JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN LERAY

Discussion d'un problème de Dirichlet

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 18 (1939), p. 249-284.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__249_0>

Discussion d'un problème de Dirichlet (¹);

PAR JEAN LERAY.

I. — Introduction.

1. Nous nous proposons d'étudier les solutions d'une équation aux dérivées partielles du type elliptique [2]

$$(1)\quad \begin{cases} f(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0 \qquad (4f'_r f'_t > f'^2_s,\ f'_r > 0,\ f'_t > 0 \text{ quand } f = 0) \\ \qquad (r = z''_{x^2}(x, y),\ s = z''_{xy},\ t = z''_{y^2},\ p = z'_x,\ q = z'_y). \end{cases}$$

Notre étude sera le développement de la théorie dont M. S. Bernstein a exposé en 1910-1912 divers cas très importants, d'une assez grande généralité : elle consistera à chercher quand les solutions de (1) vérifient certains *théorèmes de compacité et d'existence*. Nos conclusions sont énoncées aux paragraphes **17** (p. 266) et **25** (p. 278).

Nous utiliserons les méthodes de majoration *a priori* que

(¹) L'essentiel de nos conclusions a été résumé aux *Comptes rendus*, t. **205**, 1937, p. 268 et 784.

(²) Les travaux fondamentaux sur ce sujet sont ceux de MM. É. Picard et S. Bernstein :

E. PICARD, *Journal de Mathématiques*, 1890; *Journal de l'École Polytechnique*, 1890; *Journal de Mathématiques*, 1900; *Acta mathematica*, 1902; *Annales de l'École Normale*, 1906; *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, rédigées par M. BRELOT, *Cahiers scientifiques de M. Julia*. Gauthier-Villars, 1930.

S. BERNSTEIN, *Math. Annalen*, t. 69, 1910; *Annales de l'École Normale*, t. **27** et **29**, 1910 et 1912; *C. R. Acad. Sc.*, t. **151**, 10 octobre 1910; *Math. Annalen*, t. **95** et **96**, 1927.

M. S. Bernstein a créées, mais dont il ne s'est pas donné la peine de tirer des conclusions complètes, ayant un sens géométrique. Nos théorèmes d'existence résulteront de *la théorie topologique des équations fonctionnelles* ([3]).

2. Conventions diverses. — Nous supposons f trois fois dérivable. Nous supposons que, quelles que soient les valeurs arbitraires données à p, q, x, y, z, la surface $f=0$ décompose l'espace (r, s, t) en deux domaines.

Nous désignons par « valeur de f sur une surface $z_\lambda(x, y)$ » la valeur f_λ, que prend f quand on y remplace z, p, q, r, s, t par $z_\lambda(x,y)$, ses dérivées premières et secondes.

Nous nommons γ tout contour, d'un ou plusieurs tenants, de l'espace (x, y, z) qui est frontière de surfaces régulières $z(x, y)$; nous supposons que γ est défini par des fonctions $y(x)$, $z(x)$ qui sont cinq fois dérivables quand y'_x est fini.

Nous supposons que *toutes les hypothèses faites restent vérifiées quand on permute les rôles de y et x.*

Nous nommons ε un signe, variable le long de γ, qui est + ou —, suivant que les surfaces $z(x, y)$ qui ont γ pour frontière sont, par rapport à γ, du côté $y=+\infty$ ou $y=-\infty$.

Nous disons que γ est compris entre deux surfaces $z_1(x, y)$ et $z_2(x,y)[z_1(x,y)<z_2(x,y)]$ quand γ est frontière de surfaces $z(x,y)$ qui vérifient l'inégalité $z_1(x,y)\leqq z(x,y)\leqq z_2(x,y)$.

γ étant compris entre $z_1(x,y)$ et $z_2(x,y)$, nous nommons « problème de Dirichlet de données $[(1), \gamma, z_1, z_2]$ » le problème qui consiste à trouver les surfaces $z(x,y)$ qui satisfont à (1), qui ont γ pour frontière et qui sont comprises entre z_1 et z_2.

3. Rappel de résultats. — *Théorème* 1. — Considérons un ensemble de problèmes de Dirichlet dont les données $[(1), \gamma, z_1, z_2]$ constituent un ensemble compact en soi. Supposons que *les dérivées secondes* des solutions de ces problèmes aient des valeurs absolues bornées dans

([3]) Leray-Schauder, *Annales de l'École Normale*, t. 51, 1934.

leur ensemble. Alors l'ensemble de ces solutions, s'il n'est pas vide, est *compact en soi* dans l'espace des fonctions trois fois dérivables.

Théorème 2. — Supposons en outre ceci :

l'un de ces problèmes de Dirichlet possède une seule solution qui est simple ([4]);

l'ensemble des données $[(1), \gamma, z_1, z_2]$ constitue un continu;

$(z_1 - z_2)f_1 \leqq 0$, l'égalité ne devant être atteinte que si γ est étranger à z_1;

$(z_2 - z_1)f_2 \leqq 0$, l'égalité ne devant être atteinte que si γ est étranger à z_2.

Alors chacun de ces problèmes de Dirichlet possède *au moins une solution.*

Le théorème 1 est dû à M. S. Bernstein; ce raisonnement de M. S. Bernstein a été amélioré par M. J. Schauder ([5]).

M. S. Bernstein a établi le théorème 2, par la méthode des approximations successives de M. É. Picard, dans le cas où l'unicité de la solution est assurée ($f'_z \leqq 0$ quand $f = 0$); l'énoncé ci-dessus se déduit du Chapitre V du *loc. cit.* ([3]) au moyen du lemme 1, que nous énoncerons au paragraphe 5.

Pour appliquer les théorèmes 1 et 2, il est nécessaire de savoir majorer les dérivées secondes des solutions de (1); or nous avons établi le théorème suivant ([6]).

Théorème 3. — Supposons que dans l'espace (r, s, t) la conique à l'infini $rt = s^2$ et la surface $f = 0$ n'aient pas de tangente commune. Il est alors possible de majorer $r^2 + s^2 + t^2$ sur une solution arbitraire de (1) en fonction des données suivantes : (1), γ, une borne supérieure de $p^2 + q^2$ dans Γ.

([4]) Une solution est simple quand son équation aux variations possède une solution unique.

([5]) J. Schauder, *Math. Zeitschrift*, p. 37, 1933.

([6]) *Majoration des dérivées secondes des solutions d'un problème de Dirichlet* (*Journal de Mathématiques*, t. 17, p. 89, 1938); *voir* p. 91 les inégalités (2) et (3) qui expriment les conditions de régularité imposées à f quand $r^2 + s^2 + t^2$ est grand.

4. Sommaire. — Nous nous contenterons d'envisager deux types généraux d'équations $f=0$. Les équations du premier type (Chap. III et V), satisferont aux hypothèses du théorème 3; leur étude consistera essentiellement à chercher quand il est possible de majorer les dérivées premières de leurs solutions. Au contraire, les équations du second type seront caractérisées par la propriété suivante : dans l'espace (r, s, t), la surface $f=0$ a pour courbe à l'infini la conique $rt=s^2$; l'étude des équations de ce second type consistera à chercher quand il est possible de majorer les dérivées premières et secondes de leurs solutions.

II. — Lemmes fondamentaux.

Au cours de ce Chapitre II, nous envisageons une équation du type elliptico-parabolique

$$
(2.1) \qquad \begin{cases} f(r, s, t, p, q, x, y, z)=0 \\ (4f'_r f'_t \geqq f'^2_s,\ f'_r \geqq 0,\ f'_t \geqq 0,\ f'^2_r + f'^2_t \neq 0 \text{ quand } f=0). \end{cases}
$$

5. Lemme 1. — Supposons que, quels que soient p, q, x, y, z, la surface $f=0$ de l'espace (r, s, t) décompose cet espace en deux domaines. Supposons que deux fonctions $z(x,y)$ et $z_\lambda(x,y)$ soient définies sur un domaine Δ_λ et possèdent les propriétés que voici : $f \geqq 0$ sur z; Δ_λ et z_λ dépendent continûment de λ; pour au moins une valeur de λ, on a $z<z_\lambda$ sur tout le domaine Δ_λ et sur sa frontière Δ'_λ; pour les autres valeurs de λ, $f_\lambda<0$; en chaque point de Δ'_λ, ou bien l'inégalité $z<z_\lambda$ a lieu, ou bien il existe une direction, extérieure à Δ_λ, suivant laquelle les dérivées z' et z'_λ de z et z_λ vérifient l'inégalité $z'<z'_\lambda$.

Je dis que $z(x,y)<z_\lambda(x,y)$.

Démonstration. — Supposons que l'inégalité $z(x,y)<z_\lambda(x,y)$ soit vérifiée pour $\lambda=0$ et ne le soit pas quel que soit λ; envisageons la valeur de λ la plus proche de zéro telle qu'il existe un point de $\Delta_\lambda+\Delta'_\lambda$ où $z=z_\lambda$; soit m ce point. Nous avons $z \leqq z_\lambda$ sur $\Delta_\lambda+\Delta'_\lambda$.

Si m appartenait à Δ'_λ, nous aurions en m, $z=z_\lambda$, $z'<z'_\lambda$; il existerait donc un point de Δ_λ, voisin de m, en lequel $z>z_\lambda$; or l'inégalité contraire a lieu dans Δ_λ. Si m était intérieur à Δ_λ, nous aurions en m,

$$z = z_\lambda, \qquad p = p_\lambda, \qquad q = q_\lambda, \qquad r_\lambda - r \geqq 0, \qquad (r_\lambda - r)(t_\lambda - t) \geqq (s_\lambda - s)^2;$$

or, ces relations sont incompatibles avec les inégalités $f \geqq 0$, $f_\lambda < 0$.

Ces contradictions établissent le lemme 1.

6. Définitions. — Introduisons quatre variables nouvelles k, l, m, n et les opérateurs différentiels

$$\mathcal{X} = k\frac{\partial}{\partial r} + l\frac{\partial}{\partial s} + m\frac{\partial}{\partial t} + r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q} + p\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x},$$
$$\mathcal{Y} = l\frac{\partial}{\partial r} + m\frac{\partial}{\partial s} + n\frac{\partial}{\partial t} + s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q} + q\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Définissons comme suit le produit de deux opérateurs différentiels de ce type

$$\mathcal{U} = \sum_i u_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \mathcal{V} = \sum_j v_j\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \mathcal{U}\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{U} = \sum_{i,j} u_i v_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

w étant une fonction de (r, s, t, p, q, x, y, z), posons

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(w) = {}& \\ & f'_r\mathcal{X}^2 w + f'_s\mathcal{X}\mathcal{Y}w + f'_t\mathcal{Y}^2 w + (rf'_r + sf'_s + tf'_t + pf'_p + qf'_q)w'_z + f'_p w'_x + f'_q w'_y \\ & - w'_r\mathcal{X}^2 f - w'_s\mathcal{X}\mathcal{Y}f - w'_t\mathcal{Y}^2 f - (rw'_r + sw'_s + tw'_t + pw'_p + qw'_q)f'_z - w'_p f_x - w'_q f'_y.\end{aligned}$$

Désignons par $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d^2}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx\,dy}$, $\frac{d^2}{dy^2}$ les dérivées des deux premiers ordres d'une fonction (r, s, t, p, q, x, y, z) dans laquelle on a substitué à z, p, q, r, s, t une fonction $z(x, y)$ et ses dérivées des deux premiers ordres. Nommons k, l, m, n les dérivées d'ordre trois de $z(x, y)$. Nous avons les identités

$$\frac{dw}{dx} = \mathcal{X}w, \qquad \frac{dw}{dy} = \mathcal{Y}w, \qquad \frac{df}{dx} = \mathcal{X}f, \qquad \frac{df}{dy} = \mathcal{Y}f,$$
$$\begin{aligned}& f'_r\frac{d^2w}{dx^2} + f'_s\frac{d^2w}{dx\,dy} + f'_t\frac{d^2w}{dy^2} + f'_p\frac{dw}{dx} + f'_q\frac{dw}{dy} \\ & - w'_r\frac{d^2f}{dx^2} - w'_s\frac{d^2f}{dx\,dy} - w'_t\frac{d^2f}{dy^2} - w'_p\frac{df}{dx} - w'_q\frac{df}{dy} = \mathcal{B}(w).\end{aligned}$$

Sur toute solution de (2.1), nous avons donc

$$(2.3) \qquad \frac{dw}{dx} = \mathfrak{X}w, \qquad \frac{dw}{dy} = \mathfrak{Y}w, \qquad \mathfrak{X}f = \mathfrak{Y}f = f = 0;$$

$$(2.4) \qquad f'_r \frac{d^2 w}{dx^2} + f'_s \frac{d^2 w}{dx\,dy} + f'_t \frac{d^2 w}{dy^2} + f'_p \frac{dw}{dx} + f'_q \frac{dw}{dy} = \mathcal{B}(w).$$

On constate aisément que, sur les solutions de (2.1), $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dy}$, $\frac{d^2 w}{dx^2}$, $\frac{d^2 dw}{dx\,dy}$, $\frac{d^2 w}{dy^2}$ sont liées par les seules relations (2. 3) et (2. 4) lorsque, comme nous le supposerons, w satisfait aux conditions suivantes :

ou bien w dépend seulement de p, q, x, y, z et $w'^2_p + w'^2_q \neq 0$;

ou bien $w'^2_r + w'^2_s + w'^2_t \neq 0$, les droites de coordonnées (f'_r, f'_s, f'_t) et (w'_r, w'_s, w'_t) sont distinctes, et leur point d'intersection (ρ, σ, τ) est étranger à la conique ([7]) $\rho\tau = \sigma^2$.

7. Lemme préliminaire. — Soit $(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, x_0, y_0, z_0)$ un système de valeurs de (r, s, t, p, q, x, y, z) en lequel les relations

$$\mathfrak{X}w = \mathfrak{Y}w = \mathfrak{X}f = \mathfrak{Y}f = f = w = 0, \qquad \mathcal{B}(w) < 0$$

soient compatibles. Je dis qu'on peut construire, au voisinage du point (x_0, y_0), une solution analytique de (2.1), $z(x, y)$, sur laquelle on ait $w < 0$, sauf au point (x_0, y_0) où $w = 0$.

Démonstration. — D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, l'équation (2. 1) possède une solution qui est analytique au voisinage du point (x_0, y_0) et qui présente en ce point les caractères suivants :

$$w = 0, \qquad \frac{dw}{dx} = 0, \qquad \frac{dw}{dy} = 0, \qquad \mathcal{B}(w) < 0;$$

$\frac{d^2 w}{dx^2}$, $\frac{d^2 w}{dx\,dy}$, $\frac{d^2 w}{dy^2}$ ont des valeurs arbitraires vérifiant (2.4). Choisissons ces valeurs telles que la forme de cofficients $\left(\frac{dx^2}{d^2 w}, \frac{d^2 w}{dx\,dy}, \frac{d^2 w}{dy^2}\right)$ soit définie; elle est négative d'après (2.4), ce qui prouve le lemme.

Lemme 2. — Soit une fonction positive $u(r, s, t, p, q, x, y, z)$, qui

([7]) Par hypothèse, la première de ces droites est extérieure ou tangente à cette conique.

est indépendante de (r, s, t) lorsque w l'est; soit un paramètre λ, positif ou nul, voisin de zéro. Soient $k_\lambda, l_\lambda, m_\lambda, n_\lambda, r_\lambda, s_\lambda, t_\lambda, p_\lambda, q_\lambda, x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda$ des fonctions analytiques de λ vérifiant les relations

$$\mathfrak{X}(w+\lambda u)=\mathfrak{Y}(w+\lambda u)=\mathfrak{X}f=\mathfrak{Y}f=w+\lambda u=f=0, \qquad \mathcal{B}(w)<0;$$

f, w et u sont supposés analytiques au voisinage de

$$(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, x_0, y_0, z_0).$$

Je dis qu'on peut construire, au voisinage de (x_0, y_0), une solution de (2. 1), $z_\lambda(x, y)$, qui dépende analytiquement de (x, y, λ) et sur laquelle on ait $w<0$, sauf pour les valeurs $(x_0, y_0, 0)$ de (x, y, λ); pour ces valeurs, $w=0$.

Démonstration. — Pour chaque valeur de λ, le lemme précédent permet de construire, au voisinage de (x_0, y_0) une solution analytique de (2. 1), $z_\lambda(x, y)$, sur laquelle $w+\lambda u<0$, sauf au point (x_λ, y_λ) où $w+\lambda u=0$. On peut faire en sorte que $z_\lambda(x, y)$ dépende analytiquement de λ.

8. Lemme 3. — w n'a de point stationnaire sur aucune solution de (2. 1) si les relations $\mathfrak{X}w=\mathfrak{Y}w=\mathfrak{X}f=\mathfrak{Y}f=f=0$ sont incompatibles.

Démonstration. — D'après (2. 3), l'incompatibilité de ces relations entraîne, sur toute solution de (2. 1), l'incompatibilité des relations $\dfrac{dw}{dx}=\dfrac{dw}{dy}=0$.

Lemme de M. S. Bernstein (8). — Une fonction w n'a de maximum relatif nul sur aucune solution de (2. 1) si les relations

$$\mathfrak{X}w=\mathfrak{Y}w=\mathfrak{X}f=\mathfrak{Y}f=f=w=0$$

entraînent $\mathcal{B}(w)>0$.

Démonstration. — En vertu de cette hypothèse, de (2. 3) et

(8) Nous avons déjà énoncé ce lemme [*loc. cit.* (6), p. 96], dont M. S. Bernstein avait énoncé et utilisé d'importants cas particuliers.

de (2.4), nous aurions en un tel maximum

$$f'_r \frac{d^2 w}{dx^2} + f'_s \frac{d^2 w}{dx\,dy} + f'_t \frac{d^2 w}{dy^2} > 0$$

ce qui est absurde.

LEMME 4. — Soit une fonction $v(r, s, t, p, q, x, y, z)$ définie au voisinage d'un morceau de surface d'équation $w(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0$; v est supposé indépendant de (r, s, t) quand w l'est. Supposons qu'au voisinage de $w = 0$, les conditions

$$\mathcal{X}f = \mathcal{Y}f = f = 0; \qquad w < 0; \qquad w,\ \mathcal{X}w \text{ et } \mathcal{Y}w \text{ voisins de } 0$$

entraînent les inégalités

$$\mathcal{B}(w) > -A_0[\,|w| + |\mathcal{X}w| + |\mathcal{Y}w|\,], \qquad A_0|\mathcal{X}v| + A_0|\mathcal{Y}v| + |\mathcal{B}(v)| \leqq A_1,$$
$$f'_r(\mathcal{X}v)^2 + f'_s \mathcal{X}v\,\mathcal{Y}v + f'_t(\mathcal{Y}v)^2 \geqq A_2,$$

A_0, A_1, A_2 étant des constantes positives.

Soit une fonction positive $u(v)$ vérifiant l'inégalité

$$A_2 u''_{v^2} > A_1|u'_v| + A_0 u. \tag{2.5}$$

Je dis qu'au voisinage du morceau de surface $w = 0$, la fonction $\dfrac{w}{u(v)}$ ne possède de maximum relatif négatif sur aucune solution de (2.1).

Démonstration. — Il suffit d'établir que la fonction $w + \lambda u(v)$ ne possède aucun maximum relatif nul, λ étant une constante arbitraire, positive et voisine de zéro. D'après le lemme précédent, il suffit donc d'établir que $\mathcal{B}(w + \lambda u) > 0$ quand

$$\mathcal{X}(w + \lambda u) = \mathcal{Y}(w + \lambda u) = \mathcal{X}f = \mathcal{Y}f = f = w + \lambda u = 0.$$

Or, quand ces égalités ont lieu,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(w + \lambda u) &= \mathcal{B}(w) + \lambda\mathcal{B}(u) \geqq -A_0[\,|w| + |\mathcal{X}w| + |\mathcal{Y}w|\,] + \lambda\mathcal{B}(u) \\
&= \lambda\{-A_0 u - A_0|\mathcal{X}u| - A_0|\mathcal{Y}u| + \mathcal{B}(u)\} \\
&\geqq \lambda\{-A_0 u - [A_0|\mathcal{X}v| + A_0|\mathcal{Y}v| + |\mathcal{B}(v)|]\,|u'_v| \\
&\qquad + [f'_r(\mathcal{X}v)^2 + f'_s\mathcal{X}v\,\mathcal{Y}v + f'_t(\mathcal{Y}v)^2]\,u''_{v^2}\} \\
&\geqq \lambda\{-A_0 u - A_1|u'_v| + A_2 u''_{v^2}\} > 0.
\end{aligned}$$

9. Au cours de ce paragraphe, les opérateurs différentiels $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ne seront appliqués qu'à des fonctions de (p, q, x, y, z); nous aurons donc

$$\mathfrak{X} = r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q} + p\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathfrak{Y} = s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q} + q\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Lemme 5. — Soit une fonction $w(p, q, x, y, z)$. Supposons

$$w_p'^2 + w_q'^2 \neq 0.$$

Supposons que le système d'équations

$$\mathfrak{X}w = \mathfrak{Y}w = f = 0$$

possède une solution unique $r(p, q, x, y, z)$, $s(p, q, x, y, z)$, $t(p, q, x, y, z)$. Les inégalités

$$\frac{\mathfrak{Y}r - \mathfrak{X}s}{w_q'} > 0, \qquad \frac{\mathfrak{X}t - \mathfrak{Y}s}{w_p'} > 0$$

sont équivalentes. Si elles sont vérifiées, w ne possède de maximum relatif sur aucune solution de (1).

Démonstration. — Explicitons les équations qui définissent r, s, t en fonction de p, q, x, y, z

$$f = 0, \qquad rw_p' + sw_q' + pw_z' + w_x' = 0, \qquad sw_p' + tw_q' + qw_z' + w_y' = 0.$$

Appliquons les opérateurs $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ à ces équations; il vient

$$\begin{aligned}
f_r'\,\mathfrak{X}r + f_s'\,\mathfrak{X}s + f_t'\,\mathfrak{X}t + rf_p' + sf_q' + pf_z' + f_x' &= 0,\\
w_p'\,\mathfrak{X}r + w_q'\,\mathfrak{X}s + rw_z' + \mathfrak{X}^2 w &= 0,\\
w_p'\,\mathfrak{X}s + w_q'\,\mathfrak{X}t + sw_z' + \mathfrak{X}\mathfrak{Y}w &= 0,\\
f_r'\,\mathfrak{Y}r + f_s'\,\mathfrak{Y}s + f_t'\,\mathfrak{Y}t + sf_p' + tf_q' + qf_z' + f_y' &= 0,\\
w_p'\,\mathfrak{Y}r + w_q'\,\mathfrak{Y}s + sw_z' + \mathfrak{X}\mathfrak{Y}w &= 0,\\
w_p'\,\mathfrak{Y}s + w_q'\,\mathfrak{Y}t + tw_z' + \mathfrak{Y}^2 w &= 0.
\end{aligned}$$

En ajoutant membres à membres ces équations multipliées respectivement par les coefficients $(0, 0, -1, 0, 1, 0)$ et

$$(-w_p'w_q',\ f_r'w_q',\ f_t'w_p',\ -w_q'^2,\ f_s'w_q' - f_t'w_p',\ f_t'w_q'),$$

nous obtenons les relations

$$\frac{\mathfrak{Y}r - \mathfrak{X}s}{w_q'} = \frac{\mathfrak{X}t - \mathfrak{Y}s}{w_p'} = \frac{\mathcal{B}(w)}{f_r'w_q'^2 - f_s'w_p'w_q' + f_t'w_p'^2}.$$

Ces relations montrent que le lemme 5 ne diffère pas du lemme de de M. S. Bernstein (§ 8).

III. — Un premier type d'équations.

Au cours de ce chapitre, nous nommons *notion géométrique* toute notion invariante par rapport au groupe des transformations ponctuelles

$$x_1(x, y), \qquad y_1(x, y), \qquad z_1(x, y, z), \tag{3.1}$$

qui transforment entre elles les droites parallèles à l'axe des z $\left(\frac{\partial z_1}{\partial z}\right.$ peut être positif ou négatif$\left.\right)$.

Soit un contour γ; nous nommons Γ' le cylindre parallèle à Oz qui contient γ; Γ désigne l'intérieur de Γ' (Γ ne s'étend à l'infini que dans la direction de l'axe des z); rappelons que ε désigne le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que Γ est, par rapport à Γ', du côté $y = +\infty$ ou $y = -\infty$.

10. Allure de l'équation (1) sur les cylindres verticaux. — Faisons subir à l'espace (x, y, z) le changement de coordonnées

$$X = x, \qquad Y = z, \qquad Z = y;$$

les nouvelles coordonnées

$$(R = Z''_{X^2}, \qquad S = Z''_{XY}, \qquad T = Z''_{Y^2}, \qquad P = Z'_X, \qquad Q = Z'_Y \qquad X, Y, Z)$$

de l'élément de contact (r, s, t, p, q, x, y, z) existent pour $q \neq 0$ et sont définies par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} r = -(R + 2Sp + Tp^2)q, \quad s = -(S + Tp)q^2, \quad t = -Tq^3, \\ p = -PQ^{-1}, \quad q = Q^{-1}, \quad x = X, \quad y = Z, \quad z = Y. \end{array}\right. \tag{3.2}$$

L'équation étudiée

$$f(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0 \qquad (4f'_r f'_t > f'^2_s,\ f'_r > 0,\ f'_t > 0 \text{ quand } f = 0) \tag{1}$$

équivaut à une équation

$$F(R, S, T, P, Q, x, y, z) = 0 \tag{3.3}$$
$$(4F'_R F'_T > F'^2_S,\ F'_R > 0,\ F'_T > 0 \text{ quand } F = 0 \text{ et que } Q \neq 0).$$

Je dis que la condition suivante a un sens géométrique

$$(3.4)\quad \left\{\begin{array}{llll} \text{les relations} & Q = F = 0, & 4F'_R F'_T = F'^2_S \\ \text{entraînent} & F'_R = F'_S = 0, & F'_T > 0. \end{array}\right.$$

Cette condition exprime, en effet, que, sur les cylindres verticaux, les caractéristiques de l'équation $F = 0$ sont verticales quand elles sont réelles. Cette condition entraîne en particulier l'inégalité

$$(3.5)\qquad F'_T > 0 \quad \text{quand} \quad F = 0.$$

L'inégalité

$$(z_1 - z_2) f(r_1, s_1, t_1, p_1, q_1, x, y, z_1) \leqq 0,$$

qui a un sens géométrique, équivaut à l'inégalité

$$q_1(z_1 - z_2) F(R_1, S_1, T_1, P_1, Q_1, x, y, z_1) \geqq 0;$$

la condition suivante a donc un sens géométrique

$$(3.6)\quad \left\{\begin{array}{l} \pm(z_1 - z_2) F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z_1) \geqq 0, \\ \text{quand } [x, y(x), z_1] \text{ décrit } \Gamma' \text{ et que } [x, y(x), z_2] \text{ décrit } \gamma. \end{array}\right.$$

Toute surface $z_1(x, y)$, intérieure à Γ, voisine de Γ' et ayant γ pour frontière, vérifie l'inégalité $q_1(z_1 - z_2)\varepsilon > 0$. Restreindre la condition (3, 6) par le choix suivant du signe $\pm$: $\pm(z_1 - z_2)\varepsilon > 0$ a donc un sens géométrique. Par suite, les conditions suivantes ont des sens géométriques

$$(3.7)\quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z_1) \geqq 0, \text{ quand } [x, y(x), z_1] \text{ décrit } \Gamma', \\ \text{que } [x, y(x), z_2(x)] \text{ décrit } \gamma \text{ et que } \pm(z_1 - z_2)\varepsilon > 0; \end{array}\right.$$

$$(3.8)\quad \varepsilon F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z) \geqq 0 \quad \text{quand} \quad [x, y(x), z(x)] \text{ décrit } \gamma.$$

Le sens géométrique de (3.6) a, d'autre part, pour corollaire immédiat, le sens géométrique de la condition suivante :

$$(3.9)\quad \left\{\begin{array}{l} \pm F'_z(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z) \geqq 0, \\ \text{au voisinage des points de } \Gamma' \text{ où } F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z) = 0. \end{array}\right.$$

Remarque. — (3.7) a nécessairement lieu quand γ vérifie (3.8) et que Γ' vérifie (3.9).

11. Cas d'impossibilité du problème de Dirichlet. — Lemme 6. —

Supposons qu'on puisse choisir $(y''_{x^2}, y'_x, \pm 0, x, y, z)$, en sorte que $F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z) \neq 0$. Alors le problème de Dirichlet est impossible pour certaines données présentant les caractères suivants : Γ' contient l'élément de contact (y''_{x^2}, y'_x, x, y); γ contient le point (x, y, z); en ce point, l'inégalité (3.8) n'est pas vérifiée.

S'il est possible de choisir $(y'_x, \pm 0, x, y, z)$ tels que

$$F(R, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z)$$

garde un signe constant quand R varie de $-\infty$ à $+\infty$, alors le problème de Dirichlet est impossible pour certaines données de la nature suivante : Γ' est d'un seul tenant, est convexe et a une courbure arbitrairement grande.

Démonstration. — L'hypothèse $F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z) \neq 0$ a un sens géométrique. Une transformation du groupe (3.1) permet donc de la réduire, à l'hypothèse $F(0, 0, 0, 0, -0, 0, 0, 0) < 0$, qui a la signification suivante : une surface $z(x, y)$ vérifie l'inégalité $f < 0$ au voisinage du point $(x = 0, y = 0, z = 0)$ lorsque ses éléments de contact du second ordre sont suffisamment voisins de ceux du plan $y = 0$, q étant négatif. Les cylindres $z_\lambda(y) = \lambda - \sqrt{y}$ vérifient donc l'inégalité $f < 0$ quand λ, x et y sont suffisamment voisins de zéro.

Soit un contour régulier γ, qui contienne le point

$$(x = 0, \ y = 0, \ z = 0),$$

et sur lequel on ait $z \leqq z_0$, $y > 0$. Soit une valeur positive de λ. Je dis qu'il n'existe pas de solution $z(x, y)$ de (1) qui ait γ pour frontière et qui satisfasse à l'inégalité $z(x, y) < z_\lambda(y)$. En effet, nous aurions, d'après le lemme 1, $z(x, y) \leqq z_0(y)$; or, cette inégalité est incompatible avec les relations

$$z(0, 0) = z_0(0), \qquad q_0(0) = -\infty, \qquad y > 0,$$

puisque $q(0, 0)$ est fini.

On peut tracer un tel contour γ sur tout cylindre Γ' satisfaisant aux conditions suivantes : les points de Γ sont voisins de l'axe Oz; le long de cet axe, Γ' a un contact d'ordre 3 avec le plan $y = 0$; dans Γ, $y > 0$. Cette latitude du choix de Γ' prouve le lemme 6.

12. Majoration frontière des dérivées premières. — Lemme 7. — *Soit un contour γ, frontière d'une solution $z(x, y)$ de (1). Soit une surface $z_2(x, y)$ telle que $z_2(x, y) - z(x, y)$ ait un signe constant, $\pm$. Il est possible de majorer $\pm\,\varepsilon q$ sur γ, en fonction de (1), de γ et de z_2, lorsqu'on a*

$$\varepsilon F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm\,\varepsilon 0, x, y, z) \geqq 0$$

sur la partie de Γ' qui est comprise entre γ et z_2.

N. B. — Nous supposons que chacun des éléments de contact d'ordre 2 de la partie de Γ' comprise entre γ et z_2 possède un voisinage sur lequel, ou bien F a un signe constant, ou bien F a des dérivées premières continues vérifiant (3.4).

Démonstration. — Il nous suffira d'étudier le voisinage de l'une des composantes de Γ'. Une transformation du groupe (3.1) réduit les hypothèses énoncées aux suivantes :

γ est l'axe des x; $z(x, 0) = 0$; z est une fonction périodique de x définie pour $0 \leqq y \leqq 1$; $z(x, y) < 1$; $F(0, 0, 0, 0, +0, x, 0, z) \geqq 0$ pour $0 \leqq z \leqq 1$, Il s'agit de majorer $q(x, 0)$.

Il existe des constantes positives A_0, A_1, A_2 telles que la surface $Z(Y)$ vérifie l'inégalité $F(0, 0, Z''_{Y^2}, 0, Z'_Y, X, Z, Y) > 0$ si les conditions suivantes sont remplies : Z, Z'_Y, Z''_{Y^2} sont voisins de 0, $Z > 0$, $Z'_Y > 0$, $0 \leqq Y \leqq 1$, $A_2 Z''_{Y^2} > A_1 Z'_Y + A_0 Z$.

Soit $Z(Y - \lambda)$ une famille de surfaces qui vérifient ces conditions, qui soient définies pour $0 \leqq \lambda \leqq Y \leqq 1$ et qui vérifient, en outre, la condition $Z(0) = 0$. Soit $z_\lambda(y) = z_0(y) + \lambda$ l'équation de ces surfaces dans le système de coordonnées (x, y, z). Sur la frontière de ces surfaces $z(x, y) < z_\lambda(y)$; d'autre part, $f_\lambda < 0$, $z(x, y) < z_1(y)$. Donc, d'après le lemme 1, $z(x, y) \leqq z_0(y)$. Or, $z(x, 0) = z_0(0)$. Par suite,

$$q(x, 0) \leqq q_0(0).$$

La majoration énoncée est effectuée.

13. Conventions nouvelles. — La fonction $F(R, S, T, P, Q, x, y, z)$ est, en général, discontinue pour $Q = 0$. Nous introduirons deux fonctions $F_+(R, S, T, P, Q, x, y, z)$ et $F_-(R, S, T, P, Q, x, y, z)$ qui soient régulières quand F, S, T, Q sont voisins de zéro et qui coïncident avec F, l'une quand $Q > 0$, l'autre quand $Q < 0$. Nous aurons donc

$$F_\pm(R, 0, 0, P, 0, x, y, z) = F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z).$$

Nous supposerons désormais que F_+ et F_- vérifient la condition (3.4).

CALCUL PRÉLIMINAIRE. — Supposons que l'équation (2.1) soit l'équation $F_\pm = 0$ et que w soit égale à $\mp Q$, ou plus généralement, au produit de $\pm Q$ par une fonction négative de (P, Q, x, y, z). La condition

$$\mathcal{B}(w) \gtrless 0 \qquad \text{pour} \quad \mathfrak{X}w = \mathfrak{Y}w = \mathfrak{X}F_\pm = \mathfrak{Y}F_\pm = w = F_\pm = 0$$

équivaut à la condition

$$\pm F'_z(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) \gtrless 0 \qquad \text{pour} \quad F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) = 0.$$

14. CAS OÙ LA MAJORATION INTÉRIEURE DES DÉRIVÉES PREMIÈRES EST IMPOSSIBLE. — LEMME 8. — Supposons qu'on puisse choisir R, P, $\pm$, x, y, z tels qu'on ait

$$F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) = 0, \qquad \pm F'_z(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) < 0$$

et que F soit analytique au voisinage de ce système d'arguments (9).
La majoration intérieure des dérivées premières est alors impossible.

Démonstration. — L'hypothèse énoncée permet d'appliquer le lemme 2 à l'équation $F_\pm = 0$ et à la fonction $w = \mp Q$. L'équation $F_\pm = 0$ possède donc une solution $Z_\lambda(X, Y)$ ayant les caractères suivants : Z est une fonction analytique de (X, Y, λ), définie au voisinage d'un point (X_0, Y_0) pour $\lambda \geqq 0$; $\pm Q_\lambda(X, Y) > 0$ quand $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + \lambda^2 \neq 0$; $Q_0(X_0, Y_0) = 0$.

Soit $z_\lambda(x, y)$ l'équation des surfaces $Z_\lambda(X, Y)$ dans le système de coordonnées (x, y, z); $z_\lambda(x, y)$ est une solution de (1), définie pour $\lambda \geqq 0$ au voisinage d'un point (x_0, y_0); z dépend analytiquement de (x, y, λ), sauf au point $x = x_0$, $y = y_0$, $\lambda = 0$; $z_\lambda(x, y)$ est

(9) Autrement dit, que $F_\pm$ soit analytique au voisinage du système d'arguments $(R, 0, 0, P, 0, x, y, z)$.

continue même en ce point;

$$q_\lambda(x, y) \to +\infty \quad \text{quand} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda^2 \to 0.$$

Ces propriétés de $z_\lambda(x, y)$ justifient le lemme 8.

15. Premier procédé de majoration intérieure des dérivées premières. — Lemme 9. — Supposons vérifiées les trois hypothèses suivantes :

1° $\pm F'_z(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) \geqq 0$ quand $F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z)$ est voisin de zéro;

2° $F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z)$ a le signe de R, quand $|R|$ est supérieur à une borne qui dépend continûment de P, x, y, z;

3° Les dérivées secondes de $F(R, S, T, P, Q, x, y, z)$ sont bornées, quand P, x, y, z étant bornés, F, S, T et Q sont simultanément voisins de zéro.

Je dis qu'il est alors possible de majorer $p^2 + q^2$ sur une solution arbitraire de (1) en fonction des données suivantes : (1), γ, une borne supérieure de $|z|$ dans Γ, une borne supérieure de $p^2 + q^2$ le long de γ.

Démonstration. — Ces données assignent des bornes inférieures et supérieures à x, y, z; au cours de la démonstration, ces variables seront supposées comprises entre ces bornes.

Appliquons le lemme 4 à l'équation $F_+(R, S, T, P, Q, X, Y, Z) = 0$ et aux fonctions $w = -\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} = -\frac{Q}{\sqrt{1+P^2}}$, $v = z$, Q étant supposé positif et $|P|$ inférieur à 2. Les hypothèses de ce lemme sont vérifiées. Sur aucune solution de (1), $\sqrt{p^2+q^2}\,u(z)$ ne possède donc de maximum relatif en lequel q est grand, et $\left|\frac{p}{q}\right| < 2$, si la fonction positive u vérifie une certaine inégalité

$$A_2 u''_{z^2} > A_1 |u'_z| + A_0 u \qquad (A_i = \text{constantes positives}).$$

Cette conclusion subsiste si l'on change q en $-q$, si l'on permute les rôles de p et q. Il est donc possible de choisir la fonction positive u telle que le maximum de $\sqrt{p^2+q^2}\,u(z)$ sur une solution de (1) soit réalisée sur γ, s'il est supérieur à une borne connue; ceci établit le lemme 9.

16. Second procédé de majoration intérieure des dérivées premières. — **Lemme 10.** — **Supposons qu'à tout élément de contact du premier ordre d'un cylindre vertical, on puisse attacher deux éléments de contact du second ordre de cylindres verticaux satisfaisant aux conditions suivantes : soient $[y''_{x^2} = R(P, \pm o, x, y, z), y'_x = P, x, y, z]$ les éléments du second ordre attachés à l'élément du premier ordre**

$$[y'_x = P, x, y, z];$$

1° $$F(R, o, o, P, \pm o, x, y, z) = F'_R(R, o, o, P, \pm o, x, y, z) = o,$$

quand $R = R(P, \pm o, x, y, z)$; $\pm R'_z(P, \pm o, x, y, z) > o$;

2° $R(P, \pm o, x, y, z)$ est une fonction trois fois dérivable de (P, x, y, z);

3° Les dérivées troisièmes de F sont bornées quand P, x, y, z étant bornés, S, T, Q étant voisins de zéro, R est voisin de $R(P, \pm o, x, y, z)$.

Je dis qu'il est possible de majorer $p^2 + q^2$ sur une solution arbitraire de (1) en fonction des données suivantes : (1), γ, une borne supérieure de $|z|$ dans Γ, une borne supérieure de $p^2 + q^2$ le long de γ.

Démonstration. — Ces données assignent des bornes inférieures et supérieures à x, y, z; au cours de la démonstration, nous supposerons que ces variables restent comprises entre ces bornes.

Définissons, pour Q positif et voisin de zéro, une fonction

$$R(P, Q, x, y, z)$$

qui se réduise à $R(P, +o, x, y, z)$ quand $Q = o$,

Soit une fonction $w(P, Q, x, y, z)$. La condition que le système

$$\mathfrak{X}w = Rw'_P + Sw'_Q + Pw'_y + w'_x = o,$$
$$\mathfrak{Y}w = Sw'_P + Tw'_Q + Qw'_y + w'_z = o, \qquad F_+(R, S, T, P, Q, x, y, z) = o$$

admette pour solution la fonction $R(P, Q, x, y, z)$ est que w satisfasse à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F_+\left(R, -\frac{Rw'_P + Pw'_y + w'_x}{w'_Q}, \frac{Rw'^2_P + Pw'_P w'_y + w'_P w'_x - Qw'_y w'_Q - w'_z w'_Q}{w'^2_Q}, P, Q, x, y, z\right) = o. \tag{3.10}$$

Nous avons

$$F = F'_R = F'_S = F'_P = F'_x = F'_y = F'_z = 0, \qquad F'_T > 0,$$

quand les arguments sont $[R(P, +0, x, y, z), 0, 0, P, +0, x, y, z]$. L'équation aux dérivées partielles (3. 10) possède donc les caractéristiques que définissent les relations

$$dP = dx = dy = 0, \qquad Q = 0, \qquad w'_P = w'_x = w'_y = w'_z = 0,$$
$$\frac{dw'_Q}{dz} = w'_Q \frac{F'_Q}{F'_T}, \qquad w = 0.$$

Des caractéristiques voisines de celles-ci engendrent des solutions w de (3. 10) qui ont les propriétés suivantes; w est défini quand Q est voisin de zéro et que $Q \geqq 0$; $w = 0$ quand $Q = 0$; $w'_Q < 0$; donc $w < 0$ quand $Q > 0$; les dérivées premières et secondes de w par rapport à P, x, y, z sont voisines de zéro. Par suite,

$$\mathcal{Y} R = SR'_P + TR'_Q + QR'_y + R'_z \quad \text{est voisin de } R'_z < 0;$$
$$\mathcal{X} S = SR'_P + TS'_Q + PS'_y + S'_x \quad \text{est voisin de zéro.}$$

D'où

$$\frac{\mathcal{Y} R - \mathcal{X} S}{w'_Q} > 0;$$

le lemme 5 s'applique donc à ces fonctions w.

Plus généralement, posons

$$\varpi = (p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \theta = \text{arc tang} \frac{p}{q};$$

soit une fonction $w(\varpi, \theta, x, y, z)$; la condition pour que les solutions r, s, t du système $f = \mathcal{X} w = \mathcal{Y} w = 0$ vérifient l'équation

$$rq^2 - 2spq + tp^2 = - Q^{-3} R(P, Q, x, y, z)$$

est que w satisfasse à une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dont (3. 10) est l'un des aspects. Cette équation possède des caractéristiques sur lesquelles θ, x, y sont des constantes arbitraires, $\varpi = 0$, $w'_0 = w'_x = w'_y = w'_z = 0$, $\frac{1}{w'_Q} \frac{dw'_Q}{dz}$ est borné, $w = 0$. Des caractéristiques voisines de celles-ci permettent de construire une fonction w ayant les propriétés suivantes : w est une fonction uniforme de (p, q, x, y, z) définie quand ϖ est voisin de 0 ($\varpi \geqq 0$); $w = 0$ quand

$\varpi = 0$; $w < 0$ quand $\varpi > 0$; le lemme 5 s'applique à cette fonction w, qui ne possède donc de maximum sur aucune solution de (1). Ceci établit le lemme 10.

17. Conclusions. — Nous nommerons Φ toute famille de contours γ contenant une sous-famille de la nature suivante : γ appartient à cette sous-famille quand il est d'un seul tenant et que la valeur absolue de la courbure de Γ' est supérieure à une borne, fonction du maximum qu'atteint $|z|$ sur γ.

Nous dirons que le *problème de Dirichlet est bien posé* ([10]) pour une équation $f = 0$ et une famille Φ de contours γ quand les deux propositions suivantes sont vraies :

1° Soit un ensemble compact en soi de données (γ, z_1, z_2), dont les contours γ appartiennent à Φ; les solutions des problèmes de Dirichlet correspondants constituent un ensemble *compact en soi* (ou vide), dans l'espace des fonctions trois fois dérivables.

2° Le problème de Dirichlet de données $[(1), \gamma, z_1, z_2]$ possède *au moins une solution* quand les conditions suivantes sont réalisées : γ appartient à Φ; γ est étranger à z_1 et à z_2;

$$(z_1 - z_2) f_1 \leqq 0, \qquad (z_2 - z_1) f_2 \leqq 0. \tag{3.11}$$

Nous dirons que *le problème de Dirichlet est mal posé* pour une équation (1), quand il n'existera aucune famille Φ telle que ce problème soit bien posé pour (1) et Φ.

Théorème I. — *Le problème de Dirichlet est* bien posé, *pour la famille Φ des contours γ le long desquels*

$$\varepsilon F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z) \geqq 0, \tag{3.8}$$

lorsque l'équation étudiée (1) *satisfait à l'ensemble des conditions géométriques que voici :*

a. Elle est du type elliptique ($4 f'_r f'_t > f'^2_s$ *quand* $f = 0$); *en outre,* (3, 4) *est vérifiée.*

([10]) Nous nous permettons d'utiliser cette expression dans un sens différent de celui que lui a donné M. Hadamard.

b. Dans l'espace (r, s, t) *la conique à l'infini* $rt = s^2$ *et la surface* $f = 0$ *n'ont pas de tangente commune* [11].

c. L'une des conditions c_1 *ou* c_2 *est réalisée :*

(c_1) $F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z)$ *a le signe de* R *quand* $|R|$ *est supérieur à une borne, qui dépend continûment de* P, x, y, z ;

(c_2) *il existe une fonction continue* $R(P, \pm 0, x, y, z)$ *telle que* $F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) = 0$ *quand* R *est voisin de* $R(P, \pm 0, x, y, z)$.

d. $\pm F'_z(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) \geqq 0$ *quand*

$$F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z)$$

est voisin de zéro;

e. Les dérivées secondes (cas c_1*) ou troisièmes (cas* c_2*) de*

$$F(R, S, T, P, Q, x, y, z)$$

sont bornées quand R, P, x, y, z *sont bornées et que* F, S, T, Q *sont simultanément voisins de zéro.*

Le problème de Dirichlet est mal posé *quand l'une ou l'autre des circonstances suivantes se présente :*

$\bar{c}$. *Il est possible de choisir* $P, \pm, x, y, z$ *tels que*

$$F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z)$$

garde un signe constant quand R *varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

$\bar{d}$. *Il est possible de choisir* $R, P, \pm, x, y$ *tels que*

$$F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) = 0, \qquad \pm F'_z(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) < 0,$$

que (3.4) *soit vérifiée et que* F *soit analytique au voisinage de ce système d'arguments.*

18. Démonstration du théorème I. — Les lemmes 6 et 8 prouvent que le problème de Dirichlet est mal posé quand l'une des circonstances $\bar{c}$ et $\bar{d}$ se présente.

Supposons réalisées les conditions *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Les théorèmes 1 et 3, le lemme 7 (complété par la remarque qui termine le para-

[11] Et, plus précisément, les inégalités (2), (3), *loc. cit.* [6] sont vérifiées.

graphe 10), le lemme 9 (si c_1 est vérifié), le lemme 10 (si c_2 est vérifié), démontrent alors la proposition suivante :

« Soit un ensemble compact en soi de données (γ, z_1, z_2), dont les contours γ vérifient (3. 8); les solutions des problèmes de Dirichlet correspondants constituent un ensemble *compact en soi*, (ou vide), dans l'espace des fonctions trois fois dérivables. »

Pour déduire de cette proposition le théorème I, il suffit, d'après le théorème II, d'établir le lemme suivant :

« Soit un système de données (1), γ, z_1, z_2 vérifiant les conditions suivantes : (1) satisfait à a, b, c, d, e; γ satisfait à (3. 8); γ est étranger à z_1 et à z_2; $z_1 < z_2$; $f_1 \geqq 0$; $f_2 \leqq 0$. Soit z_0 une surface comprise entre z_1 et z_2 et ayant γ pour frontière. Je dis qu'on peut modifier continûment (1), en respectant les conditions précédentes, de manière à réaliser en outre les suivantes : $f_0 = 0$, $f'_z = 0$, en sorte que le nouveau problème de Dirichlet ainsi obtenu possède une solution unique et simple, z_0. »

Il est aisé d'opérer cette modification continue de f; on le constate en faisant les remarques suivantes :

On peut supposer $z_0 = 0$, $z_1 = -1$, $z_2 = +1$;

Les conditions $f_0 = 0$, $f_1 \geqq 0$, $f_2 \leqq 0$ concernent donc l'allure de f pour $p = q = 0$;

Au contraire, les conditions (3. 4), (3. 8), c, d, e concernent l'allure de f quand $p^2 + q^2$ est infiniment grand;

Les conditions (3. 8) a, b, c, d, e ne sont pas altérées quand on remplace, dans f, z par λz, λ étant un paramètre variant de 1 à 0.

IV. — Un second type d'équations.

19. L'équation aux dérivées partielles qu'étudie ce chapitre est représentée dans l'espace (r, s, t) par une surface qui décompose cet espace en deux domaines et qui a pour courbe à l'infini la conique $rt = s^2$.

Cette équation est définie par le système de relations

$$(4.1)\quad \begin{cases} rt - s^2 + g(r, s, t, p, q, x, y, z) + h(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0, \\ t + g'_r + h'_r > 0, \qquad r + g'_t + h'_t > 0, \end{cases}$$

g étant homogène et de degré 1 en (r, s, t) et $|h|$ étant borné par une fonction continue de (p, q, x, y, z).

Nous introduirons une fonction continue $f(r, s, t, p, q, x, y, z)$ qui diffère de zéro hors de la surface (4.1) et qui satisfasse sur cette surface aux relations $f = 0$, $f'_r > 0$, $f'_t > 0$.

Au cours de ce chapitre, nous nommons *notion géométrique* toute notion invariante par rapport au groupe des transformations ponctuelles

$$(4.2)\qquad x_1(x, y), \qquad y_1(x, y), \qquad z_1(x, y, z) \qquad \left(\frac{\partial z_1}{\partial z} > 0\right),$$

qui transforment entre eux les axes parallèles à l'axe des z.

L'hypothèse que (4.1) est du type elliptique s'exprime par l'inégalité

$$(g'_r + h'_r)(g'_t + h'_t) - \frac{1}{4}(g'_s + h'_s)^2 - h + rh'_r + sh'_s + th'_t > 0;$$

nous ferons l'hypothèse plus stricte

$$(4.3)\quad \begin{cases} (g'_r + h'_r)(g'_t + h'_t) - \frac{1}{4}(g'_s + h'_s)^2 - h + rh'_r + sh'_s + th'_t > \mathrm{A}, \\ \text{A étant une fonction positive et continue de } (p, q, x, y, z). \end{cases}$$

Remarque 1. — Puisque (4.1) est du type elliptique, la surface qu'elle définit dans l'espace (r, s, t) n'est traversée par aucun de ses plans tangents; exprimons cette propriété du plan qui la touche au point à l'infini dans la direction $(\beta^2, -\alpha\beta, \alpha^2)$; nous obtenons l'inégalité

$$(4.4)\qquad r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 + g(\beta^2, -\alpha\beta, \alpha^2, p, q, x, y, z) > 0,$$

Remarque 2. — Une courbe tracée sur une solution de (4.1) vérifie l'identité

$$z''_{x^2} = r + 2sy'_x + ty'^2_x + qy''_{x^2};$$

d'après (4. 4), nous avons donc sur une telle courbe

$$(4.5)\qquad z''_{x^2} - qy''_{x^2} + g(y'^2_x, -y'_x, 1, p, q, x, y, z) > 0.$$

20. Allure de l'équation (4. 1) sur une courbe ([12]). — Faisons subir à l'espace (x, y, z) la transformation de contact d'Ampère; les nouvelles coordonnées

$$(\rho = \zeta''_{\xi^2},\ \sigma = \zeta''_{\xi\eta},\ \tau = \zeta''_{\eta^2},\ \pi = \zeta'_\xi,\ \chi = \zeta'_\eta)$$

de l'élément de contact (r, s, t, p, q, x, y, z) existent pour $t \neq 0$ et sont définies par les formules

$$(4.6)\qquad \begin{cases} r = \dfrac{\sigma^2 - \rho\tau}{\tau}, \quad s = -\dfrac{\sigma}{\tau}, \quad t = \dfrac{1}{\tau}, \\ p = -\pi, \quad q = \eta, \quad x = \xi, \quad y = \chi, \quad z = \chi\eta - \zeta. \end{cases}$$

(4. 1) prend la forme

$$(4.7)\qquad \varphi(\rho, \sigma, \tau, p, q, x, y, z) = \rho - g(\sigma^2 - \rho\tau, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) - \tau h\left(\frac{\sigma^2 - \rho\tau}{\tau}, -\frac{\sigma}{\tau}, \frac{1}{\tau}, p, q, x, y, z\right) = 0.$$

Nous supposerons que les dérivées troisièmes de φ restent bornées quand τ s'annule.

L'hypothèse (4.3) fait que nous avons, même pour $\tau = 0$,

$$(4.8)\qquad 4\varphi'_\rho\varphi'_\tau > \varphi'^2_\sigma \qquad (\text{quand } \varphi = 0).$$

La transformation d'Ampère (4.6) transforme la courbe $y(x)$, $z(x)$ en la surface

$$\zeta(\xi, \eta) = \eta y(\xi) - z(\xi);$$

cette surface satisfait à (4.7) si

$$(4.9)\qquad z''_{x^2} - qy''_{x^2} + g(y'^2_x, -y'_x, 1, p, q, x, y, z) = 0 \qquad (\text{quand } z'_x = p + qy'_x).$$

Imposer à une courbe $y(x)$, $z(x)$, et à l'un de ses plans tangents (p, q) la relation (4.9) ou (4.5), a donc un sens géométrique.

Soit un contour γ; exprimons que la condition géométrique (4.5)

([12]) *Cf.* E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, § **27** et **28**.

est satisfaite par ceux de ses plans tangents qui sont voisins de plans verticaux et qui vérifient l'inégalité $\varepsilon q < 0$; nous obtenons la condition géométrique

$$(4.10) \quad \begin{cases} \varepsilon\{y''_{x^2} - \lim q^{-1} g(y'^2_x, -y_x, 1, p, q, x, y, z)\} > 0 \\ \text{pour } q \to -\varepsilon\infty \text{ et } p = z'_x - qy'_x. \end{cases}$$

Soit $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $z(\lambda)$ une représentation paramétrique de la courbe $y(x)$, $z(x)$; (4. 9) équivaut à

$$z''_{\lambda^2} - px''_{\lambda^2} - qy''_{\lambda^2} + g(y'^2_\lambda, -x'_\lambda y'_\lambda, x'^2_\lambda, p, q, x, y, z) = 0 \qquad (z'_\lambda = px'_\lambda + qy'_\lambda).$$

Posons

$$\lambda = z, \qquad p = -PQ^{-1}, \qquad q = Q^{-1} ;$$

il vient

$$Px''_{z^2} - y''_{z^2} + (y'_x - P)^{-2} q^{-3} g(y'^2_x, -y'_x, 1, p, q, x, y, z) = 0.$$

Appliquons cette condition aux courbes qui sont voisines des parallèles à l'axe des z et à ceux de leurs plans tangents qui ne sont pas verticaux ; exprimons que cette condition puisse être vérifiée et soit continue, nous obtenons la condition

$$\lim q^{-3} g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) = 0 \text{ pour } |q| \to \infty \text{ et } \sigma \neq P = -pq^{-1}.$$

Du caractère géométrique de cette dernière condition résulte le caractère géométrique de la suivante :

$$(4.11) \quad \begin{cases} (p^2+q^2+1)^{-1} |g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z)| \text{ reste inférieur} \\ \text{à une borne indépendante de } p^2+q^2 \text{ tant que } \sigma, p, q, x, y, z \\ \text{restent bornés et que } pq^{-1} \neq \sigma. \end{cases}$$

D'autre part, en dérivant (4. 9), nous constatons qu'imposer à une courbe γ l'une ou l'autre des conditions suivantes à un sens géométrique

$$(4.12) \quad \begin{cases} \text{borne inf. } \varepsilon\left\{y''_{x^2} + \left(y'_x \dfrac{\partial}{\partial p} - \dfrac{\partial}{\partial q}\right) g(y'^2_x, -y'_x, 1, p, q, x, y, z)\right\} > 0 \\ \text{pour } q \text{ arbitraire et } p = z'_x - qy'_x ; \end{cases}$$

$$(4.13) \quad \begin{cases} \left(y'^2_x \dfrac{\partial^2}{\partial p^2} - 2y'_x \dfrac{\partial^2}{\partial p\, \partial q} + \dfrac{\partial^2}{\partial q^2}\right) g(y'^2_x, -y'_x, 1, p, q, x, y, z) \leqq 0 \\ \text{pour } q \text{ arbitraire et } p = z'_x - qy'_x. \end{cases}$$

Remarque. — Lorsque γ vérifie (4.13), les conditions (4.10) et (4.12) sont équivalentes.

21. Majoration frontière de εq. — Lemme 11. — Soit un contour γ, frontière d'une solution $z(x, y)$ de (4.1). Lorsque γ satisfait à (4.12), il est possible de majorer le long de γ la dérivée intérieure, εq, en fonction de γ et de (4.1).

Démonstration. — q vérifie l'inégalité (4.5), où z''_{x^2}, y''_{x^2}, z'_x, y'_x, x, y, z sont donnés et où $p = z'_x - qy'_x$. L'hypothèse (4.12) fait que cette inégalité équivaut à une inégalité $\varepsilon q < \varepsilon q_0$, où q_0 est une fonction connue des données.

22. Majoration intérieure de $p^2 + q^2$. — Lemme 12. — Supposons

$$(p^2 + q^2 + 1)^{-1} g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) \leqq (\sigma^2 + 1)A, \tag{4.14}$$

A étant une fonction de x, y, z, σ, pq^{-1} qui reste bornée tant que x, y, z restent bornés et que $\sigma \neq -pq^{-1}$; cette condition est géométrique, puisque (4.11) l'est. Je dis qu'il est possible de majorer $p^2 + q^2$ sur une solution arbitraire de (4.1) en fonction des données suivantes : A, γ, une borne supérieure de $|z|$ sur la solution envisagée et une borne supérieure de $p^2 + q^2$ sur γ.

Démonstration. — Ces données assignent des bornes inférieures et supérieures à x, y, z. Au cours de la démonstration x, y, z seront supposés compris entre ces bornes, σ sera supposé égal à $p^{-1}q$ et A sera supposé constant.

L'inégalité (4.4) a la conséquence suivante : l'équation (4.1) et les équations

$$r\alpha + s\beta + \gamma = 0, \qquad s\alpha + t\beta + \delta = 0$$

sont incompatibles si

$$g(\beta^2, -\alpha\beta, \alpha^2, p, q, x, y, z) \leqq \alpha\gamma + \beta\delta.$$

En particulier, (4.1) est incompatible avec les équations

$$\mathfrak{X}w = rw'_p + sw'_q + pw'_z + w'_x = 0, \qquad \mathfrak{Y}w = sw'_p + tw'_q + qw'_z + w'_y = 0$$

si

$$g(w'^2_q, -w'_p w'_q, w'^2_p, p, q, x, y, z) \leqq w'_p(pw'_z + w'_x) + w'_q(qw'_z + w'_y). \tag{4.15}$$

Donc, d'après le lemme 3, une fonction $w(p, q, x, y, z)$ qui satisfait à (4. 15) n'a de point stationnaire sur aucune solution de (4. 1).

Or, la relation (4. 14), quand on y choisit $\sigma = p^{-1}q$, exprime que la fonction

$$w = Az + \log\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$

satisfait à (4. 15). Cette fonction w atteint donc son maximum, sur une solution de (4. 1), en un point de la frontière de cette solution; ceci établit le lemme 12.

23. Majoration frontière des dérivées secondes. — Soit un contour γ, frontière d'une solution $z(x, y)$ de (4. 1). Nous nous proposons de majorer r, s, t sur γ, les données étant les suivantes : (4. 1), γ, des majorantes de $|p|$ et de $|q|$.

Il nous suffit d'étudier l'une des composantes de γ. Une transformation ponctuelle du groupe (4. 2) réduit ce problème au suivant :

γ est l'axe des x; $z(x, 0) = 0$; z est une fonction périodique de x définie pour $0 \leqq y \leqq 1$; $|p| < 1$ et $|q| < 1$ pour $0 \leqq y \leqq 1$.

Nous avons $r(x, 0) = 0$; (4. 4) nous donne l'inégalité

$$t + g(1, 0, 0, p, q, x, y, z) > 0,$$

qui minore t. Il s'agit donc de majorer $|s(x, 0)|$ et $t(x, 0)$.

Lemme. — La majoration de $|s(x, 0)|$ est possible lorsque l'on a

$$(4.16) \qquad g'_q(0, 0, 1, p, q, x, 0, 0) < 0 \quad \text{pour} \quad |p| < 1, \ |q| < 1.$$

Démonstration. — Posons

$$f(r, s, t, p, q, x, y, z) = rt - s^2 + g + h.$$

La dérivation de l'équation $f = 0$ nous donne

$$(4.17) \qquad f'_r p''_{x^2} + f'_s p''_{xy} + f'_t p''_{y^2} + r f'_p + s f'_q + p f'_z + f'_x = 0.$$

Faisons abstraction des relations différentielles qui lient z et q à p; ne tenons compte que des inégalités $|z| < y$, $|q| < 1$; considérons (4. 17) comme une équation d'inconnue p et appliquons-lui le lemme 7, nous avons

$$F(R, S, T, P, Q, x, y, z) = R + \frac{2rf'_r + sf'_s}{f'_r}S + \frac{r^2f'_r + rsf'_s + s^2f'_t}{f'_r}T - \frac{rf'_p + sf'_q + pf'_z + f'_x}{sf'_r},$$

où

$$r = p'_x = -PQ^{-1}, \qquad s = p'_y = Q^{-1}, \qquad |p| < 1, \qquad |q| < 1, \qquad |z| < y.$$

Faisons tendre y, P et Q vers zéro;

$$|s| \to +\infty, \qquad \frac{r}{s} \to 0, \qquad \frac{s}{t} \to 0,$$

les coefficients de S et T restent bornés, et

$$-\frac{rf'_p + sf'_q + pf'_z + f'_x}{sf'_r} \to -g'_q(0, 0, 1, p, q, x, 0, 0) > 0.$$

Les hypothèses du lemme 7 sont donc vérifiées; la majoration de $|p'_y(x, 0)| = |s(x, 0)|$ est donc possible.

Lemme. — La majoration de $t(x, 0)$ est possible lorsqu'on connaît une minorante positive de $g[0, 0, 1, 0, q(x, 0), x, 0, 0]$ et une majorante de $|s(x, 0)|$.

Démonstration. — Quand (4.1) est vérifiée, que s, p, q, x, y, z restent fixes et que t tend en croissant vers $+\infty$, alors r tend en décroissant vers une limite; d'après (4.1), cette limite est

$$-g(0, 0, 1, p, q, x, y, z).$$

Il est donc possible de majorer t en fonction de

$$r + g(0, 0, 1, p, q, x, y, z),$$

supposé positif, et de s, p, q, x, y, z. Le lemme ci-dessus n'est qu'un cas particulier de cette proposition.

Lemme. — Supposons que nous ayons

(4.18) borne sup. $g'_q(0, 0, 1, 0, q, x, 0, 0) < 0$ (q et x variant arbitrairement).

L'équation $g(0, 0, 1, 0, q_0, x, 0, 0) = 0$ possède donc une solution unique $q_0(x)$; l'inégalité (4. 5), appliquée à l'axe de x, nous donne

$$q(x, o) < q_0(x) \qquad (cf. \text{ lemme } 11).$$

Je dis qu'il est alors possible de construire une majorante négative de $q(x, o) - q_0(x)$, et par suite, une minorante positive de

$$g[o, o, 1, o, q(x, o), x, o, o].$$

Démonstration. — Une transformation du groupe (4. 2) nous ramène au cas où $q_0(x) = o$. Nous avons donc

$$\varphi(o, o, o, o, o, x, o, o) = o \qquad \text{et} \qquad \varphi'_q(o, o, o, o, q, x, o, o) > o$$

quels que soient q et x. D'autre part, d'après (4. 8), nous avons

$$\varphi'_t > o \qquad \text{quand} \quad \varphi = o.$$

Il existe, par suite des constantes positives A_0, A_1, A_2, A_3 telles que la fonction $\zeta(\eta)$ vérifie l'inégalité

$$\varphi(o, o, \zeta''_{\eta^2}, o, \eta, x, \zeta'_\eta, \eta\zeta'_\eta - \zeta) > o,$$

lorsque les conditions suivantes sont remplies, ζ, ζ'_η, ζ''_{η^2} sont voisins de o;

$$A_2\zeta''_{\eta^2} > A_1|\zeta'_\eta| + A_0|\zeta| + A_3|\eta| \qquad \text{si} \quad \eta < o;$$
$$A_2\zeta''_{\eta^2} > A_1|\zeta'_\eta| + A_0|\zeta| \qquad \text{si} \quad \eta \geqq o.$$

Soit une constante négative a, voisine de zéro et un paramètre λ variant de a à 1. Il existe une famille de surfaces $\zeta_\lambda(\eta)$ qui vérifie les conditions que nous venons d'énoncer et, en outre, les suivantes :

$\zeta_\lambda(\eta)$ dépend continûment de λ et est défini pour $\lambda \leqq \eta \leqq 1$;
$\zeta_\lambda(\lambda)$ est nul si $\lambda = a$, négatif si $a < \lambda \leqq 1$;
$\chi_\lambda(\eta) = \dfrac{d\zeta_\lambda(\eta)}{d\eta}$ est nul si $\eta = \lambda$, positif si $\lambda < \eta \leqq 1$.

Soit $z_\lambda(y)$ l'équation de ces surfaces dans le système de coordonnées (x, y, z);
$z_\lambda(y)$ est défini pour $o \leqq y \leqq y_\lambda$ où $y_\lambda = \chi_\lambda(1)$ (y_λ est voisin de o);
$z_\lambda(o) = -\zeta_\lambda(\lambda)$ est nul si $\lambda = a$, positif si $a < \lambda \leqq 1$;
$q_\lambda(y_\lambda) = 1$; $q_\lambda(o) = \lambda$;
$y_1 = o$, $z_1(y) > o$;
enfin, puisque $\varphi_\lambda > o$, nous avons $f_\lambda < o$.

L'application du lemme 1 à la solution $z(x, y)$ de (4. 1) que nous étudions et à la fonction $z_\lambda(y)$, nous donne

$$z(x, y) < z_a(y);$$

d'où, puisque $z(x, 0) = z_a(0) = 0$,

$$q(x, 0) \leqq q_a(0) = a < 0;$$

la majoration annoncée est effectuée.

Cessons de supposer que γ soit l'axe des x.

Lemme 13. — Soit un contour γ, frontière d'une solution $z(x, y)$ de (4. 1). Supposons qu'on ait le long de ce contour

$$(4.19)\quad \begin{cases} \text{borne inf.}\,\varepsilon \left\{ y''_{x^2} + \left(y'_x \dfrac{\partial}{\partial p} - \dfrac{\partial}{\partial q}\right) g(y'^2_x, -y'_x, 1, p, q, x, y, z) \right\} > 0 \\ (p \text{ et } q \text{ étant arbitraires}). \end{cases}$$

Je dis qu'il est possible de majorer r, s, t le long de γ en fonction des données suivantes : (4. 1), γ une borne supérieure de $p^2 + q^2$ sur la solution étudiée.

Démonstration. — La condition (4. 19) a un sens géométrique puisque (4. 12) en a un; elle implique (4. 18) et (4. 16) lorsque γ est l'axe des x; le lemme 13 est donc une conséquence immédiate des trois lemmes qui le précèdent.

24. Majoration intérieure des dérivées secondes. Calcul préliminaire. — Supposons que l'équation (2. 1) soit l'équation $\varphi = 0$ et que w soit égal à $-\tau$, ou plus généralement au produit de τ par une fonction négative. La condition

$$\mathcal{B}(w) \gtrless 0 \qquad \text{pour} \quad \mathfrak{X}w = \mathcal{Y}w = \mathfrak{X}\varphi = \mathcal{Y}\varphi = w = \varphi = 0$$

équivaut à l'inégalité

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \chi \frac{\partial}{\partial \zeta} + \sigma \frac{\partial}{\partial \pi}\right)^2 g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) \lesseqgtr 0,$$

c'est-à-dire à l'inégalité

$$\left(\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2\sigma \frac{\partial^2}{\partial p\, \partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\right) g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) \lesseqgtr 0.$$

Lemme 14. — Supposons qu'on puisse choisir σ, p, q, x, y, z tels qu'on ait

$$\left(\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2\sigma\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) > 0,$$

et que φ soit analytique au voisinage du système d'arguments

$$[\rho = g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z), \sigma, \tau = 0, p, q, x, y, z].$$

La majoration intérieure des dérivées secondes de (4.1) est alors impossible.

Démonstration. — L'hypothèse énoncée et l'inégalité (4.8) permettent d'appliquer le lemme 2 à l'équation $\varphi = 0$ et à la fonction $w = -\tau$. L'équation $\varphi = 0$ possède donc une solution $\zeta_\lambda(\xi, \eta)$ ayant les caractères que voici : ζ est une fonction analytique de (ξ, η, λ) définie au voisinage d'un point (ξ_0, η_0) pour $\lambda \geqq 0$; $\tau_\lambda(\xi, \eta) > 0$ quand $(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \lambda^2 \neq 0$; $\tau_0(\xi_0, \eta_0) = 0$.

Soit $z_\lambda(x, y)$ l'équation des surfaces $\zeta_\lambda(\xi, \eta)$ dans le système de coordonnées (x, y, z); $z_\lambda(x, y)$ est une solution de (1), définie pour $\lambda \geqq 0$ au voisinage d'un point (x_0, y_0); z dépend analytiquement de (x, y, λ), sauf au point $x = x_0$, $y = y_0$, $\lambda = 0$; $z_\lambda(x, y)$, $p_\lambda(x, y)$, $q_\lambda(x, y)$ sont continus même en ce point; $t_\lambda(x, y) \to +\infty$ quand $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda^2 \to 0$.

Ces propriétés de $z_\lambda(x, y)$ justifient le lemme 14.

Lemme 15. — Supposons que l'on ait, quels que soient σ, p, q, x, y, z,

$$\left(\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2\sigma\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) \leqq 0.$$

Il est alors possible de majorer $r^2 + s^2 + t^2$ sur une solution arbitraire de (4, 1) en fonction des données suivantes : (4, 1), γ, une borne supérieure de $p^2 + q^2$ sur la solution étudiée, une borne supérieure de $r^2 + s^2 + t^2$ le long de γ.

Démonstration. — Ces données assignent des bornes inférieures et supérieures à p, q, x, y, z; au cours de la démonstration, ces variables seront supposées comprises entre ces bornes.

Appliquons le lemme 4 à l'équation $\varphi = 0$ et aux fonctions

$$w = -\frac{1}{\sqrt{r^2+s^2+t^2}} = -\frac{\tau}{\sqrt{(\sigma^2-\rho\tau)^2+\sigma^2+1}}, \qquad v = p + \mathrm{A}x = -\pi + \mathrm{A}\xi,$$

A étant une constante. En tenant compte de l'inégalité (4. 8), nous constatons que les hypothèses de ce lemme 4 sont réalisées pour $|\sigma| < 2$ et $\mathrm{A} > g(0, 0, 1, p, q, x, y, z)$. Sur aucune solution de (4. 1), la fonction $\sqrt{r^2+s^2+t^2}\,u(v)$ ne possède donc de maximum relatif en lequel $r^2+s^2+t^2$ est grand et $|st^{-1}| < 2$, si la fonction positive u satisfait à une certaine inégalité du type (2. 5).

(2.5) $\qquad \mathrm{A}_2 u''_{v^2} > \mathrm{A}_1 |u'_v| + \mathrm{A}_0 u \qquad$ (A_i, constantes positives).

En permutant les rôles de x et y, on établit de même la proposition suivante : sur aucune solution de (4, 1), la fonction $\sqrt{r^2+s^2+t^2}\,u(v)$ ne possède de maximum relatif en lequel $r^2+s^2+t^2$ est grand et $|sr^{-1}| < 2$, si u satisfait à une certaine inégalité du type (2. 5).

Or, quand $r^2+s^2+t^2$ est grand, l'une au moins des quantités $|st^{-1}|$ et $|sr^{-1}|$ est inférieure à 2.

Il est donc possible de choisir la fonction positive $u(v)$ telle que le maximum de $\sqrt{r^2+s^2+t^2}\,u(p+\mathrm{A}x)$ sur une solution de (4. 1) soit réalisé le long de γ, s'il est supérieur à une borne connue ; ceci établit le lemme 15.

25. Conclusions. — Nous dirons que *le problème de Dirichlet est bien posé* pour une équation (4. 1) et une famille de contours γ quand les deux propositions suivantes seront vraies.

1° Soit un ensemble compact en soi de données (γ, z_1, z_2) dont les contours γ appartiennent à la famille de contours envisagée; supposons que les dérivées intérieures le long de γ, εq, des solutions des problèmes de Dirichlet correspondants sont bornées inférieurement dans leur ensemble ; ces solutions constituent alors un ensemble *compact en soi* (ou vide), dans l'espace des fonctions trois fois dérivables.

2° Le problème de Dirichlet de données $[(4.\ 1), \gamma, z_1, z_2]$ possède *au moins une solution* quand les conditions suivantes sont réalisées :

γ appartient à la famille de contours envisagée; $z_1(x,y) < z_2(x,y)$; γ est sur z_1; $f_1 > 0$; $f_2 \leqq 0$.

Nous dirons que le problème de Dirichlet est mal posé pour une équation (4. 1), quand il n'existera aucune famille Φ de contours γ telle que ce problème soit bien posé pour (4. 1) et Φ.

THÉORÈME II. — *Le problème est* bien posé *pour l'équation* (4. 1) *et pour la famille des contours* γ *le long desquels*

$$(4.20)\qquad \begin{cases} \varepsilon\{y''_{x^2} - \lim q^{-1} g(y'^2_x, -y'_x, 1, p, q, x, y, z)\} > 0 \\ (\text{pour } q \to -\varepsilon\infty, |p + qy'_x| \text{ restant borné}), \end{cases}$$

lorsque (4. 1) *satisfait à l'ensemble des conditions géométriques que voici :*

a. (4.3) *a lieu; les dérivées troisièmes de* $\varphi(\rho, \sigma, \tau, p, q, x, y, z)$ *restent bornées quand* τ *s'annule;*

$$b.\qquad \left(\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2\sigma \frac{\partial^2}{\partial p\, \partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\right) g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) \leqq 0,$$

quels que soient σ, p, q, x, y, z;

$$c.\qquad (p^2 + q^2 + 1)^{-1} g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) < (\sigma^2 + 1)A,$$

A *étant une fonction de* x, y, z, σ, pq^{-1} *qui reste bornée tant que* x, y, z *restent bornés et que* $\sigma \neq pq^{-1}$.

Le problème de Dirichlet est mal posé *lorsque la circonstance suivante se présente :*

$\overline{b}$. *On peut choisir* σ, p, q, x, y, z *tels qu'on ait*

$$\left(\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2\sigma \frac{\partial^2}{\partial p\, \partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\right) g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) > 0$$

et que φ *soit analytique au voisinage du système d'arguments*

$$[\rho = g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, p, x, y, z), \sigma, \tau = 0, p, q, x, y, z].$$

26. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II. — Le lemme 14 prouve que le problème de Dirichlet est mal posé quand la circonstance $\overline{b}$ se présente

Supposons réalisées les conditions a, b, c. Le théorème I, les lemmes **11**, **12**, **13**, **15** et la remarque qui termine le paragraphe **20** démontrent alors la proposition suivante :

« Soit un ensemble compact en soi de données (γ, z_1, z_2), dont les contours γ vérifient (4.20); supposons que le long de γ, les dérivées intérieures εq des solutions des problèmes de Dirichlet correspondants soient bornées inférieurement dans leur ensemble ; ces solutions constituent un ensemble *compact en soi* (ou vide), dans l'espace des fonctions trois fois dérivables. »

Pour déduire de cette proposition le théorème II, il suffit, d'après le théorème II, d'établir le lemme suivant :

« Soit un système de données (4.1), γ, z_1, z_2 vérifiant les conditions suivantes : (4.1) satisfait à a, b, c; γ satisfait à (4.20); $z_1 < z_2$; γ est sur z_1; $f_1 > 0$; $f_2 \leqq 0$. Soit z_0 une surface voisine de z_1 comprise entre z_1 et z_2 et ayant γ pour frontière. Je dis qu'on peut modifier continûment (4.1), en respectant les conditions précédentes, de manière à réaliser, en outre, les suivantes : $f_0 = 0$, $f'_z \leqq 0$, en sorte que le nouveau problème de Dirichlet ainsi obtenu possède une solution unique et simple, z_0. »

Démontrons ce lemme. Choisissons h tel que, dans la région $f \geqq 0$, l'inégalité (4.3) se trouve vérifiée et que nous puissions y poser

$$f(r, s, t, p, q, x, y, z) = rt - s^2 + g(r, s, t, p, q, x, y, z) + h(r, s, t, p, q, x, y, z).$$

Supposons $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Envisageons l'équation

$$f(r, s, t, p, q, x, y, z, \lambda) = f(r, s, t, p, q, x, y, \lambda z) + (1 - \lambda) l(p, q, x, y, z) = 0,$$

où λ est un paramètre, qui varie de 0 à 1. Cette équation vérifie les conditions a, b, c, l'inégalité (4.20), l'inégalité $f_1 > 0$ et, quand $\lambda = 0$, l'inégalité $f'_z \leqq 0$, si nous imposons les relations suivantes à la fonction l:

$$l(p, q, x, y, z) \leqq 0, \qquad l(0, 0, x, y, 0) = 0,$$
$$l'_z(p, q, x, y, z) \leqq 0 \qquad (\text{pour } z \geqq 0).$$

Il est aisé de trouver une fonction $l(p, q, x, y, z)$, qui satisfait à ces trois relations et qui satisfait, en outre, aux deux conditions suivantes :

$f_2 \leqq 0$ quelque soit λ; $\quad f_0 = 0$ quand $\lambda = 0$. C. Q. F. D.

V. — Exemples.

Ce chapitre consiste en corollaires du théorème I; M. S. Bernstein, dans la seconde partie de son Mémoire paru au tome 29 des *Annales de l'École Normale*, avait donné des énoncés voisins de nos corollaires I et III et établi des cas particuliers de nos corollaires II et IV.

Nous attribuons à l'expression « problème de Dirichlet bien posé » le sens que définit le paragraphe **17** (p. 266).

27. Équation quasi linéaire. — Envisageons l'équation

$$ar + 2bs + ct + d = 0, \tag{5.1}$$

a, b, c, d étant quatre fonctions données de (p, q, x, y, z), qui vérifient les inégalités

$$ac > b^2, \qquad a > 0, \qquad c > 0.$$

Posons

$$E = ap^2 + 2bpq + cq^2.$$

Le théorème I appliqué à (5.1) prend la forme suivante :

Corollaire I. — *Supposons que $\frac{a}{E}$ et $\frac{c}{E}$ tendent vers zéro quand $p^2 + q^2$ augmente indéfiniment (x, y et z restant bornés); dans ces mêmes conditions, $\frac{ap+bq}{E}$ et $\frac{bp+cq}{E}$ tendent nécessairement vers zéro. Supposons que les dérivées troisièmes des fonctions $\frac{a}{E}$, $\frac{c}{E}$, $\frac{ap+bq}{E}$, $\frac{bp+cq}{E}$, $\frac{d}{E\sqrt{p^2+q^2}}$ par rapport aux variables $\left[x, y, z, (p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}, \operatorname{arc\,tang}\frac{p}{q}\right]$ restent bornées quand $p^2 + q^2$ augmente indéfiniment (x, y et z restant bornés).*

Le problème de Dirichlet est bien posé pour la famille de tous les contours γ, lorsque $\frac{|d|}{E}$ reste borné quand $p^2 + q^2$ augmente indéfiniment (x, y et z restant bornés).

Lorsque cette condition, $\frac{|d|}{E}$ borné, n'est pas vérifiée et que les conditions précédentes sont vérifiées, alors le problème de Dirichlet est mal posé.

Corollaire II. — *Supposons que nous ayons, quand p^2+q^2 est infiniment grand, les développements limités, deux fois dérivables,*

$$\frac{a}{E}=\quad q^2\eta_{-2}+\alpha_{-1}+\alpha_{-2}+\ldots,$$
$$\frac{b}{E}=-pq\eta_{-2}+\beta_{-1}+\beta_{-2}+\ldots,$$
$$\frac{c}{E}=\quad p^2\eta_{-2}+\gamma_{-1}+\gamma_{-2}+\ldots,$$
$$\frac{d}{E}=\delta_1+\ldots,$$

où η_n, α_n, β_n, γ_n sont des fonctions de (p, q, x, y, z) qui sont par rapport à (p, q), positivement homogènes ([13]) *et de degrés n. Nous avons nécessairement*

$$\alpha_{-1}p^2+2\beta_{-1}pq+\gamma_{-1}q^2=0,\qquad \alpha_{-2}p^2+2\beta_{-2}pq+\gamma_{-2}q^2=1.$$

Nous supposons que $\dfrac{(ac-b^2)(p^2+q^2)}{E^2}$ *ne peut tendre vers zéro quand p^2+q^2 augmente indéfiniment (x, y et z restant bornés); cette hypothèse équivaut à l'inégalité* ([14])

$$\eta_{-2}>\beta_{-1}^2-\alpha_{-1}\gamma_{-1}, \tag{5.2}$$

dont le second membre ne peut être négatif.

Si nous avons, quels que soient p, q, x, y, z,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\delta_1(p, q, x, y, z)}{\eta_{-2}(p, q, x, y, z)}\right\}\leqq 0, \tag{5.3}$$

alors le problème de Dirichlet est bien posé pour la famille Φ des contours γ qui vérifient l'inégalité

$$\varepsilon\left\{y''_{x^2}\mp\frac{\delta_1(\mp y'_x, \pm 1, x, y, z)}{\eta_{-2}(\mp y'_x, \pm 1, x, y, z)}\right\}\geqq 0. \tag{5.4}$$

([13]) $\alpha(p, q)$ est positivement homogène de degré n lorsque l'on a

$$\alpha_n(tp, tq)=t^n\alpha_n(p, q)\quad \text{quand}\quad t>0.$$

([14]) L'hypothèse $ac>b^2$ entraîne l'inégalité $\eta_{-2}\geqq\beta_{-1}^2-\alpha_{-1}\gamma_{-1}$.

Si (5. 2), *a lieu et si* $\frac{a}{E}$, $\frac{b}{E}$, $\frac{c}{E}$, $\frac{d}{E\sqrt{p^2+q^2}}$ *sont des fonctions analytiques de* $\left[x, y, z, (p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}, \operatorname{arc\,tang}\frac{p}{q}\right]$, *au voisinage d'un système de valeurs* $\left[x, y, z, (p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}=0, \operatorname{arc\,tang}\frac{p}{q}\right]$ *qui ne vérifient pas* (5. 3), *alors le problème de Dirichlet est mal posé.*

28. Extrémales d'une intégrale double. — Appliquons les deux corollaires précédents aux extrémales de l'intégrale double

$$\iint g(p, q, x, y, z)\,dx\,dy \qquad (g''_{p^2}g''_{q^2} > g''^2_{pq},\; g''_{p^2} > 0,\; g''_{q^2} > 0),$$

c'est-à-dire à l'équation

$$rg''_{p^2} + 2sg''_{pq} + tg''_{q^2} + g''_{px} + g''_{qy} + pg''_{pz} + qg''_{qz} - g'_z = 0.$$

Supposons que nous ayons, quand p^2+q^2 est infiniment grand, un développement limité, cinq fois dérivable

$$g(p, q, x, y, z) = g_n(p, q, x, y, z) + g_{n-1}(p, q, x, y, z) + g_{n-2}(p, q, x, y, z) + \ldots,$$

g_n, g_{n-1}, g_{n-2} étant, par rapport à (p, q), positivement homogènes et de degrés respectifs n, $n-1$, $n-2$.

Nous obtenons les conclusions suivantes :

Corollaire III. — *Supposons*

$$n > 1 \qquad \text{et} \qquad g_n(p, q, x, y, z) \neq 0 \qquad (\text{quand } p^2+q^2 \neq 0);$$

le problème de Dirichlet est bien posé pour tous les contours γ.

Corollaire IV. — *Supposons* $n=1$, *c'est-à-dire*

$$g(p, q, x, y, z) = g_1(p, q, x, y, z) + g_0(p, q, x, y, z) + g_{-1}(p, q, x, y, z) + \ldots.$$

Nous avons

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial p^2} = q^2 k_{-3}, \qquad \frac{\partial^2 g_1}{\partial p\,\partial q} = -pqk_{-3}, \qquad \frac{\partial^2 g_1}{\partial q^2} = p^2 k_{-3},$$
$$\frac{\partial g_0}{\partial p} = qk_{-2}, \qquad \frac{\partial g_0}{\partial q} = -pk_{-2},$$

k_{-3} *et* k_{-2} *étant des fonctions de* (p, q, x, y, z), *qui sont, par rapport* *à (p, q) positivement homogènes et de degrés respectifs* -3 *et* -2; *il en résulte que*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}\frac{\partial^2 g}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 g}{\partial p\,\partial q}\right)^2=2g_{-1}k_{-3}-(k_{-2})^2+\ldots;$$

nous avons donc nécessairement

$$2g_{-1}k_{-3}\geqq(k_{-2})^2.$$

Supposons que

$$2g_{-1}k_{-3}>(k_{-2})^2. \tag{5.5}$$

Supposons enfin que nous ayons, quels que soient $x, y, z, y'_x, \pm$,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\pm\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial x\,\partial y'_x}\pm y'_x\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial y\,\partial y'_x}\mp\dfrac{\partial g_1}{\partial y}+\dfrac{\partial g_0}{\partial z}}{\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial y'^2_x}}\right\}\geqq 0, \tag{5.6}$$

les arguments de g_1 *et* g_0 *étant* $(\mp y'_x, \pm 1, x, y, z)$.

Alors le problème de Dirichlet est bien posé pour la famille Φ *des contours* γ *dont les équations* $y(x)$, $z(x)$ *vérifient l'inégalité différentielle*

$$\varepsilon\left\{y''_{x^2}+\frac{\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial x\,\partial y'_x}+y'_x\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial y\,\partial y'_x}-\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\pm\dfrac{\partial g_0}{\partial z}}{\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial y'^2_x}}\right\}\geqq 0, \tag{5.7}$$

où g_1 *et* g_2 *ont pour arguments* $(\mp y'_x, \pm 1, x, y, z)$.

L'hypothèse (5.6) *qui ne diffère pas de* (5.3) *a le même caractère de nécessité que cette dernière.*