JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. CERF

Les équations linéaires aux dérivées partielles et la méthode de la variation des constantes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 18 (1939), p. 291-302.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__291_0>

Les équations linéaires aux dérivées partielles et la méthode de la variation des constantes ;

PAR G. CERF.

Il est connu depuis longtemps que les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes ont, par rapport à la méthode de la variation des constantes, un comportement différent de celui des équations linéaires. Laplace en a donné un exemple célèbre qu'il a qualifié lui-même : « plus curieux qu'utile ». Nous allons montrer que les résultats obtenus par Darboux sur les équations de Laplace, en particulier ceux qui sont exposés dans le Chapitre VIII du Livre IV, sont une conséquence directe de l'application de cette méthode générale. Et il sera aisé de concevoir le processus d'une application de la même méthode à des équations linéaires d'ordre supérieur à 2, à deux variables indépendantes, ou à des équations linéaires à plus de deux variables indépendantes. Cela sera développé ailleurs et ne vaut, du reste, que pour des classes particulières d'équations.

1. Pour la commodité de la comparaison avec l'ouvrage de Darboux, nous prendrons l'équation sous la forme

$$\mathcal{F}(z) = s + ap + bq + cz = 0; \tag{1}$$

mais les développements qui suivent s'appliquent presque immédiatement à l'équation linéaire générale.

Supposons que l'on connaisse une intégrale complète de (1) :

$$z = \sum_1^5 {}_i \lambda_i z_i; \tag{2}$$

$z_1, \ldots, z_5$ sont des solutions particulières, $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ des paramètres, et les équations (2), (3), (4)

$$\left\{ \begin{aligned} p &= \sum {}_i \lambda_i p_i, \\ q &= \sum {}_i \lambda_i q_i, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} r &= \sum {}_i \lambda_i r_i, \\ t &= \sum {}_i \lambda_i t_i \end{aligned} \right. \tag{4}$$

permettent de calculer les λ_i; on suppose donc que le déterminant H est différent de o

$$H = \begin{vmatrix} r_1 & t_1 & p_1 & q_1 & z_1 \\ r_2 & t_2 & \ldots & \ldots & z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_5 & t_5 & \ldots & \ldots & z_5 \end{vmatrix}.$$

Posons

$$u_i = \begin{Vmatrix} r & t & p & q & z \\ r_\rho & t_\rho & p_\rho & q_\rho & z_\rho \end{Vmatrix}_i,$$

dans le deuxième membre est figuré un déterminant du 5^e ordre, ρ étant successivement l'un des cinq premiers nombres sauf i. La résolution des équations linéaires en λ_i donne alors

$$\lambda_i = (-1)^{i+1} \frac{u_i}{H}. \tag{5}$$

2. Proposons-nous maintenant de déterminer les λ_i en fonction de x et de y pour que l'expression qui figure dans le 2^e membre de (2) représente une intégrale de (1). Le procédé est classique : nous formons le système

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum {}_i z_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \qquad \sum {}_i p_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \qquad \sum {}_i p_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0, \\ &\sum {}_i z_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0, \qquad \sum {}_i q_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0, \qquad \sum {}_i q_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Pour toute solution de (1) (linéairement distincte des z_i) les λ_i fournis par (5) sont des solutions du système (6).

Réciproquement, cinq fonctions λ_i satisfaisant à (6), procurent, par (2), une solution de (1).

3. Il est facile de vérifier que chacun des λ_i solution de (6) satisfait à une équation aux dérivées partielles du 2ᵉ ordre analogue à (1). L'expression (5) de λ_i est, en effet linéaire par rapport à r, t, p, q, z. Égalée à o, elle constitue une équation linéaire aux dérivées partielles qui admet avec (1) quatre solutions communes linéairement indépendantes : ceux des z qui n'ont pas l'indice i. Soit (7) cette équation

$$\mathcal{G}_i(z) = h_i r - k_i t + \ldots = 0 \tag{7}$$

avec

$$h_i = \| \, t_\rho \quad p_\rho \quad q_\rho \quad z_\rho \, \|_i, \qquad k_i = \| \, r_\rho \quad p_\rho \quad q_\rho \quad z_\rho \, \|_i,$$

ρ est successivement l'un des 5 premiers nombres sauf i.

Formons le système S

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} & \mathcal{F}(z) = 0, & \mathcal{G}_i(z) = 0, & \\ \dfrac{d\mathcal{F}}{dx} = 0, & \dfrac{d\mathcal{F}}{dy} = 0, & \dfrac{d\mathcal{G}_i}{dx} = 0, & \dfrac{d\mathcal{G}_i}{dy} = 0, \end{array} \right.$$

où $\dfrac{d}{dx}$ et $\dfrac{d}{dy}$ constituent le symbole de dérivation totale par rapport à x ou à y respectivement.

Ce système S est complètement intégrable : les deux équations (1) et (7) n'admettent pas de directions communes caractéristiques, (en supposant h_i et k_i différents de o); les 4 équations du 3ᵉ ordre de S sont donc linéairement indépendantes par rapport aux dérivées de cet ordre; le nombre maximum de constantes dont peut dépendre la solution d'un tel système est 4; c'est effectivement ce qui se produit.

Observons maintenant que l'expression

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}_i] = \frac{d^2\mathcal{G}_i}{dx\,dy} - h_i \frac{d^2\mathcal{F}}{dx^2} + k_i \frac{d^2\mathcal{F}}{dy^2}$$

est seulement du 3ᵉ ordre; la relation

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}_i] = 0 \tag{8}$$

doit être, par conséquent, compatible algébriquement avec les équations de S; cela revient à dire que $[\mathcal{F}, \mathcal{G}_i]$, à moins d'être identiquement nul, s'exprime linéairement au moyen des premiers membres de ces équations. Les équations du 4ᵉ ordre déduites de S se réduisent alors à 5 linéairement indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé, celles du 5ᵉ ordre à 6, etc....

Réciproquement la condition que S est complètement intégrable peut s'exprimer par le fait que (8) est compatible algébriquement avec ses équations.

4. Considérons maintenant le système $\overline{\mathrm{S}}$

$$(\overline{\mathrm{S}}) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} & \mathcal{F}=0, & \mathcal{G}_i=\lambda_i, & \\ \dfrac{d\mathcal{F}}{dx}=0, & \dfrac{d\mathcal{F}}{dy}=0, & \dfrac{d\mathcal{G}_i}{dx}=\dfrac{\partial\lambda_i}{\partial x}, & \dfrac{d\mathcal{G}_i}{dy}=\dfrac{\partial\lambda_i}{\partial y}, \end{array} \right.$$

λ_i étant pour l'instant une fonction inconnue de x et de y que nous allons chercher à déterminer pour que $\overline{\mathrm{S}}$ soit complètement intégrable. Il faut et il suffit pour cela que les 6 équations du 4ᵉ ordre déduites de $\overline{\mathrm{S}}$ se réduisent à 5, linéairement indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé. En faisant un raisonnement analogue à celui que nécessite la réciproque que nous venons d'énoncer, on constate que cela entraîne que

$$(9) \qquad [\mathcal{F}, \mathcal{G}_i-\lambda_i]=0$$

soit conséquence algébrique de $\overline{\mathrm{S}}$; en raison de (8), (9) conduit à une relation linéaire et homogène en λ_i, ses dérivées du 1ᵉʳ ordre et $\dfrac{\partial^2\lambda_i}{\partial x\,\partial y}$, cette dernière y figurant certainement; soit

$$(10) \qquad \Phi_i(\lambda)=0$$

l'équation de Laplace qui fournit la condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire λ_i afin que $\overline{\mathrm{S}}$ soit complètement intégrable.

En considérant les différents indices i, on sera conduit à 5 équations; nous allons les résoudre par l'intermédiaire d'une seule autre de même espèce, et de quadratures.

5. Posons

$$\Gamma(z)=\left\| \begin{matrix} \alpha & r & t & p & q & z \\ \alpha_\rho & r_\rho & t_\rho & p_\rho & q_\rho & z_\rho \end{matrix} \right\|_{\rho=1,2,3,4,5} = \mathrm{H}\alpha+\ldots,$$

$$\Delta(z)=\left\| \begin{matrix} \delta & r & t & p & q & z \\ \delta_\rho & r_\rho & t_\rho & p_\rho & q_\rho & z_\rho \end{matrix} \right\|_{\rho=1,2,3,4,5} = \mathrm{H}\delta+\ldots,$$

α, β, γ, δ désignent les dérivées du 3ᵉ ordre de z. Rappelons que nous supposons $\mathrm{H} \neq 0$; nous verrons plus loin ce qui se passe dans le cas contraire.

Déduisons en premier lieu des équations (1) et (11)

$$(11) \qquad \Gamma(z) = 0,$$

un système complètement intégrable. Les deux équations

$$\frac{d^2\mathcal{F}}{dx^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\Gamma}{dy} = 0$$

ne contiennent chacune qu'une dérivée du 4ᵉ ordre : $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = p_{31}$; on en déduit une nouvelle équation d'ordre inférieur à 4, soit $\Gamma_1(z) = 0$, que nous supposerons d'abord du 3ᵉ ordre même en tenant compte de (1) et de ses dérivées premières

$$\Gamma_1(z) = \frac{d\Gamma}{dy} - \mathrm{H}\frac{d^2\mathcal{F}}{dx^2}.$$

Le système

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}(z) = 0, \\ \frac{d\mathcal{F}}{dx} = 0, \qquad \frac{d\mathcal{F}}{dy} = 0, \qquad \Gamma(z) = 0, \qquad \Gamma_1(z) = 0 \end{cases}$$

est complètement intégrable : il admet en effet les 5 solutions z_i linéairement indépendantes. Parmi les équations du 4ᵉ ordre qu'on en déduit, il ne s'en trouve que 5 qui soient indépendantes : les 3 déduites de $\mathcal{F}$, $\frac{d\Gamma}{dx} = 0$ et $\frac{d\Gamma_1}{dx} = 0$. Cela est d'accord avec le fait que l'équation

$$[\mathcal{F}, \Gamma] = \frac{d^2\Gamma}{dx\,dy} - \mathrm{H}\frac{d^3\mathcal{F}}{dx^3} = 0,$$

vérifiée par les solutions de T, est seulement du 4ᵉ ordre et doit être conséquence algébrique des équations de ce système, et cela explique ce qui se passe pour $\frac{d\Gamma_1}{dx} = 0$.

6. Considérons maintenant les deux équations

$$\mathcal{F}(z) = 0, \qquad \Gamma(z) = \theta,$$

θ étant une fonction de x et de y que nous allons déterminer pour qu'elles admettent des solutions dépendant de 5 constantes arbitraires. L'équation analogue à $\Gamma_1(z) = 0$ est ici

$$\overline{\Gamma}_1(z) = \frac{d(\Gamma - \theta)}{dy} - \mathrm{H}\frac{d^2\mathcal{F}}{dx^2} = 0.$$

Formons le système $\overline{\mathrm{T}}$

$$(\overline{\mathrm{T}}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} = 0, \\ \dfrac{d\mathcal{F}}{dx} = 0, \qquad \dfrac{d\mathcal{F}}{dy} = 0, \qquad \Gamma = \theta, \qquad \overline{\Gamma}_1 = 0. \end{array} \right.$$

La condition pour qu'il soit complètement intégrable s'exprime, d'après ce qui précède, par une relation

$$(12) \qquad \mathrm{L}(\theta) = 0,$$

L étant linéaire en θ, $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x \partial y}$.

A toute solution de (12) correspondent des solutions de (1) dépendant de 5 constantes arbitraires.

7. Ces solutions, la première étant connue, peuvent s'obtenir par de simples quadratures; nous allons les déterminer sous la forme (2) par l'intermédiaire des λ_i.

Rappelons que

$$(5) \qquad \lambda_i = (-1)^{i+1}\frac{u_i}{\mathrm{H}},$$

et introduisons les fonctions auxiliaires l_i et m_i déterminées par chacun des systèmes

$$\begin{array}{ll} \sum_i l_i z_i = 0, & \sum_i m_i z_i = 0, \\ \sum_i l_i p_i = 0, & \sum_i m_i p_i = 0, \\ \sum_i l_i q_i = 0, & \sum_i m_i q_i = 0, \\ \sum_i l_i t_i = 0, & \sum_i m_i r_i = 0, \end{array}$$

ce qui est possible puisque nous avons supposé h_i et k_i différents de o. En développant le déterminant $\Gamma(z)$, on trouve

$$l_i\theta = (-1)^i\left[\sum_j l_j \alpha_j . u_i - \sum_j l_j r_j \left\| \begin{matrix} \alpha & t & p & q & z \\ \alpha_\rho & t_\rho & p_\rho & q_\rho & z_\rho \end{matrix} \right\|_i \right],$$

ρ étant chacun des 5 premiers nombres sauf i.

Or

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = \| \alpha_\rho \quad t_\rho \quad p_\rho \quad q_\rho \quad z_\rho \|_{\rho=1,2,3,4,5} - b\mathrm{H} = \sum j l_j \alpha_j \frac{h_i}{l_i} - b\mathrm{H};$$

$$\mathrm{H} = \frac{\sum j l_j r_j}{l_i} h_i; \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x} = \left\| \begin{matrix} \alpha & t & p & q & z \\ \alpha_\rho & t_\rho & p_\rho & q_\rho & z_\rho \end{matrix} \right\|_i - b u_i.$$

Par conséquent

$$\theta = (-1)^{i+1} \frac{1}{h_i} \left[\mathrm{H} \frac{\partial u_i}{\partial x} - u_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} \right] = \frac{\mathrm{H}^2}{h_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}.$$

En introduisant de même une fonction σ et la relation

$$\Delta(z) = \sigma,$$

on arrive à une relation analogue, donc

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = \frac{h_i}{\mathrm{H}^2} \theta, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = \frac{k_i}{\mathrm{H}^2} \sigma. \tag{14}$$

Mais, pour justifier l'affirmation du début de ce paragraphe, il faut trouver une nouvelle relation où ne figurent que λ_i, θ et leurs dérivées. Nous développons $\Gamma(z)$ d'une autre façon, et alors

$$\theta = \frac{(-1)^i}{m_i} \left[\sum j m_j \alpha_j \left\| \begin{matrix} r & t & p & q & z \\ r_\rho & t_\rho & p_\rho & q_\rho & z_\rho \end{matrix} \right\|_i + \sum j m_j t_j \left\| \begin{matrix} \alpha & r & p & q & z \\ \alpha_\rho & r_\rho & p_\rho & q_\rho & z_\rho \end{matrix} \right\|_i \right]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + 3a\theta = \left\| \begin{matrix} \alpha & r & \delta & p & q & z \\ \alpha_\rho & r_\rho & \delta_\rho & p_\rho & p_\rho & z_\rho \end{matrix} \right\|_{\rho=1,2,3,4,5}$$

$$= \frac{(-1)^i}{m_i} \left\{ \sum j m_j \alpha_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + a u_i \right) + \frac{\sum j m_j \delta_j}{\sum j m_j t_j} \left[(-1)^i m_i \theta - \sum j m_j \alpha_j u_i \right] \right\}.$$

Et après de faciles transformations

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + \theta \left(a - \frac{1}{\mathrm{H}} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} \right) = \frac{(-1)^i}{m_i} \sum j m_j \alpha_j \left[\frac{\partial u_i}{\partial y} - u_i \left(a + \frac{1}{\mathrm{H}} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} \right) \right];$$

en posant

$$\mathcal{H} = \| \alpha_\rho \quad r_\rho \quad p_\rho \quad q_\rho \quad z_\rho \|_{\rho=1,2,3,4,5},$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y} - a\lambda_i = (-1)^{i+1} \frac{h_i}{\mathrm{H}\mathcal{H}} \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} + \theta \left(a - \frac{1}{\mathrm{H}} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} \right) \right]. \tag{15}$$

Les relations (13) et (15) permettront de calculer λ_i comme il a été annoncé.

8. Ces résultats, établis en se servant de la connaissance de 5 solutions de (1), peuvent être étendus, de manière différente, au cas où l'on se sert de moins ou de plus de 5 solutions.

Cas d'une solution. — Nous posons par exemple

$$\Gamma(z) = \begin{vmatrix} p & z \\ p_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

et nous cherchons à former un système analogue à T; au lieu de $\Gamma(z) = 0$ nous écrivons

$$(16) \qquad p - \frac{p_1}{z_1} z = 0,$$

qui donne

$$s - \left(\frac{p_1}{z_1}\right) q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_1}{z_1}\right) z = 0,$$

et par (1)

$$(17) \qquad \left(b + \frac{p_1}{z_1}\right) q - \left[c + a\frac{p_1}{z_1} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_1}{z_1}\right)\right] z = 0.$$

Si $b + \frac{p_1}{z_1} \neq 0$, les deux équations (16) et (17) sont en involution, et leurs solutions communes, dépendant d'une constante arbitraire, sont aussi des solutions de (1).

Pour que l'équation $\Gamma(z) = \theta$ forme avec (1) un système complètement intégrable, il faut et il suffit que θ soit solution d'une équation telle que (12).

Le coefficient de q dans (17) est nul si $p_1 + b_1 z_1 = 0$; il convient donc de rechercher si l'équation

$$(18) \qquad p + bz = 0$$

a des solutions communes avec (1).

Des calculs simples conduisent à la relation

$$z\left(\frac{\partial b}{\partial y} + ab - c\right) = 0.$$

Si l'invariant $\frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$ est différent de o, $z = 0$ est la seule solution commune à (1) et à (18); s'il est nul, (1) admet (18) comme intégrale intermédiaire.

Nous posons ici

$$\theta = p + bz, \tag{19}$$

et constatons que (19) admet des solutions communes avec (1) à la condition nécessaire et suffisante que θ vérifie une équation linéaire du premier ordre; ces solutions communes sont naturellement toutes celles de (19).

9. *Cas de $m+n$ solutions.* — Soient $z_1 \ldots z_{m+n}$; nous supposons qu'elles ne satisfont pas toutes à une même équation du 2ᵉ ordre. Nous posons ici (et supposons $m \geqq n$)

$$\Gamma(z) = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^m z}{\partial x^m} & \cdots & \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial^n z}{\partial y^n} & \cdots & \dfrac{\partial z}{\partial y} & z \\ \dfrac{\partial^m z_\rho}{\partial x^m} & \cdots & \dfrac{\partial z_\rho}{\partial x} & \dfrac{\partial^n z_\rho}{\partial y^n} & \cdots & \dfrac{\partial z_\rho}{\partial y} & z_\rho \end{matrix} \right\|_{\rho=1,2,\ldots,m+n}$$

$$= \mathrm{H}\frac{\partial^m z}{\partial x^m} + \mathrm{H}'\frac{\partial^n z}{\partial y^n} + \ldots,$$

H et H′ étant calculés sur les z_i.

L'équation

$$\Gamma(z) = 0 \tag{20}$$

admet avec (1) des solutions communes dépendant de $m+n$ constantes arbitraires. Nous supposons d'abord $\mathrm{H} \neq 0$.

Si $m = n$, nous pouvons déduire de (1) et (20) un système tel que S, constitué par (1) et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$, par (20) et ses dérivées du 1ᵉʳ ordre. Les équations d'ordre $m+1$ en z de ce système sont au nombre de $m+2$, égal à celui des dérivées de z de cet ordre; elles sont distinctes, car les deux équations (1) et (20) n'ont pas de directions communes caractéristiques. Le nombre total des équations considérées est $\frac{m(m+1)}{2} + 3$; le nombre maximum de constantes dont puisse dépendre la solution d'un tel système est

$$\frac{(m+2)(m+3)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} - 3 = 2m.$$

Le système S est donc complètement intégrable.

Il en résulte que la relation

$$[\mathcal{F}, \Gamma] = \frac{d^2\Gamma}{dx\,dy} - \mathrm{H}\frac{d^m\mathcal{F}}{dx^m} - \mathrm{H}'\frac{d^n\mathcal{F}}{dy^n} = 0, \qquad m = n,$$

dont le premier membre est seulement de l'ordre $m+1$ en z et qui doit être vérifiée par toutes les solutions de S, est une conséquence algébrique des équations de ce système.

Si l'on remplace maintenant (20) par

$$\Gamma(z) = \theta, \tag{21}$$

par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut, on constate encore que les deux équations (1) et (21) donneront naissance à un système complètement intégrable sous la condition nécessaire et suffisante que θ satisfasse à une équation telle que (12).

Si maintenant $m > n$, les équations d'ordre $m+1$ de S ne sont pas indépendantes par rapport aux dérivées de cet ordre.

Ici encore posons

$$\Gamma_1(z) = \frac{d\Gamma}{dy} - \mathrm{H}\frac{d^{m-1}\mathcal{F}}{dx^{m-1}} = 0. \tag{22}$$

Cette équation est en général d'ordre m en z, mais elle ne contient pas la dérivée p_{0m}, on en déduit donc, grâce à $\Gamma = 0$ et aux dérivées de $\mathcal{F}$ d'ordre m en z une équation d'ordre $m-1$, dont on considérera la dérivée par rapport à y, qui donnera une équation d'ordre $m-2$, $\Gamma_2 = 0$, et ainsi de suite, jusqu'au moment où apparaîtra la dérivée de l'ordre de l'équation introduite prise complètement par rapport à y; à partir de là les dérivées successives de l'équation par rapport à y sont à considérer et permettent, avec celles qui sont dérivées de $\mathcal{F}$, d'écrire autant d'équations que de dérivées de chaque ordre; on introduit ainsi $m-n$ équations jusqu'à l'ordre $m+1$ en z. On a donc au total $\frac{m(m+1)}{2} + 3 + \overline{m-n}$ équations distinctes qui toutes doivent être vérifiées par les $m+n$ solutions z_i; elles forment donc un système complètement intégrable, puisque l'excès du nombre des dérivées de z jusqu'à l'ordre $m+1$ (en y comprenant z) sur ce nombre d'équations est $\overline{m+n}$. Soit T le système obtenu. Nous n'avons pas tenu compte de $\frac{d\Gamma_1}{dx} = 0$ qui doit donc être conséquence algébrique de T et il en est de même de

$$[\mathcal{F}, \Gamma] = \frac{d^2\Gamma}{dx\,dy} - \mathrm{H}\frac{d^m\mathcal{F}}{dx^m} = 0, \tag{23}$$

dont on aperçoit la relation étroite avec la précédente relation. Le système T peut être formé sans qu'on sache qu'il admet les intégrales z_i : la relation (23) est sa condition de complète intégrabilité.

En portant son attention sur les dérivations par rapport à y, on constate que (23) ne peut être conséquence algébrique d'équation $\Gamma_i = 0$ pour lesquelles $i > 1$.

Dès lors, en écrivant de nouveau (21), on arrivera pour θ à la même conclusion que précédemment; et à toute solution de l'équation telle que (12), à laquelle on aboutit, correspondent, par quadratures, des solutions de (1) dépendant de $m + n$ constantes arbitraires : la méthode pour le montrer est celle qui a été suivie plus haut.

10. Nous avons à examiner le cas où, au paragraphe **5**, $\Gamma_1(z) = 0$ est de l'ordre inférieur à 3; ou encore le cas qui se présenterait dans le paragraphe précédent **9** si l'on arrive à un Γ d'indice supérieur à celui qui y est prévu. Alors l'équation (1) admet une involution d'ordre au plus égal à m : les nouvelles équations qui s'introduisent diminueraient le nombre des constantes dont dépendent les solutions communes à (1) et (20); or ce nombre ne peut être inférieur à 5 au paragraphe **5** et à $m + n$ au paragraphe **9**; il ne reste donc qu'une possibilité : que les dérivées par rapport à y de $\Gamma_i = 0$ au plus haut indice i soient conséquences des équations déjà écrites, au moins à partir d'un certain ordre; il se peut du reste que i soit égal à 1. $[\mathcal{F}, \Gamma] = 0$ est encore la condition d'intégrabilité du système en involution obtenu. Mais nous simplifierons le calcul en prenant comme nouvelle inconnue τ le premier membre de l'involution : en application de résultats précédents on voit sans peine que τ satisfait à une équation linéaire du 1^{er} ordre pour toutes les solutions de (1), et réciproquement à toute solution de l'équation du 1^{er} ordre en correspondent de (1) qui dépendent d'une fonction arbitraire. C'est une généralisation de ce qui se produit pour la transformation de Laplace (19), mais nous ne produisons pas un résultat nouveau; la transformation obtenue par (21) pouvant se composer avec des transformations effectuées chacune successivement avec une seule solution; nous sommes dans le cas où la suite de Laplace s'arrête dans un sens ou dans l'autre.

11. Nous avons à examiner aussi ce qui se passe si l'un des déterminants H, h_i, k_i, etc. est nul. Considérons, par exemple, le H du premier paragraphe. S'il est nul, l'équation

$$\left\| \begin{matrix} r & t & p & q & z \\ r_\rho & t_\rho & p_\rho & q_\rho & z_\rho \end{matrix} \right\|_{\rho=2,3,4,5} = 0$$

admet 5 solutions communes avec (1); si les coefficients de r et t sont différents de o, cela n'est pas possible, et s'ils sont nuls, nous sommes ramenés au cas où la transformation de Laplace procure une équation du 1^er^ ordre.