cot\psi \geqq 2\cot U, \qquad \cot U \cot\psi \geqq 4; \tag{32}$$

les égalités limites de (32) caractérisent : la première *seule*, le tétraèdre *isodynamique*; la seconde *seule*, le tétraèdre *équifacial*, avec encore $\cot U = \sqrt{8P/S}$.

Pour

$$\cot\psi = 2\cot U = 2\sqrt{2}, \qquad \cot J = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$\mathcal{T}$ est *régulier*.

Dans le cas $\mathcal{T}$ *isodynamique*, il existe un *système de sphères de Tücker-Thébault* (1) obtenu en remplaçant dans (27) $\mathcal{R}_{0p}$ par

$$\mathcal{R}_p = 2\mathcal{R}_{0p} = R \operatorname{tang} U,$$

donc ψ par U; l'ellipsoïde correspondant n'est plus inscrit à $\mathcal{T}$.

12. Second système desmique fondamental. — Soit $\mathcal{T}_t \equiv A_t B_t C_t D_t$, de faces α_t, β_t, γ_t, δ_t, le tétraèdre tangentiel de $\mathcal{T}$; dans le système $(\mathcal{T}, p)$, où $J' = \rho_J J$, $\iota' = \rho_J^{-1}\iota$, je désigne ses sommets et ses faces par J'_t et ι'_t. En posant $\gamma_i = \cos J_i (i = 1, 2, 3)$ et tenant compte de $\Sigma\sigma_i\gamma_i = 2P$, $\sigma_1\gamma_2 + \sigma_2\gamma_1 = \sigma_3$, etc, on obtient sans peine

$$\left\{\begin{array}{llll} P.A' = & \sigma_3 B'_t + \sigma_2 C'_t + \sigma_1 D'_t, & 2A'_t = -A' + \gamma_3 B' + \gamma_2 C' + \gamma_1 D', \\ P.B' = \sigma_3 A'_t & + \sigma_1 C'_t + \sigma_2 D'_t, & 2B'_t = \gamma_3 A' - B' + \gamma_1 C' + \gamma_2 D', \\ P.C' = \sigma_2 A'_t + \sigma_1 B'_t & + \sigma_3 D'_t, & 2C'_t = \gamma_2 A' + \gamma_1 B' - C' + \gamma_3 D', \\ P.D' = \sigma_1 A'_t + \sigma_2 B'_t + \sigma_3 C'_t, & & 2D'_t = \gamma_1 A' + \gamma_2 B' + \gamma_3 C' - D'. \end{array}\right. \tag{33}$$

(1) *Cf.* V. Thébault, *Sur la géométrie du tétraèdre* (*Mathesis*, 1932, supplément).

Ces relations entre les J' et les J'_t sont aussi celles entre les ι'_t et les ι'; mais ce sont aussi celles données en (15)*, auxquelles satisfont, d'après (20), les quantités $\frac{\nu_J}{6V}$ et χ_J. Les relations (33) sont en effet valables pour les coordonnées (p) *homogènes*, et pour les coordonnées (p) *absolues réduites* $\varpi_J^0 = \frac{\varpi_J}{2R}$, les masses *modifiées* des points sont les produits par $2R$ des masses initiales et deviennent exactement les $\frac{\nu_J}{6V}$ pour les points J, les χ_J pour les J_t, et aussi $\cot\psi$ pour le point L, etc., de sorte que *les relations* (20) *sont conséquences de* (33). Les combinaisons linéaires des relations $(33)_2$, à partir des J'_t, suivant les équations (1), mettent en évidence, à côté de $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_p$, $\mathcal{T}_a$, *son système desmique polaire* ($\mathcal{O}$), soit $\mathcal{T}_t$, $\mathcal{T}_p$, $\mathcal{T}_{at}$, où $\mathcal{T}_{at}$ est le tangentiel de l'adjoint $\mathcal{T}_a$ de $\mathcal{T}$. On a en particulier

$$(34) \qquad P.\Sigma J' = S.\Sigma J'_t, \qquad 2\Sigma J'_t = (\Sigma\gamma_i - 1)\Sigma J' \qquad \left(\Sigma\gamma_i - 1 = \frac{2P}{S}\right),$$

etc., dont les relations (23) *entre masses* sont les conséquences. Considérons encore les relations

$$(35) \qquad \begin{cases} P(B'+C') = \sigma_1(B'_t + C'_t) + (\sigma_2+\sigma_3)(D'_t + A'_t), & \ldots, \\ P(B'-C') = \sigma_1(C'_t - B'_t) + (\sigma_3-\sigma_2)(A'_t - D'_t), & \ldots, \end{cases}$$

et leurs inverses, qui traduisent les alignements et concours relatifs aux systèmes desmiques. D'où : *les sommes ou différences de deux des* J' $\left[\text{ou } \iota'_t, \textit{ ou } \frac{\nu_J}{6V}\right]$ *sont des fonctions linéaires homogènes* (avec coefficients en σ_i ou γ_i) *de deux quantités analogues relatives aux* J'_t [ou ι', ou χ_J], *et inversement.*

Comme il a été dit au n° **4**, *les relations linéaires* (33), (34), (35) *s'étendent encore aux sphères ayant pour centres les points en cause et orthogonales à* $\mathcal{O}$, sphères représentées par leurs noyaux intérieurs affectés des mêmes masses que ces points dans lesdites relations, à savoir $\left(\frac{\nu_J}{6N}\right)(J^2)$ et $\chi_J\left(J_t^2 - R^2\tan^2 J.\vec{u}^2\right)$ substitués à J' et J'_t respectivement (pour les coordonnées ϖ_J^0). A côté des sphères d'Apollonius, *normales* ou *de* 1^re^ *espèce*, $\mathcal{N}_i$, $\mathcal{N}'_i$, c'est-à-dire

$$(36) \qquad \mathcal{N}_1 \equiv \frac{(\nu_C C^2 - \nu_B B^2)}{6V}, \qquad \mathcal{N}'_1 \equiv \frac{(\nu_A A^2 - \nu_D D^2)}{6V}, \qquad \ldots,$$

s'introduit le groupe de sphères d'Apollonius, *principales* ou *de 2ᵉ espèce*, $\mathcal{S}_i$, $\mathcal{S}'_i$, soit

$$(37)\qquad \mathcal{S}_1 \equiv \cot C\left(C_i^2 - R^2 \operatorname{tang}^2 C . \vec{u}^2\right) - \cot B\left(B_i^2 - R^2 \operatorname{tang} B . \vec{u}^2\right), \mathcal{S}'_1, \text{ etc.};$$

entre ces deux groupes de sphères, les relations $(35)_2$ donnent

$$(38)\qquad -P\mathcal{M}_1 = \sigma_1 \mathcal{S}_1 + (\sigma_3 - \sigma_2)\mathcal{S}_1, \qquad \ldots .$$

13. Tétraèdre métaharmonique d'un point pour $\mathcal{E}$. — Les faces d'un anatétraèdre $\mathcal{E}' \equiv$ M.ABCD, c'est-à-dire (n° **8**) les sphères Ω_J annexes de son pôle M, coupant la sphère $\mathcal{O}$ sous les angles *algébriques* J', l'inversion (M, p), où $p = \overline{MO}^2 - R^2$, transforme $\mathcal{E}'$ en un tétraèdre $\mathcal{E}_m$, *métaharmonique* de $\mathcal{E}$ pour M (et inscrit dans $\mathcal{O}$), dont les angles fondamentaux sont, *aux signes près*, les angles J_i et J' de $\mathcal{E}'$. Désignons par ω_J le centre de Ω_J et posons $\overline{O\omega_J} = \xi_J$, mesure algébrique dans le sens de d_J. Comme $p = 2\xi_J d_J$, $\xi_J = \dfrac{R(\cot J' - \cot J)}{\sin J}$, on obtient

$$(39)\qquad \frac{p}{2R} = \frac{d_J \xi_J}{R} = \frac{\varpi_J}{\cot J' - \cot J} = \frac{\Sigma \varpi_J}{\cot U' - \cot U},$$

où $\cot U' = \Sigma \cot J'$ (U' angle de Brocard pour $\mathcal{E}'$).

Laissant de côté diverses conséquences relatives à l'inversion ($\mathcal{E}$, n) et à certains systèmes de coordonnées angulaires de points *ou de sphères* [quand la relation (19) n'est pas satisfaite] qui apparaissent ici, je remarque que, d'après (39) et avec des conventions de signes convenables, *les coordonnées principales absolues du point* M *sont égales dans les tétraèdres $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_m$, relatif à ce point.* En particulier *le tétraèdre $\mathcal{E}_a \equiv (\mathcal{E}_m)_L$ relatif à* L *conserve ce point comme point de Lemoine, donc aussi* (n° **10**) *le système normal de Tücker de $\mathcal{E}$.* En posant, pour $(\mathcal{E}')_L$, $\Delta_J = \Delta$, (19) donne $2\Delta + \cot U = 0$, ou

$$(40)\qquad \cot J' + \cot(-J) = -\frac{1}{2}\cot U,$$

J' et (— J) se rapportant respectivement aux anatétraèdres de L et de O. Pour $\mathcal{T}_a$, $J_a = J' = -J$, et (22) donne

$$(41) \qquad 2\cot J_a = -\cot U_J, \qquad \cot U_a = -\cot U.$$

14. Tétraèdres $\mathcal{T}_m$ équibrocardiens et faisceau de Schoute. — La formule (39) donne l'identité

$$(42) \qquad (n-1)p\cot U - 2R\Sigma\varpi_J = 0, \qquad \text{où} \quad n = \frac{\cot U'}{\cot U};$$

$p = 0$ est l'équation de $\mathcal{O}$, $\Sigma\varpi_J = 0$ celle du plan Λ de Lemoine, donc (42) *définit, pour les valeurs constantes de n, les sphères du faisceau de Schoute; à deux valeurs opposées de n correspondent deux sphères inverses* ($\mathcal{O}$). *Les tétraèdres métaharmoniques de* $\mathcal{T}$ *pour les points d'une sphère de Schoute sont équibrocardiens* (mêmes angles U et ψ). Avec la puissance p' de M pour la sphère $\mathcal{L}$, (42) prend la forme simple

$$(42') \qquad p' - np = 0 \qquad \text{ou} \qquad p'\cot U - p\cot U' = 0;$$

le rapport des cotangentes des angles de Brocard U, U′ (de même ψ, ψ') *de* $\mathcal{T}$ *et de* $\mathcal{T}' \equiv$ M.ABCD *est celui des puissances de* M *pour les sphères* $\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{L}$ *du faisceau de Schoute.* En particulier, $n = 1$ pour Λ, -1 pour (OL); les centres isodynamiques W, W* donnent, d'après (26),

$$n = \mp\cos\theta = \mp\sqrt{4\,\mathrm{tang}\,U\,\mathrm{tang}\,\psi}, \qquad \cot U' = \mp\sqrt{\frac{8P}{S}},$$

donc (n° **11**) *les tétraèdres métaharmoniques de* $\mathcal{T}$ *pour les centres isodynamiques sont équifaciaux.*

Une méthode élémentaire classique permet de compléter les résultats précédents; les formules de l'inversion (M, p) entraînent en effet

$$(43) \qquad (\rho_J)_m = |p^3|\left(\frac{\overline{MJ}^2}{\Pi}\right)\rho_J \qquad \text{avec} \quad \Pi = \overline{MA}^2.\overline{MB}^2.\overline{MC}^2.\overline{MD}^2.$$

Or, en acceptant ici $(J_i)_m = -J_i$, on a

$$(12RV)^3 = P\rho_A\rho_B\rho_C\rho_D, \qquad \left(\frac{V_m}{V}\right)^3 = \frac{(\rho_A\rho_B\rho_C\rho_D)_m}{\rho_A\rho_B\rho_C\rho_D},$$

$$(44) \qquad \frac{\cot U_m}{\cot U} = \frac{\cot\psi_m}{\cot\psi} = \frac{V\,\Sigma(\rho_J)_m}{V_m\Sigma\rho_J} = -\frac{\Sigma\rho_J\overline{MJ}^2}{|p|\,\Sigma\rho_J};$$

formule équivalente, avec les conventions faites, à (42'), car

$$(45)\qquad \mathcal{L} \equiv \frac{\Sigma v_J(J^2)}{\Sigma v_J}, \qquad p' = \frac{\Sigma v_J \overline{MJ}^2}{\Sigma v_J}.$$

15. Compléments. — Le noyau intérieur d'une sphère orthogonale à $\mathcal{O}$ est de la forme $\Sigma z_J(J^2)$, avec coefficients z_J arbitraires. Les sphères d'Apollonius de 1re espèce ayant les noyaux $(v_A A^2 - v_B B^2)$, etc. (à un facteur près), les centres isodynamiques W, W* sont définis par les équations

$$(46)\qquad v_A \overline{MA}^2 = v_B \overline{MB}^2 = v_C \overline{MC}^2 = v_D \overline{MD}^2,$$

et le réseau de sphères par W, W* a pour équation

$$(47)\qquad \Sigma x_J v_J \overline{MJ}^2 = 0 \qquad \text{avec} \quad \Sigma x_J = 0$$

ou

$$(47')\qquad \Sigma x_J(v_J)_m = 0, \qquad \Sigma x_J = 0,$$

d'après (43). L'égalité des $(v_J)_m$ pour W et W* exprime encore l'équifacialité des tétraèdres $\mathcal{T}_m$ correspondants. *Chaque sphère du réseau par* W, W* *est définie par une relation linéaire homogène, à coefficients constants, entre les différences des quantités* $v_J \overline{MJ}^2$ (3 différences indépendantes), *ou celles des* $(v_J)_m$*; pour chaque sphère d'Apollonius de 1re espèce, une de ces différences est nulle.* Mais on peut aussi utiliser les différences des quantités $\cot J_m$.

En posant, selon les formules (15)*, $Py_J = P_J(x_J)$, le réseau en cause est encore défini par

$$(48)\qquad \Sigma y_J \cot J\left(\overline{MJ}_t^2 - R^2 \operatorname{tang}^2 J\right) = 0, \qquad \Sigma y_J = 0$$

ou

$$(48')\qquad \Sigma y_J \cot J_m = 0, \qquad \Sigma y_J = 0;$$

pour chaque sphère d'Apollonius de 2e espèce, une des différences entre quantités $\cot J_m$ *est nulle*, et par (48) ou (48') une sphère du réseau par W, W* est caractérisée comme précédemment. Dans le premier cas, on utilisait les sphères-points (J^2), donc les puissances $q_J = \overline{MJ}^2$; dans le second, les sphères de base orthogonales à $\mathcal{O}$ ont pour centres les sommets J_t de $\mathcal{T}_t$, d'où les puissances $q'_J = \overline{MJ}_t^2 - R^2 \operatorname{tang}^2 J$. En adjoignant aux sphères de l'un ou de l'autre groupe la sphère $\mathcal{O}$ orthogonale, on obtient un pentasphère de repère et un système de coordonnées pentasphériques p, q_J, ou p, q'_J, pour un point M; système qui peut être étendu, comme on sait, aux coordonnées d'une sphère, employé sous la forme absolue précédente ou sous forme homogène, et encore modifié par multiplication des quantités p, q_J [ou p, q'_J] par des facteurs arbitraires. L'interprétation des équations (42'), (47'), (48') dépend ainsi d'une méthode générale de géométrie anallagmatique sur laquelle je n'insiste pas davantage.