JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. VESSIOT

Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, $F(x,y,z,p,q,r,s,t) = o$, intégrables par la méthode de Darboux

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 18 (1939), p. 1-61.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, *intégrables par la méthode de Darboux;*

PAR E. VESSIOT.

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ.

1. Les recherches dont je publie ici une première partie ont été consacrées à l'étude des équations aux dérivées partielles du second ordre, $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, qui ont deux systèmes de caractéristiques. Je les appellerai, pour abréger, équations E.

Ma théorie des faisceaux de transformations infinitésimales [1] m'a

---

(1) *Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration* (*Bull. de la Société Math. de France*, t. **42**, 1924, p. 336-395); *Sur l'intégration des faisceaux de transformations infinitésimales, dans le cas où le degré du faisceau étant n, celui du faisceau dérivé est n + 1* (*Ann. de l'École Normale sup.*, 3e série, t. **45**, 1928, p. 189-253). Ces Mémoires sont cités, dans le texte, avec les indications respectives abrégées M_1 et M_2.

permis d'aborder, dans toute sa généralité, le problème consistant à trouver toutes les équations E *intégrables par la méthode de Darboux*. J'entends par là (bien que ce terme puisse être pris dans un sens plus large) celles dont chacun des deux systèmes de caractéristiques possède une infinité d'invariants indépendants. On sait ([1]) que ce sont celles qui ont, suivant une expression d'Ampère, dont Goursat a précisé et élargi le sens, une *intégrale générale de la première classe*. Mais, ayant à employer le mot de « classe » dans une autre acception, je préfère ne pas user de cette dénomination.

Conformément aux principes que j'ai exposés dans un travail préliminaire ([2]) publié dans ce journal à l'occasion du jubilé scientifique de Goursat, je considère les équations E comme réparties en *classes*, une classe étant un ensemble d'équations qui dérivent de l'une quelconque d'entre elles par les diverses *transformations de contact* de l'espace x, y, z. Si l'une des équations $\mathcal{E}$ d'une telle classe $(\mathcal{E})$ est intégrable par la méthode de Darboux, il en est de même de toutes les autres équations de la classe : je dirai donc, de la classe elle-même, qu'elle est intégrable par la méthode de Darboux. Il s'agira de trouver toutes les classes $(\mathcal{E})$ ainsi intégrables; et, autant que cela sera possible, de trouver, pour chacune de ces classes, une *équation type*, explicite, qui en fasse partie et, par conséquent, puisse la représenter.

Or, ainsi que je l'ai montré dans ce Mémoire M_3, à chaque classe $(\mathcal{E})$ est *associée*, par une correspondance biunivoque, une *classe* $(\mathcal{F})$ de faisceaux de transformations infinitésimales à 7 variables, le mot classe désignant ici un ensemble de faisceaux $\mathcal{F}$ qui dérivent de l'un quelconque d'entre eux par les diverses *transformations ponctuelles* de l'espace à 7 dimensions : ou, comme l'on dit, un ensemble formé de tous les faisceaux *semblables* à un faisceau donné. Dans cette

---

([1]) *Voir* E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. **2**, Chap. VIII, p. 209-240.

([2]) *Sur les faisceaux de tranformations infinitésimales associées aux équations aux dérivées partielles du second ordre* $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ (*Journal de Math. pures et appliquées*, t. **25**, 1936, p. 301-320). Ce Mémoire sera cité, dans la suite, avec l'indication abrégée M_3.

correspondance, aux systèmes de caractéristiques du second ordre, et d'ordre supérieur, des équations $\mathcal{E}$, et à leurs invariants, correspondent les *sous-faisceaux singuliers* des faisceaux $\mathcal{F}$ et de leurs prolongements, et les invariants de ces sous-faisceaux.

On peut donc substituer à la recherche des classes ($\mathcal{E}$) intégrables par la méthode de Darboux celle des classes ($\mathcal{F}$), qui sont telles que chacun des sous-faisceaux singuliers de l'un des faisceaux $\mathcal{F}$ de la classe (et par suite, de tout faisceau de la classe), ou de l'un de ses prolongements, ait au moins deux invariants indépendants. C'est ce qu'on pourra appeler les classes ($\mathcal{F}$) intégrables par la méthode de Darboux.

Il est bien remarquable que *le problème ainsi posé se trouve entièrement dominé par la théorie des groupes de transformations continus, chaque solution étant, en effet, fournie par un de ces groupes.*

2. Il convient de faire ici une remarque essentielle. Le passage d'une classe ($\mathcal{E}$), donnée par l'une de ses équations, à la classe ($\mathcal{F}$) associée est immédiat. Au contraire, le passage d'une classe ($\mathcal{F}$), donnée par un quelconque de ses faisceaux, à la classe ($\mathcal{E}$) associée exige en général une opération d'intégration. Toute équation E peut, en effet, être donnée par trois équations de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} r &= \rho(x, y, z, p, q, a, b),\\ s &= \sigma(x, y, z, p, q, a, b),\\ t &= \tau(x, y, z, p, q, a, b),\end{aligned}\right.$$

dont cette équation E résulterait par l'élimination des variables a, b (¹); et alors le faisceau qui a pour base les quatre transformations

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \rho\frac{\partial f}{\partial p} + \sigma\frac{\partial f}{\partial q},\quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \sigma\frac{\partial f}{\partial p} + \tau\frac{\partial f}{\partial q},\quad \frac{\partial f}{\partial a},\quad \frac{\partial f}{\partial b}$$

(faisceau dont l'intégration équivaut à celle de l'équation E donnée),

(¹) Les équations (1) donnent une représentation paramétrique (paramètres a, b), de la surface (coordonnées r, s, t), représentée par l'équation E lorsque celle-ci est donnée sous la forme $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$. Si l'on résout cette équation par rapport à l'une des trois dérivées r, s, t, on pourra prendre les deux autres comme paramètres a, b.

appartient à la classe $(\mathcal{F})$ associée à la classe $(\mathcal{E})$ dont l'équation considérée fait partie.

Mais si l'on se donne inversement une classe $(\mathcal{F})$ par un de ses faisceaux $\mathcal{F}$, celui-ci ne sera pas, en général, de la forme (2), et il faudra, pour obtenir une équation $\mathcal{E}$ de la classe $(\mathcal{E})$ associée à $(\mathcal{F})$ [en utilisant la correspondante entre les systèmes (1) et les faisceaux (2)], ramener d'abord le faisceau $\mathcal{F}$ donné [1], par un changement de variables approprié, à la *forme canonique* (2). Et cela exige que l'on trouve une intégrale complète du *faisceau dérivé* de $\mathcal{F}$: ce qui est un problème d'intégration [2].

On voit donc que si l'on a trouvé toutes les classes $(\mathcal{F})$ intégrables par la méthode de Darboux, on aura, par-là même, trouvé toutes les classes $(\mathcal{E})$ intégrables par cette méthode; mais que la recherche d'équations types pour ces diverses classes $(\mathcal{E})$ nécessitera ensuite certains calculs d'intégration, dont les résultats pourront ne pas pouvoir s'exprimer sous forme explicite.

3. Le présent Mémoire traite des équations E qui ont, pour chacun de leurs systèmes de caratéristiques, deux invariants au moins du premier ou du second ordre. Il contient la détermination de toutes les classes $(\mathcal{F})$ associées à de telles équations, c'est-à-dire de tous les faisceaux $\mathcal{F}$ dont chaque sous-faisceau singulier a au moins deux invariants indépendants.

La recherche d'équations types pour les classes $(\mathcal{E})$ associées aux classes $(\mathcal{F})$ ainsi déterminées fera l'objet d'un autre Mémoire. Voici les résultats essentiels de celui-ci.

Premier Cas [3]. — 1° Dans le cas où *chaque sous-faisceau singulier*

---

(1) L'ensemble des faisceaux $\mathcal{F}$ associés aux diverses équations E constitue une catégorie de faisceaux de degré 4, à 7 variables, caractérisée par certaines propriétés de *structure*, qui ont été analysées dans mon Mémoire M_3, et qui seront rappelées au paragraphe I du présent travail.

(2) J'ai donné, dans mon Mémoire M_2, une méthode pour résoudre de tels problèmes. Elle comporte la détermination d'intégrales particulières de certains systèmes complets, c'est-à-dire d'intégrales premières de certains systèmes d'équations différentielles ordinaires.

(3) Ce cas fait l'objet des paragraphes II et III. Le paragraphe I contient des

a exactement deux invariants indépendants, la forme type générale du faisceau est, $\left[\text{avec la notation } a_\alpha b_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \text{ pour } \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha b_\alpha\right]$,

$$(3) \quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u, u_0) L_\alpha, & X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(v, v_0) M_\alpha \\ X_3 = \dfrac{\partial f}{\partial u_0}, & X_4 = \dfrac{\partial f}{\partial v_0} \end{cases} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

les lettres (L_1, L_2, L_3), (M_1, M_2, M_3) désignant des transformations infinitésimales

$$(4) \quad L_i = \lambda_{i,\alpha}(w_1, w_2, w_3) \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \qquad M_i = \mu_{i,\alpha}(w_1, w_2, w_3) \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \qquad (i, \alpha = 1, 2, 3),$$

qui définissent les deux *groupes paramétriques* de l'une quelconque des cinq *structures* de groupes à trois paramètres.

2° Si les équations de cette structure [1] sont

$$(5) \qquad c_i = \Omega_i(b_1, b_2, b_3;\ a_1, a_2, a_3) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

l'*intégrale générale* du faisceau (3) est donnée par les équations

$$(6) \quad w_i = \Omega_i(b_1, b_2, b_3;\ a_1, a_2, a_3) \quad (i = 1, 2, 3), \qquad u_0 = \varphi(u), \qquad v_0 = \psi(v),$$

pourvu que les a_i et les b_i soient des fonctions, de u et v respectivement, satisfaisant, séparément, aux deux *systèmes de Lie*

$$(7) \quad \frac{da_i}{du} = \varphi_\alpha(u, u_0) \lambda_{\alpha,i}(a_1, a_2, a_3), \qquad \frac{db_i}{dv} = \psi_\alpha(v, v_0) \mu_{\alpha,i}(b_1, b_2, b_3)$$
$$(i, \alpha = 1, 2, 3),$$

dans lesquels on aura remplacé u par la fonction arbitraire $\varphi(u)$ et v_0 par la fonction arbitraire $\psi(v)$.

---

généralités sur les équations E et les faisceaux associés et sur les propriétés de structure caractérisant l'ensemble de ceux-ci. On y trouvera ensuite la définition des invariants du premier et du second ordre; et divers théorèmes sur le nombre de ces invariants et sur les classes ($\mathcal{E}$) dont les classes ($\mathcal{F}$) associées ont des invariants du premier ordre.

[1] J'entends par-là les équations qui donnent, en fonction des paramètres (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) de deux transformations quelconques T_a, T_b de tout groupe de cette structure, les paramètres c_1, c_2, c_3 de la transformation produit $T_c = T_b T_a$.

3° Pour que le faisceau (3), et, par suite, la classe ($\mathcal{E}$) associée, ait une *intégrale générale explicite*, il faut et il suffit que chacun des sous-faisceaux singuliers $\{X_1, X_3\}$ et $\{X_2, X_4\}$ soit un faisceau *intégrable* (¹). Ce cas se confond avec celui où chacun de ces sous-faisceaux a un invariant du premier ordre, et est caractérisé par la forme type spéciale

$$(8)\quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \psi_\alpha(u) L_\alpha, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \psi_\alpha(v) M_\alpha, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

Remarquons que la forme (3) met en évidence les invariants u, u_0, et v, v_0 des deux sous-faisceaux singuliers : dans la forme (8), u et v sont des invariants du premier ordre.

4° On conclut de ce qui précède que, parmi les classes ($\mathcal{E}$) intégrables par la méthode de Darboux, celles qui ont une intégrale générale explicite sont celles qui contiennent des équations de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$.

Deuxième Cas (§ IV). — 1° Dans le cas où *l'un des deux faisceaux singuliers a trois invariants indépendants et l'autre deux seulement*, la forme type générale du faisceau est

$$(9)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u} + u_1 \dfrac{\partial f}{\partial u_0} + \varphi_\alpha(u, u_0, u_1) L_\alpha, & X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial v} + v_0 \psi_\alpha(v) M_\alpha, \\ X_3 = \dfrac{\partial f}{\partial u_1}, & X_4 = \dfrac{\partial f}{\partial v_0} \\ \qquad\qquad (\alpha = 1, 2), & \end{cases}$$

les lettres (L_1, L_2), (M_1, M_2) désignant des transformations infinitésimales

$$(10)\quad L_i = \lambda_{i,\alpha}(w_1, w_2) \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \qquad M_i = \mu_{i,\alpha}(w_1, w_2) \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \qquad (i, \alpha, = 1, 2),$$

qui définissent les deux groupes paramétriques de l'une quelconque des deux structures de groupes à deux paramètres. Le sous-faisceau

---

(¹) Un faisceau *intégrable*, de degré n, est un faisceau tel que son degré et ceux de ses *dérivés* successifs (jusqu'au premier de ces dérivés qui est *complet*), forment une progression arithmétique de raison 1. On a affaire ici à des faisceaux de degré 2, dont le dérivé troisième est *complet*.

singulier $\{X_1, X_3\}$ a un invariant du premier ordre, v, et un invariant du second ordre, v_0. Le sous-faisceau singulier $\{X_2, X_4\}$ est toujours intégrable; et il a zéro ou deux invariants indépendants du premier ordre. La forme (9) met en évidence trois invariants indépendants, u, u_0, u_1 de ce sous-faisceau.

2° Si les équations de la structure qui intervient dans (9) sont :

$$c_i = \Omega_i(b_1, b_2; a_1, a_2) \qquad (i = 1, 2), \tag{11}$$

l'*intégrale générale* du faisceau (9) est donnée par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} w_i = \Omega_i(b_1, b_2; a_1, a_2) \qquad (i = 1, 2), \\ u_0 = \varphi(u), \qquad u_1 = \varphi'(u), \qquad v_0 = \psi(v), \end{array}\right. \tag{12}$$

où les a_i et les b_i sont des fonctions de u et v, respectivement, assujetties à satisfaire aux deux systèmes de Lie respectifs,

$$\frac{da_i}{du} = \varphi_\alpha(u, u_0, u_1)\,\lambda_{\alpha,i}(a_1, a_2), \quad \frac{db_i}{dv} = v_0\,\psi_\alpha(v)\,\mu_{\alpha,i}(b_1, b_2) \quad (i, \alpha = 1, 2), \tag{13}$$

où l'on aura remplacé u_0 par la fonction arbitraire $\varphi(u)$, u_1 par sa dérivée $\varphi'(u)$, et v_0 par la fonction arbitraire $\psi(u)$.

3° Pour que le faisceau (9), et, par conséquent, la classe ($\mathcal{E}$) associée ait une *intégrale générale explicite*, il faut et il suffit que le sous-faisceau singulier $\{X_1, X_3\}$ soit intégrable. La forme type correspondante est

$$\left\{\begin{array}{ll} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u} + u_1 \dfrac{\partial f}{\partial u_0} + u_0\,\varphi_\alpha(v)\,L_\alpha, & X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial v} + v_0\,\psi_\alpha(v)\,M_\alpha, \\ X_3 = \dfrac{\partial f}{\partial u_1}, & X_4 = \dfrac{\partial f}{\partial v_0}. \end{array}\right. \tag{14}$$

Ce cas se confond avec celui où le sous-faisceau singulier $\{X_2, X_4\}$ a deux invariants du premier ordre indépendants.

4° Ici encore, parmi les classes ($\mathcal{E}$) intégrables par la méthode de Darboux, celles qui ont une intégrale générale explicite sont celles qui contiennent des équations de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$.

Troisième Cas (§ V). — *Si chacun des sous-faisceaux singuliers admet trois invariants indépendants*, le faisceau est réductible, par une transformation ponctuelle, à la forme type unique

$$(15)\qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z} + r\dfrac{\partial f}{\partial p}, & X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z} + t\dfrac{\partial f}{\partial q}, \\ X_3 = \dfrac{\partial f}{\partial r}, & X_4 = \dfrac{\partial f}{\partial t}, \end{cases}$$

équivalente à l'équation $s = 0$. Chacun des sous-faisceaux singuliers a deux invariants indépendants du premier ordre, et est intégrable. Il n'y a donc, dans ce cas, qu'une classe $(\mathcal{E})$, celle des équations réductibles à la forme $s = 0$ par une transformation de contact, et cette classe a une intégrale générale explicite.

4. En définitive, *les classes* $(\mathcal{F})$ *cherchées sont données par un nombre limité de faisceaux types, dont chacun est fourni par une structure de groupe, à deux ou trois paramètres* (le cas relatif à $s = 0$ étant mis à part). Ces types dépendent de fonctions arbitraires qui, sauf dans des cas particuliers, par exemple ceux où l'intégration peut se faire sous forme explicite, paraissent essentielles.

Les résultats précédents (¹) mettent, par ailleurs, en évidence ce fait remarquable que les classes $(\mathcal{E})$ intégrables explicitement peuvent être représentées par des équations de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$. On sait que les équations de cette forme ont fait l'objet des recherches de Goursat, qui a réussi, par une méthode purement formelle, à former le tableau (²) des types auxquels peuvent se réduire, par des transformations de la forme

$$x' = \xi(x), \qquad y' = \eta(y), \qquad z' = \zeta(x, y, z),$$

celles qui ont un invariant du second ordre pour chacun de leurs systèmes de caractéristiques. Ces types devront donc se retrouver dans les classes $(\mathcal{E})$ en question ici; et ce qui précède explique que

(¹) Ces résultats ont été, sous une forme plus sommaire, publiés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes rendus*, t. 205, 1937, p. 643).

(²) E. Goursat, *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 2ᵉ série, t. 1, 1899, p. 31-78 et 439-464).

Goursat ait pu, par des artifices de calcul ingénieux, en donner des intégrales générales explicites. Dans le Mémoire annoncé plus haut, je montrerai comment ces *équations de Goursat* se présentent et s'intègrent, tout naturellement, par l'application des théories exposées dans le présent travail (¹).

Bourg-la-Reine, le 24 octobre 1937.

I. — Équations du second ordre et faisceaux associés. Invariants du premier et du second ordre.

1. Étant donné une équation aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes et une fonction inconnue de ces deux variables

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

supposons que l'on ait obtenu une représentation paramétrique (²)

$$\left\{ \begin{aligned} r &= \rho(x, y, z, p, q;\, u, v), \\ s &= \sigma(x, y, z, p, q;\, u, v), \\ t &= \tau(x, y, z, p, q;\, u, v), \end{aligned} \right. \tag{2}$$

de la surface de l'espace (r, s, t), (dépendant des indéterminées x, y, z, p, q), représentée par cette équation (1).

Alors l'intégration de cette équation équivaut à celle du faisceau de transformations infinitésimales, aux sept variables x, y, z, p, q, u, v,

(¹) En fait, seuls les 9 types de Goursat qui ne dépendent pas de fonctions arbitraires se présentent : ils peuvent être pris comme équations-types de classes ($\mathcal{E}$) distinctes, ce qui prouve que, quoique le point de vue de classification de Goursat soit autre que le nôtre, ces équations sont irréductibles les unes aux autres par des transformations de contact. Au contraire, les deux équations de Goursat qui dépendent de fonctions arbitraires se ramènent à des types plus simples, exempts de tout arbitraire, par des transformations de contact appropriées.

(²) Le cas où (1) serait résolue par rapport à l'une des dérivées r, s, t est un cas particulier évident. Si, par exemple, la résolution donnait, faite par rapport à r, l'équation $r = R(x, y, z, p, q, s, t)$, on aurait $\rho = R$, $\sigma = s$, $\tau = t$. *Voir* M_1, n° 6, p. 350.

qui a pour base les quatre transformations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X}f &= \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \rho\frac{\partial f}{\partial p} + \sigma\frac{\partial f}{\partial q},\\ \mathrm{Y}f &= \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \sigma\frac{\partial f}{\partial p} + \tau\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}\right.$$

Les caractéristiques de Monge de (1) sont les trajectoires [1] des transformations *singulières* [2] de (3), et chaque système de caractéristiques correspond ainsi à un *sous-faisceau singulier* [3], de degré 2, du faisceau (3). Les invariants du système de caractéristiques sont ceux du sous-faisceau singulier correspondant [4].

Je dirai que l'équation (1) et le faisceau (3) sont *équivalents;* la manière de passer de l'équation au faisceau équivalent, ou du faisceau à l'équation équivalente, résulte immédiatement de la comparaison des formules (2) et (3).

Je dirai qu'une équation (1) et un faisceau $\mathcal{F}$, de degré 4, à sept variables, $x_1, x_2, \ldots, x_7$, sont *associés*, si $\mathcal{F}$ est *semblable* à l'un [5]

---

[1] Il s'agit des caractéristiques du second ordre (*voir* M_1, n^os 23 et 24, p. 380 et suivantes). Il faut entendre qu'on passe d'une trajectoire

$$(\mathrm{T})\qquad \left\{\begin{aligned} &x = \xi(w), \qquad y = \eta(w), \qquad z = \zeta(w),\\ &p = \varpi(w), \qquad q = \chi(w), \qquad u = \varphi(w), \qquad v = \psi(w),\end{aligned}\right.$$

à la caractéristique correspondante en associant aux cinq premières de ses équations (T) les équations (2), où l'on remplace les sept variables x, y, z, p, q, u, v par les valeurs (T). Pour le passage inverse, il faudrait utiliser les formules

$$(2\ bis)\qquad u = \mathrm{U}(x, y, z, p, q, r, s, t), \qquad v = \mathrm{V}(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

qui définissent les paramètres (u, v) d'un point quelconque de la surface (1), en r, s, t.

[2] *Voir* M_1, n° 22, p. 380.

[3] *Voir* M_1, n° 23, p. 380.

[4] Un *invariant* d'un faisceau est une fonction qui admet toute transformation du faisceau. L'identité des invariants du système de caractéristique avec ceux du sous-faisceau singulier correspondant a lieu [comme plus haut l'identité des caractéristiques avec les trajectoires des transformations singulières, *voir* la Note [1] précédente], sous le bénéfice des équations (2) et (2 *bis*).

[5] Il y a une infinité de faisceaux (3) équivalents à (1), puisque la surface (1) de l'espace (r, s, t) est susceptible d'une infinité de représentations paramétriques (2).

des faisceaux (3) équivalents à l'équation, c'est-à-dire s'il en provient par un changement de coordonnées

$$(4) \qquad x_i = \xi_i(x, y, z, p, q, u, v) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 7),$$

de l'espace à sept dimensions (x, y, z, p, q, u, v). Les faisceaux associés à une même équation (1) constituent donc une *classe* de faisceaux, en entendant par ce terme tout ensemble de faisceaux constitué par tous les faisceaux *semblables* à l'un deux ([1]).

J'ai montré (M_3, n° **4**, p. 309) qu'inversement, si un faisceau $\mathcal{F}$ est associé à une équation (1), il est associé à une infinité d'équations (1), et que toutes les équations (1) associées à un même faisceau $\mathcal{F}$ constituent une *classe* d'équations (1), en entendant par ce terme tout ensemble d'équations (1) dérivant de l'une d'entre elles par les diverses transformations de contact de l'espace (x, y, z). A toute classe (C) d'équations (1) est ainsi *associée* une classe (Γ) de faisceaux de degré 4, à sept variables, chaque équation de (C) étant associée à chaque faisceau de (Γ).

Les faisceaux de degré 4, à sept variables, qui sont associés à des équations (1) sont ceux dont le *dérivé* ([2]) est de degré 6, à l'exclusion seulement de ceux qui auraient une transformation *distinguée* ou dont le dérivé aurait un *sous-faisceau caractéristique* ([3]) de degré supérieur à 2 (*voir* M_3, n° **3**, p. 307). Pour déduire de la classe (Γ) qui contient un tel faisceau $\mathcal{F}$, supposé donné, la classe (C) associée, il faut, par un changement de variables (4) approprié, ramener ce faisceau $\mathcal{F}$ à la forme canonique (3), ce qui exige la détermination d'une *intégrale*

([1]) Deux faisceaux à n variables sont dits semblables si l'on passe de l'un à l'autre par une transformation ponctuelle de l'espace à n dimensions, convenablement choisie.

([2]) Le *dérivé* d'un faisceau $\mathcal{F}$ est le faisceau $\mathcal{F}'$ constitué par tous les *crochets* (de Jacobi) des transformations de $\mathcal{F}$, prises deux à deux; $\mathcal{F}$ est contenu dans $\mathcal{F}'$. Un faisceau identique à son dérivé est dit *complet* (M_1, n° **2**, p. 344).

([3]) Une transformation d'un faisceau $\mathcal{F}$ est dite *distinguée* si elle est en involution avec toute transformation de $\mathcal{F}$ (deux transformations de $\mathcal{F}$ étant dites *en involution* si leur crochet appartient à $\mathcal{F}$). L'ensemble des transformations distinguées d'un faisceau $\mathcal{F}$ (s'il en a) est un sous-faisceau de $\mathcal{F}$, qui est appelé son *sous-faisceau caractéristique* : c'est un faisceau complet, (M_1, n^{os} **18** et **19**, p. 373 et suivantes).

complète (¹) du dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ (*voir* M_3, n° **3**, p. 308; M_2, n° **7**, p. 215). Cela fait, la classe (Γ) est celle de l'équation (1) équivalente au faisceau (3) ainsi déduit du faisceau $\mathcal{F}$ donné.

2. Je n'aurai à considérer, dans ce travail, que les équations (1) ayant deux systèmes de caractéristiques : c'est ce que j'appellerai, pour abréger, des *équations* E. Les faisceaux associés auront donc deux sous-faisceaux singuliers, et d'après les résultats généraux relatifs à la structure des faisceaux de degré (4), à dérivé de degré 6 [M_3, n° **1**, p. 303], leur structure sera du type canonique

$$(5)\quad (X_1, X_3) = Z_1, \qquad (X_2, X_4) = Z_2, \qquad (X_{2i-1}, X_{2j}) \equiv 0 \qquad (i, j = 1, 2).$$

Considérons donc un faisceau $\mathcal{F}$, de degré 4, à sept variables, ayant cette structure, et examinons s'il satisfait aux conditions, rappelées plus haut, moyennant lesquels il sera associé à une équation E. La structure (5) exclut l'existence de toute transformation distinguée dans $\mathcal{F}$ [M_3, p. 304]; il y a donc seulement à discuter le nombre des transformations distinguées (indépendantes) de son dérivé $\mathcal{F}'$, qui devra être égal à 2.

Remarquons d'abord que l'identité de Jacobi donne

$$(X_j, Z_1) = \big(X_j, (X_1, X_3)\big) = \big(X_3, (X_1, X_j)\big) - \big(X_1, (X_3, X_j)\big), \qquad (j = 2, 4),$$

or (X_1, X_j) et (X_3, X_j) sont, d'après (5), des transformations de $\mathcal{F}$. Donc $\big(X_3(X_1, X_j)\big)$ et $\big(X_1(X_3, X_j)\big)$ appartiennent à $\mathcal{F}'$. L'identité écrite montre donc que (X_j, Z_1), $(j = 2, 4)$, appartient à $\mathcal{F}'$. Et un raisonnement analogue montrerait qu'il en est de même des deux transformations (X_i, Z_2), $(i = 1, 3)$.

Si donc on désigne par T une transformation quelconque qui forme avec X_1, X_2, X_3, X_4, Z_1, Z_2 un système de sept transformations divergentes, aux sept variables considérées, $\mathcal{F}'$ aura des formules de structures de la forme, (*modulo* $\mathcal{F}'$)

$$(6)\quad \begin{cases} (X_{2i-1}, Z_1) \equiv a_i T, \qquad (X_{2j}, Z_2) \equiv b_i T, \qquad (X_h, X_k) \equiv 0, \\ \qquad (X_{2i-1}, Z_2) \equiv 0, \qquad (X_{2j}, Z_1) \equiv 0 \\ \qquad (i, j = 1, 2;\ h, k = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

(¹) *Voir* M_1, n° 7, p. 351..

Les transformations distinguées, $U = u_\alpha X_\alpha + v_\beta Z_\beta$, ($\alpha = 1, 2, 3, 4$; $\beta = 1, 2$) ([1]) de $\mathcal{F}'$ seront, dès lors, définies par le système d'équations

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_1 v_1 = a_2 v_1 = 0, & b_1 v_2 = b_2 v_2 = 0, \\ a_1 u_1 + a_2 u_3 - c v_2 = 0, & b_1 u_2 + b_2 u_4 + c v_1 = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on n'a, ni $a_1 = a_2 = 0$, ni $b_1 = b_2 = 0$, ce système s'écrit

$$(8) \qquad v_1 = v_2 = 0, \qquad a_1 u_1 + a_2 u_3 = 0, \qquad b_1 u_2 + b_2 u_4 = 0;$$

et, par conséquent, $\mathcal{F}'$ a un sous-faisceau caractéristique, de base

$$(9) \qquad X'_3 = a_2 X_1 - a_1 X_3, \qquad X'_4 = b_2 X_2 - b_1 X_4.$$

Ces deux transformations (9), qui sont, pour $\mathcal{F}$, des *transformations principales* ([2]), appartiennent, respectivement, à ses deux sous-faisceaux singuliers; lesquels sont, en effet,

$$(10) \qquad (\mathcal{F}_1), \quad \{X_1, X_3\} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{F}_2), \quad \{X_2, X_4\}.$$

Le faisceau $\mathcal{F}$ a donc, dans ce cas, un sous-faisceau principal de degré 2.

Si l'on a, en second lieu, $a_1 = a_2 = 0$, et si b_1, b_2, c ne sont pas tous nuls, (7) se réduit à deux équations

$$v_2 = 0, \qquad b_1 u_2 + b_2 u_4 + c v_1 = 0.$$

Donc $\mathcal{F}'$ a un sous-faisceau caractéristique de degré 4, et $\mathcal{F}$ a pour sous-faisceau principal $\{X_1, X_3, X'_4\}$, ou se confond avec son sous-faisceau principal, si b_1 et b_2 sont nuls

Conclusions analogues, si b_1 et b_2 sont nuls sans que a_1, a_2 et c le

---

([1]) Comme on le fait dans le calcul tensoriel, j'emploierai couramment la notation $a_\alpha b_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ pour désigner la somme $\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha b_\alpha$.

([2]) J'appelle *principale* toute transformation d'un faisceau qui est une transformation distinguée de son dérivé, et *sous-faisceau principal* de ce faisceau celui qui est formé de toutes ses transformations principales (s'il en a). Je dois faire observer que j'ai employé ce dernier terme (sous-faisceau principal) avec une acception différente dans M_3, n° 9, p. 316; mais comme il s'appliquait à des faisceaux n'ayant pas la structure (5), aucune confusion n'est à craindre ici.

soient aussi. Enfin, si $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c = 0$, $\mathcal{F}'$ est complet, toutes ses transformations sont distinguées, et $\mathcal{F}$ est à lui-même son sous-faisceau principal.

En définitive, *pour qu'un faisceau $\mathcal{F}$ à sept variables, ayant la structure* (5), *soit associé à une équation* E, *il faut et il suffit que son sous-faisceau principal soit de degré* 2 *seulement*. J'appellerai, pour abréger, faisceau Φ, tout faisceau remplissant ces conditions.

Les cas exclus par cet énoncé sont les suivants :

1° $\mathcal{F}'$ a un sous-faisceau caractéristique de degré 4. Comme son dérivé est de degré 7, puisque $\mathcal{F}'$ est à sept variables, et n'est pas complet, il est réductible à la forme (M_2, n° 7, p. 215)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial w_i} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

On en conclut sans peine, pour $\mathcal{F}$, la forme

$$X = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + a\frac{\partial f}{\partial p} + b\frac{\partial f}{\partial w_0}, \qquad W_j = \frac{\partial f}{\partial w_j} + c_j\frac{\partial f}{\partial w_0} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

avec la condition [relative à la structure (5)],

$$k_1 h_{23} + k_2 h_{31} + k_3 h_{12} \neq 0, \qquad h_{i,j} = W_i c_j - W_j c_i, \qquad k_i = W_i a$$
$$(i, j = 1, 2, 3).$$

2° $\mathcal{F}'$ est complet : $\mathcal{F}$ est alors réductible à la forme

$$W_i = \frac{\partial f}{\partial w_i} + a_i\frac{\partial f}{\partial w} + b_i\frac{\partial f}{\partial w_0} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

avec la condition [relative à la structure (5)],

$$h_{14}k_{23} + h_{24}k_{31} + h_{34}k_{12} + h_{23}k_{14} + h_{31}k_{24} + h_{12}k_{34} \neq 0,$$
$$h_{ij} = W_i a_j - W_j a_i, \qquad k_{ij} = W_i b_j - W_j b_i \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

5. *Un faisceau Φ n'a pas d'invariant.* — En effet, s'il en avait un, ce serait aussi un invariant de son dérivé [1]; et celui-ci, étant de

[1] Tout invariant d'un faisceau F quelconque admet le crochet de deux transformations quelconques de F, puisqu'il admet ces transformations. C'est donc un invariant du dérivé F′ de F; et, par suite, de tous ses dérivés successifs F′, F″, etc.

degré 6 et à sept variables, serait complet : ce qui ne peut pas être, pour un faisceau Φ, d'après la discussion du n° 2.

Voyons combien les sous-faisceaux singuliers (10) d'un faisceau Φ peuvent avoir, au plus, d'invariants indépendants. Si $\mathcal{F}_1$ en avait 4, son dérivé $\mathcal{F}'_1$, qui est, d'après (5), $\{X_1, X_3, Z_1\}$, en aurait également 4, et étant de degré 3 et à sept variables, il serait complet (¹). Donc on aurait, dans (6), $a_1 = a_2 = 0$: ce qui est exclu, d'après ce qui précède. Remarquons, du reste, que, d'après la formule (5), $\mathcal{F}_1$ n'est pas complet et, par conséquent, ne saurait avoir cinq invariants (distincts). Donc *l'un ou l'autre sous-faisceau singulier d'un faisceau Φ ne peut avoir plus de trois invariants indépendants.*

Supposons que l'équation (1) soit l'une des équations E associées au faisceau $\mathcal{F}$ considéré (supposé être un faisceau Φ) : les invariants éventuels des deux systèmes de caractéristiques de E proviendront des invariants éventuels de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ par la transformation (4) qui donnera à $\mathcal{F}$ la forme (3). Or, un invariant de E sera du premier ordre (ou d'ordre zéro) s'il satisfait aux conditions $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0$; c'est-à-dire si c'est un invariant du sous-faisceau principal de (3), car $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ sont distinguées pour le dérivé de (3), qui est

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Les invariants éventuels du premier ordre (ou d'ordre zéro) de E proviendront donc des invariants de $\mathcal{F}_1$, ou de $\mathcal{F}_2$, qui seront, en même temps, des invariants du sous-faisceau principal de $\mathcal{F}$. C'est ce que nous appellerons les *invariants du premier ordre de $\mathcal{F}_1$ et de $\mathcal{F}_2$*. Les autres seront dits du second ordre.

Supposons, ce qui loisible, que l'on ait pris, dans la base de $\mathcal{F}$, les transformations principales X'_3, X'_4 [équations (9)] pour X_3 et X_4. Alors, les invariants éventuels du premier ordre de $\mathcal{F}_1$, par exemple,

(¹) Pour qu'un faisceau quelconque, de degré m, à n variables $\{X_1, \ldots, X_m\}$ soit complet il faut et il suffit que le système d'équations aux dérivées partielles $X_1 = 0, \ldots, X_n = 0$, soit (au sens de Clebsch) *complet*, c'est-à-dire qu'il ait $n - m$ solutions indépendantes : ce qui équivaut à dire que $X_1, \ldots, X_m$ ont $n - m$ invariants communs indépendants.

seront des invariants du faisceau (¹) $\{X_1, X_3, Z_1, T, X_4\}$, qui est de degré 5 : il y en aura donc deux au plus (indépendants). Ainsi *l'un ou l'autre sous-faisceau singulier d'un faisceau Φ ne peut avoir plus de deux invariants du premier ordre* (indépendants).

4. Tous ces résultats connus sur les invariants des systèmes de caractéristiques d'une équation du second ordre se présentent donc ici bien facilement. Montrons encore comment de deux invariants du premier ordre de l'un des systèmes on déduit un invariant du second ordre de ce même système.

Soient v, v_0 deux invariants du premier ordre de $\mathcal{F}_1$; et explicitons les conditions de structure $(X_1 X_2) \equiv 0, (X_3 X_2) \equiv 0$. Elles expriment que l'on a des identités de la forme

$$(X_1, X_2) = a_\alpha X_\alpha, \qquad (X_3, X_2) = b_\alpha X_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Si l'on y remplace f par v et v_0, en tenant compte que cela annule, par hypothèse, X_1, X_3, X_4, on obtient

$$X_1(X_2 u) = a_2(X_2 u), \qquad X_1(X_2 v_0) = a_2(X_2 v_0);$$
$$X_3(X_2 u) = b_2(X_2 v), \qquad X_2(X_2 v_0) = b_2(X_2 v_0).$$

D'où l'on conclut que $w = X_2 v_0; X_2 v$ annule $X_1 X_3$, c'est-à-dire est un invariant de $\mathcal{F}_1$. Sa valeur est bien déterminée, et n'est pas constante; car si l'on avait l'une des identités

$$X_2 v = 0, \qquad X_2 v_0 = 0, \qquad X_2 v_0 - k X_2 v = X_2(v_0 - kv) = 0 \qquad (k = \text{const.}),$$

v, v_0, ou $v_0 - kv$ (invariants de X_1, X_3, X_4), serait un invariant de $\mathcal{F}$, lequel n'en a pas. Reste à montrer que w n'est pas du premier ordre.

En effet, la formule de structure $(X_2, X_4) = Z_2$ donne

$$X_4(X_2 v) = -(Z_2 v), \qquad X_4(X_2 v_0) = -Z_2 v_0.$$

Donc $X_4 w = 0$ s'écrit $X_2 v Z_2 v_0 - X_2 v_0 Z_2 v = 0$; ce qui exprime que v et v_0 sont des invariants d'une transformation de la forme $Z_2 + m X_2$. Le faisceau de degré 6, à sept variables, $\{X_1, X_3, Z_1, T, Z_2 + m X_2\}$

(¹) Nous supposons T défini ici par $(X_1, Z_1) = T$, ce qui est loisible, parce que $a_2 = 0$ et $a_4 \neq 0$ dans les formules (5). Le second dérivé $\mathcal{F}_1''$ est donc $\{X_1 X_3 Z_1 T\}$.

aurait donc deux invariants distincts, ce qui ne peut être. On a donc $X_4 w \neq 0$. (C. Q. F. D.)

5. Je terminerai ces préliminaires sur les invariants en examinant ce qui peut résulter, pour les équations E associées à un faisceau Φ, quant à leur forme, de l'existence d'invariants du premier ordre pour les sous-faisceaux singuliers de ce faisceau.

Soit de nouveau $\mathcal{F}$ un faisceau Φ, dont la base, X_1, X_2, X_3, X_4, satisfait aux formules de structure (5). Supposons, de plus, que X_3, X_4 soient transformations principales. Le sous-faisceau $\{X_3, X_4\}$, étant le sous-faisceau caractéristique de $\mathcal{F}'$ (voir n° **2**), est complet (M_1, n° **18**, p. 374). On a donc $(X_3, X_4) = c_1 X_3 + c_2 X_4$; et, par suite, si l'on pose $X'_3 \equiv a X_3$, $X'_4 = b X_4$,

$$(X'_3, X'_4) = b(ac_1 - X_4 a) X_3 + a(bc_2 - X_3 b) X_4.$$

On pourra donc choisir a et b de manière à avoir $(X'_3, X'_4) = 0$; et, dès lors, il est loisible de supposer que X_3, X_4 satisfont, d'emblée, à la condition de permutabilité $(X_3, X_4) = 0$. Cela permet, de plus, de supposer les variables choisies de manière à avoir, pour (X_3, X_4), la forme canonique

$$X_3 = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v}. \tag{11}$$

Les variables de $\mathcal{F}$ étant ainsi $w_1, w_2, \ldots, w_6, u, v$, pour passer de $\mathcal{F}$ à l'une des équations (1) associées, il faudra trouver un changement de variables, qui ramène $\mathcal{F}$ à la forme (3). Comme $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ y sont des transformations de base du sous-faisceau caractéristique du dérivé de (3), les autres variables x, y, z, p, q étant des variables caractéristiques de ce dérivé ([1]), on pourra garder les variables u et v ci-dessus introduites, et x, y, z, p, q seront des fonctions des w_i et de u, v, tellement choisies que l'on ait des identités de la forme

$$X_i = g_i X + h_i Y + k_i \frac{\partial f}{\partial u} + l_i \frac{\partial f}{\partial v} \qquad (i = 1, 2;\ g_1 h_2 - g_2 h_1 \neq 0). \tag{12}$$

([1]) *Voir* M_3, p. 308.

On sait, de plus, d'après M_3, n° **3**, p. 308, que la condition pour qu'il en soit ainsi est que ce changement de variables ramène $\mathcal{F}'$, qui est de degré 6 et à dérivé de degré 7, à sa forme canonique, définie dans M_2, n° **7**, p. 212 et suivantes; et, en particulier, que x, y, z doivent pour cela (et cela suffit), constituer une intégrale complète de $\mathcal{F}'$. On sait encore que, une fois cette intégrale complète choisie, les autres variables p et q se calculent par des différentiations.

Ce dernier point résulte, du reste, des formules (12), qui donnent

$$(13) \qquad g_i = X_i x, \qquad h_i = X_i y, \qquad p . g_i + q . h_i = X_i z \qquad (i = 1, 2);$$

de sorte que p et q sont définis par le système linéaire

$$(14) \qquad p . X_i x + q . X_i y = X_i z \qquad (i = 1, 2).$$

Ajoutons que, p et q étant ainsi calculés, ρ, σ, τ seront donnés, à leur tour, par les équations linéaires

$$(15) \qquad \rho . X_i x + \sigma . X_i y = X_i p, \qquad \sigma . X_i x + \tau . X_i y = X_i q \qquad (i = 1, 2),$$

qui seront, nécessairement, compatibles.

En ce qui concerne le calcul de x, y, z, la méthode donnée dans M_2, n° **4**, p. 205 et suivantes, indique : 1° que l'on peut prendre pour x toute fonction *caractéristique*, c'est-à-dire qui soit un invariant du sous-faisceau caractéristique (distingué) de $\mathcal{F}'$; 2° que l'on peut prendre ensuite pour y tout invariant distinct de x, du sous-faisceau distingué du faisceau $\mathcal{F}'_x$ formé par toutes les transformations de $\mathcal{F}'$ qui laissent x invariant; 3° que l'on peut prendre enfin pour z tout invariant, indépendant de y et z, du faisceau $\mathcal{F}'_{x,y}$ formé de toutes les transformations de $\mathcal{F}'$ qui admettent x et y comme invariants, lequel est nécessairement complet.

6. Il résulte immédiatement de ce qui précède que tout invariant du premier ordre de $\mathcal{F}_2$, par exemple, pourra être pris pour x, dans le calcul indiqué. Car ce sera, par définition, (n° **3**), une fonction caractéristique de $\mathcal{F}'$. On aura alors $X_2 x = g_2 = 0$; et, par suite,

$$X_2 = h_2 Y + k_2 \frac{\partial f}{\partial u} + l_2 \frac{\partial f}{\partial v},$$

et comme k_2 ne peut être nul, on pourra supposer

$$(16) \qquad X_2 = Y + k_2 \frac{\partial f}{\partial u} + l_2 \frac{\partial f}{\partial v}.$$

La formule de structure $(X_2, X_3) \equiv 0$ devient alors $(X_2, X_3) = 0$, puisque le crochet $\left(X_2 \frac{\partial f}{\partial u}\right)$ ne contient ni $\frac{\partial f}{\partial x}$, ni $\frac{df}{\partial y}$. Il en résulte que l'on a $\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{\partial \tau}{\partial u} = 0$, c'est-à-dire que σ et τ ne dépendent que de v. En éliminant cette variable entre les équations

$$s = \sigma(x, y, z, p, q; v), \qquad t = \tau(x, y, z, p, q; v),$$

on obtiendra donc une équation E de la forme

$$(17) \qquad F(x, y, z, p, q, s, t) = 0.$$

Si donc $\mathcal{F}_1$ ou $\mathcal{F}_2$ a un invariant de premier ordre, la classe des équations E *associées à $\mathcal{F}$ contient des équations où ne figurent comme dérivées du second ordre, que l'une des dérivées r, t* [1].

7. Poursuivons l'analyse du numéro précédent. On pourra supposer, pour X_1, une formule de la forme

$$(18) \qquad X_1 = X + h_1 Y + k_1 \frac{\partial f}{\partial u} + k_2 \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Alors $Z_1 = (X_1, X_2)$ ne contiendra pas $\frac{\partial f}{\partial x}$, de sorte que le sous-faisceau $\mathcal{F}'_x$, formé des transformations de $\mathcal{F}'$, qui laissent x invariant aura pour base X_2, X_3, X_4, Z_1, Z_2, la transformation $Z_2 = (X_2, X_4)$ laissant x invariant, puisque X_2 et X_4 le font.

X_3 et X_4, transformations distinguées de $\mathcal{F}'$, sont aussi transformations distinguées de $\mathcal{F}'_x$, car les crochets de ces transformations avec

---

[1] Ceci correspond au théorème connu, d'après lequel toute équation $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, pour laquelle un des systèmes de caractéristiques a un invariant du premier ordre se ramène à la forme $F(x, y, z, p, q, s, t) = 0$ par toute transformation de contact où cet invariant est pris pour la nouvelle variable x. *Voir*, par exemple, GOURSAT, *Équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. **2**, p. 154.

X_2, Z_1, Z_2 appartiennent à $\mathcal{F}'$ et laissent invariant x (comme crochets de deux transformations qui le laissent invariant) : de sorte qu'elles appartiennent à $\mathcal{F}'_x$. Je dis que Z_1 est une autre transformation distinguée de $\mathcal{F}'_x$. En effet, d'après ce qui précède, les crochets (X_3, Z_1) et (X_4, Z_1) appartiennent à $\mathcal{F}'_x$; et il en est de même de (X_2, Z_1), qui, comme X_2 et Z_1, laisse x invariant, et qui, d'après le n° **2**, fait partie de $\mathcal{F}'$. On a, par ailleurs, d'après l'identité de Jacobi,

$$(Z_2, Z_1) = \big(Z_2, (X_1, X_3)\big) = \big(X_3, (X_1, Z_2)\big) - \big(X_1, (X_3, Z_2)\big).$$

Or, le premier terme du second membre appartient à $\mathcal{F}'$, car (X_1, Z_2) lui appartient (n° **2**), et X_3 est transformation distinguée de $\mathcal{F}'$. D'autre part, on a, d'après (16),

$$-Z_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial v}, X_2\right) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial k_2}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial l_2}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v},$$

et, par suite, σ et τ ne dépendant pas de u,

$$-(X_3, Z_2) = -\left(\frac{\partial f}{\partial u}, Z_2\right) = \frac{\partial^2 k_2}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 l_2}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

D'où il résulte que $\big(X_1, (X_3, Z_2)\big)$ appartient aussi à $\mathcal{F}'$. Il en est, dès lors, de même, de (Z_1, Z_2). Mais ce crochet laisse x invariant, comme Z_1 et Z_2 eux-mêmes; donc il appartient à $\mathcal{F}'_2$; et ce fait achève de prouver que Z_1 est transformation distinguée de $\mathcal{F}'_x$.

On peut donc associer à x, comme second élément d'une intégrale complète de $\mathcal{F}'$, tout invariant du faisceau $\{X_3, X_4, Z_1\}$; et, par conséquent, tout invariant du premier ordre de $\mathcal{F}_1$, s'il en existe. Car un tel invariant admettra X_3, X_4 et aussi $Z_1 = (X_1, X_3)$, puisqu'il admet X_1 et X_3.

Supposons donc que, dans ce qui précède, y soit un invariant de $\mathcal{F}_1$: ce sera nécessairement un invariant du premier ordre, puisque $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$ le laissent invariant (x, y, z, p, q, u, v étant des variables indépendantes). On aura dans (18), $h_1 = 0$; et la condition $(X_4, X_1) \equiv 0$, *mod.* $\mathcal{F}$, deviendra $(X_4, X_1) = 0$. D'où il résulte que $\frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0$. Mais, dès lors, σ ne dépend ni de u ni de v; de sorte que $s = \sigma(x, y, z, p, q)$ est une des équations E associées à $\mathcal{F}$.

Donc (¹), *si* $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *ont chacun un invariant du premier ordre, la classe des équations* E *associées à* $\mathcal{F}$ *contient des équations où ne figure comme dérivée du second ordre, que la dérivée* s.

Remarquons enfin qu'il résulte de ce qui précède que *tout invariant du premier ordre de* $\mathcal{F}_1$ *peut être associé à tout invariant du premier ordre de* $\mathcal{F}_2$ *pour figurer dans une intégrale complète de* $\mathcal{F}$!

Or le passage d'une intégrale complète à une autre se fait par une transformation de contact (M_2, n° **12**, p. 227). Si donc $\mathcal{F}$ est pris sous la forme (3), et si $x' = f(x, y, z, p, q)$, $y' = g(x, y, z, p, q)$ sont, respectivement, pour $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ des invariants du premier ordre [ce qui équivaut à dire que ce sont des invariants du premier ordre respectifs des deux systèmes de caractéristiques de (1)], il existera des transformations de contact [de (x, y, z, p, q) en (x', y', z', p', q')], comprenant les équations

$$x' = f(x, y, z, p, q), \qquad y' = g(x, y, z, p, q);$$

ce qui équivaut à dire que le crochet de Poisson $[f, g]$ est nul identiquement. C'est le résultat classique rappelé dans la Note précédente.

On remarquera que les résultats précédents montrent que l'on peut définir par des équations types de la forme

$$(a) \qquad r = f(x, y, z, p, q, s),$$
$$(b) \qquad s = f(x, y, z, p, q),$$

les classes d'équations E ayant, respectivement, un invariant du premier ordre pour un des systèmes de caractéristiques, et un invariant du premier ordre pour chacun des systèmes de caractéristiques.

(¹) Ceci correspond au théorème connu que toute équation

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

qui a un invariant du premier ordre pour chacun de ses systèmes de caractéristiques peut être ramenée à la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ par une transformation de contact : les deux invariants supposés pouvant être les deux variables nouvelles x et y d'une telle transformation.

II. — Détermination des faisceaux Φ dont chaque sous-faisceau singulier a deux invariants et deux seulement.

8. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau Φ dont un des sous-faisceaux singuliers, $\mathcal{F}_2$ par exemple, a deux invariants distincts, u et u_0, et pas plus. Prenons-les comme variables, avec cinq autres variables quelconques $x_1, \ldots, x_5$. Les dérivées $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial u_0}$ ne figureront pas dans les transformations de base, X_2, X_4, de $\mathcal{F}_2$. Je dis que l'on pourra supposer que celles de $\mathcal{F}_1$, X_1 et X_3 sont résolues par rapport à ces deux dérivées. Dans le cas contraire, en effet, on pourrait supposer

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \omega\frac{\partial f}{\partial u_0} + \xi_{1,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad && X_3 = \xi_{3,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \\
&(2)\quad X_2 = \xi_{2,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, && X_4 = \xi_{4,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}
\end{aligned}
\qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 5).
$$

Mais alors, les crochets

$$(X_2, X_1) = X_2\omega\frac{\partial f}{\partial u_0} + \ldots \qquad (X_4, X_1) = X_4\omega\frac{\partial f}{\partial u_0} + \ldots$$

devant être des combinaisons de X_1, X_2, X_3, X_4 [en vertu des formules $(X_{2i}, X_{2j-1}) \equiv 0 \; (mod.\ \mathcal{F})$], on aurait $X_2\omega = X_4\omega = 0$. Donc ω serait un invariant de $\mathcal{F}_2$; et, comme $\mathcal{F}_2$ n'a pas d'invariant distinct de u et u_0, on aurait $\omega = \varphi(u, u_0)$. Or, cela n'est pas possible, car cela entraînerait l'existence d'un invariant pour $\mathcal{F}$, à savoir une fonction $f(u, u_0)$ satisfaisant à $\frac{\partial f}{\partial u} + \varphi(u, u_0)\frac{\partial f}{\partial u_0} = 0$. Donc la forme (1) n'est pas admissible pour $\mathcal{F}_1$. C. Q. F. D.

Cela posé, supposons que $\mathcal{F}_1$ a aussi deux invariants distincts, soient v, v_0, et pas davantage. Prenons u, u_0, v, v_0 comme variables, en même temps que trois autres variables x_1, x_2, x_3; et nous aurons, pour $\mathcal{F}_1$, des transformations de base de la forme

$$
(\mathcal{F})\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\mathcal{F}_1)\quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \xi_{1,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad && X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0} + \xi_{3,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \\
&(\mathcal{F}_2)\quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + \xi_{2,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, && X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0} + \xi_{4,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (\alpha = 1, 2, 3).
$$

Les relations de structure $(X_{2i}, X_{2j-1}) \equiv 0$ deviennent dès lors,

$$(X_{2i-1}, X_{2j}) = 0 \qquad (i, j = 1, 2). \tag{3}$$

On a donc, en particulier $(X_3, X_4) = 0$, et le faisceau $\{X_3, X_4\}$ est complet. Soit u, v, w_1, w_2, w_3 un système fondamental d'invariants de ce faisceau : nous prendrons comme variables u, v, u_0, v_0, w_1, w_2, w_3. Alors la base de $\mathscr{F}$ deviendra

$$(\mathscr{F}) \left\{ \begin{array}{lll} (\mathscr{F}_1) & X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u} + Lf, & X_3 = \dfrac{\partial f}{\partial u_0} \\ (\mathscr{F}_2) & X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial v} + Mf, & X_4 = \dfrac{\partial f}{\partial v_0} \end{array} \right\}, \tag{4}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \lambda_\alpha(u, u_0; v, v_0; w_1, w_2, w_3) \dfrac{\partial f}{\partial w_\alpha} \\ M = \mu_\alpha(u, u_0; v, v_0; w_1, w_2, w_3) \dfrac{\partial f}{\partial w_\alpha} \end{array} \right. \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{4^{bis}}$$

Et l'on voit immédiatement que, des quatre identités (3), $(X_3, X_4) = 0$ est vérifiée, $(X_1, X_4) = 0$ et $(X_2, X_3) = 0$ montrent que v_0 ne figure pas dans les λ, ni u_0 dans μ; et il reste seulement à tirer les conséquences de l'identité

$$(X_1, X_2) = 0. \tag{5}$$

9. Si on la différentie par rapport à u_0, qui ne figure pas dans X_2, on en déduit les identités nouvelles

$$(L'_{u_0}, X_2) = 0, \qquad (L''_{u_0^2}, X_2) = 0, \qquad (L'''_{u_0^3}, X_2) = 0, \qquad (L^{\text{IV}}_{u_0^4}, X_2) = 0, \tag{6}$$

où, par une notation évidente, on a posé

$$L^{(i)}_{u_0^i} = \frac{\partial^i \lambda_\alpha}{\partial u_0^i} \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, 3, 4). \tag{7}$$

Or, trois au plus des quatre transformations (7) peuvent être divergentes. Par ailleurs, $L'_{u_0} = (X_3, X_1)$ n'est pas nulle. Donc l'une des dérivées $L''_{u_0^2}$, $L'''_{u_0^3}$, $L^{\text{IV}}_{u_0^4}$ est une combinaison linéaire des dérivées d'indice moindre, lesquelles sont divergentes; et je vais montrer que les coefficients de cette combinaison sont des fonctions des seules variables u et u_0.

Cela résulte d'un théorème classique de S. Lie. Etant données $(m+1)$ transformations infinitésimales $Y, Y_1, \ldots, Y_m$, si $Y_1, \ldots, Y_m$ laissent invariante l'équation $Y=0$ et si l'on a, pour $i=m$, une identité de la forme $Y_i = lY + l_1 Y_1 + \ldots + l_{i-1} Y_{i-1}$, alors qu'il n'en existe pas pour $i<m$, les fonctions $l_1, \ldots, l_{i-1}$ sont des intégrales de l'équation $Y=0$. Il suffit d'appliquer ce théorème, en prenant pour $Y_1, \ldots, Y_m$ les m premières transformations (7) qui ne soient pas divergentes, et, pour Y, successivement X_2 et X_4, pour justifier notre affirmation.

Remarquons, d'autre part, qu'une identité

$$L''_{u_0^2} = \theta(u, u_0) L'_{u_0} \qquad \text{ou} \qquad L'''_{u_0^3} = \theta_1(u, u_0) L'_{u_0} + \theta_2(u, u_0) L''_{u_0^2}$$

entraîne, par différentiation, des identités de la forme

$$L^{\text{IV}}_{u_0^4} = \rho_\alpha(u, u_0) L^{(\alpha)}_{u_0^\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{8}$$

et nous conclurons que la condition (5) entraîne, dans tous les cas, l'existence d'une identité, au moins de la forme (8). On conclut de là, par intégration, que L est de la forme

$$L = L_0 + \varphi_\alpha(u, u_0) L_\alpha, \qquad L_i = \lambda_{i\alpha}(u, v, w_1, w_2, w_3) \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \tag{9}$$
$$(\alpha = 1, 2, 3;\ i = 0, 1, 2, 3).$$

Si, de plus, on prend comme variables nouvelles, à la place de w_1, w_2, w_3 des invariants indépendants, w'_1, w'_2, w'_3 de la transformation $\frac{\partial f}{\partial u} + L_0$ (variables u, w_1, w_2, w_3; et v étant un paramètre), cette transformation sera réduite à $\frac{\partial f}{\partial u}$, et les formes de L_1, L_2, L_3, X_2, X_3, X_4 seront conservées. On peut donc, dans les formules (9), supposer $L_0 = 0$, c'est-à-dire que l'on a

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u, u_0) L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{10}$$

les L_i étant toujours de la forme indiquée aux équations (9).

Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, 1 de la variable u_0 sont, de par leur origine, linéairement indépendantes. Or l'identité (5) s'écrit maintenant

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}, X_2\right) + \varphi_\alpha(u, u_0)(L_\alpha, X_2) = 0,$$

et les coefficients des $\frac{\partial f}{\partial w_i}$ dans les crochets $\left(\frac{\partial f}{\partial u}, X_2\right)$, (L_i, X_2), ne dépendent pas de u_0. On conclut donc

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}, X_2\right) = 0, \qquad (L_i, X_2) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{11}$$

et, d'après la première de ces nouvelles identités, u a disparu des coefficients μ_i de M : de sorte que ceux-ci ne dépendent que de v, v_0; w_1, w_2, w_3.

10. Revenons maintenant à l'identité (5), et différentions par rapport à v_0; nous pourrons raisonner sur M et ses dérivées M'_{v_0}, $M''_{u_0^2}$, ..., comme nous l'avons fait tout à l'heure sur L et ses dérivées L'_{u_0}, $L''_{u_0^2}$, ..., ce qui nous donnera pour M une expression de la forme

$$M = M_0 + \psi_\alpha(v, v_0) M_\alpha, \qquad M_i = \mu_{i\alpha}(v, w_1, w_2, w_3) \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \tag{12}$$
$$(\alpha = 1, 2, 3;\ i = 0, 1, 2, 3).$$

Si nous prenons ensuite comme variables, à la place de w_1, w_2, w_3, des invariants w''_1, w''_2, w''_3 de $\frac{\partial f}{\partial v} + M_0$, cette transformation sera réduite à $\frac{\partial f}{\partial v}$; et, comme les w'' ne dépendront ni des u, ni de v_0, les M garderont leur forme, X_3 et X_4 ne changeront pas, et X_1 conservera sa forme (10). Enfin, on aura

$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(v, v_0) M_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{13}$$

M_1, M_2, M_3 étant de la forme indiquée par (12).

Portant alors cette expression de X_2 dans (5), et raisonnant comme à la fin du n° 5 précédent, nous aurons

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}, X_1\right) = 0, \qquad (M_i, X_1) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{14}$$

et la première de ces identités indique que v aura disparu de l'expression des L_i. Ainsi X_1 et X_2 sont de la forme (10) et (13), avec

$$L_i = \alpha_{i\alpha}(u, w_1, w_2, w_3) \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad M_i = \mu_{i\alpha}(v, w_1, w_2, w_3) \frac{\partial f}{\partial \alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{15}$$

11. Ce premier résultat obtenu, considérons l'une quelconque des identités $(L_i, X_2) = 0$, et différentions-la par rapport à u. Comme X_2 n'en dépend pas, nous pourrons raisonner sur ces dérivées successives comme nous l'avons fait au n° **5** pour les dérivées de L par rapport à u_0. Nous aurons donc des identités de la forme

$$L_i''' = \theta_{i,0}(u)L_i + \theta_{i,1}(u)L_i' + \theta_{i,2}(u)L_i'',$$

les accents désignant des dérivées par rapport à u. D'où

$$(16)\qquad L_i = \varphi_{i,\alpha}(u)L_{i,\alpha}, \qquad L_{ij} = \lambda_{ij,\alpha}(w_1, w_2, w_3)\frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \qquad (i, j, \alpha = 1, 2, 3)$$

et, par suite, pour L, la forme

$$(17)\qquad L = \varphi_\alpha(u, u_0)L_\alpha = \varphi_\alpha(u, u_0)\,\varphi_{\alpha,\beta}(u)L_{\alpha,\beta} = \overline{\varphi}_{\alpha,\beta}(u, u_0)L_{\alpha,\beta}.$$

De plus, $\varphi_{i,1}$, $\varphi_{i,2}$, $\varphi_{i,3}$ étant des fonctions de u linéairement indépendantes, l'identité $(L_i, X_2) = 0$, où l'on portera l'expression (16) de L_i, donnera (X_2 ne dépendant pas de u), les identités nouvelles

$$(18)\qquad (L_{i,j}, X_2) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

On en conclura [1] que les $L_{i,j}$ sont des combinaisons linéaires, à coefficients constants, de trois transformations au plus de la forme $\overline{\lambda}_\alpha(w_1, w_2, w_3)\dfrac{\partial f}{\partial w_\alpha}$, $(\alpha = 1, 2, 3)$; de sorte qu'en définitive, X_1 est de la forme

$$(19)\qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u, u_0)L_\alpha, \qquad L_i = \lambda_{i\beta}(w_1, w_2, w_3)\frac{\partial f}{\partial w_\beta} \qquad (\beta = 1, 2, 3),$$

les L_i étant au nombre de trois au plus.

Mais s'il n'y avait qu'un seul L_i $(L_i = L_1)$, $\mathcal{F}_1$ admettrait comme invariants ceux de L_1, en plus de v et de v_0, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi les L_i, supposés divergents, sont au nombre de deux ou de trois. Et s'il y a deux L_i (divergents), soit L_1 et L_2, le

[1] Les $L_{i,j}$ laissant, d'après ces identités, X_2 invariant, il suffira d'appliquer le théorème de S. Lie rappelé au n° **9**, en observant que tout invariant de X_2 qui ne dépend que des w_i est une constante, sans quoi ce serait un invariant de $\mathcal{F}_2$, distinct de v et v_0, et l'on suppose que $\mathcal{F}_2$ n'a pas plus de deux invariants indépendants.

faisceau $\{L_1, L_2\}$ n'est pas complet; sans quoi son invariant serait un troisième invariant de $\mathcal{F}_1$, qui n'en a que deux.

D'autre part, on pourra supposer que les φ_i non nuls sont linéairement indépendants, c'est-à-dire ne sont liés par aucune relation linéaire homogène à coefficients constants : car une telle relation permettrait de réduire le nombre des L_i. Si donc on porte l'expression (19) dans l'identité (5) $(X_1, X_2) = 0$, on en déduira les identités

$$(L_i, X_2) = 0. \tag{20}$$

Enfin, on montrera de même, que X_2 est de la forme

$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(v, v_0) M_\alpha, \qquad M_j = \mu_{j\beta}(w_1, w_2, w_3)\frac{\partial f}{\partial w_\beta} \qquad (\beta = 1, 2, 3), \tag{21}$$

les M_j étant au nombre de deux ou trois, et divergentes, et les ψ_i étant des fonctions de v, v_0 linéairement indépendantes; et que l'on a les identités

$$(M_j, X_1) = 0. \tag{22}$$

12. Les identités (20) expriment que les L_i laissent X_2 invariante; il en sera donc de même de leurs crochets $(L_i, L_{i'})$. Si alors les L_i sont au nombre de trois, ces crochets en seront des combinaisons linéaires homogènes

$$(L_h, L_i) = c_{hi\alpha} L_\alpha \qquad (h, i, \alpha = 1, 2, 3), \tag{23}$$

et, en appliquant le théorème de Sophus Lie utilisé au n° **5**, on conclura que les coefficients c_{hij} sont des constantes. Donc les L_i forment alors un *groupe simplement transitif* $\mathcal{L}$ de l'espace (w_1, w_2, w_3).

S'il n'y a que deux L_i, soit L_1 et L_2, le crochet (L_1, L_2) ne pourra pas être une combinaison linéaire homogène de L_1 et L_2; car, s'il en était ainsi $\{L_1, L_2\}$ serait un faisceau complet, et son invariant serait un troisième invariant de $\mathcal{F}_1$. Nous poserons donc, dans ce cas,

$$L_3 = (L_1, L_2), \tag{24}$$

et L_1, L_2, L_3 étant de nouveau trois transformations divergentes laissant X_2 invariante, on conclura, comme dans le cas précédent, que L_1, L_2, L_3 forment un groupe simplement transitif $\mathcal{L}$.

On montrera de même que, s'il y a trois M_j, elles forment un groupe simplement transitif $\mathfrak{M}$ de l'espace (w_1, w_2, w_3); et qu'il en est de même pour M_1, M_2 et $M_3 = (M_1, M_2)$, dans le cas où il n'y a que deux M_j dans la formule (21).

Enfin les identités (20) ou (22) donnent, compte tenu des formules (21) ou (19), les identités

$$(L_i, M_j) = 0. \tag{25}$$

S'il y a trois L_i et trois M_j dans (19) et (21), ces identités montrent immédiatement que $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont *deux groupes simplement transitifs réciproques* (¹).

S'il y a deux L_i seulement dans (19), L_1 et L_2 laissant chaque M_j invariante [d'après (25)], il en sera de même pour $(L_1, L_2) = L_3$. Donc les identités (25) auront encore lieu pour $i = 1, 2, 3$. Et l'on montrera de même, s'il n'y a que deux M_j dans (21), que les formules (25) subsistent encore pour $j = 3$, dès que l'on a posé

$$M_3 = (M_1, M_2).$$

Les groupes $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$, tels qu'ils ont été définis dans chaque cas, sont donc toujours deux groupes simplement transitifs réciproques.

13. *En définitive*, toute classe (Γ) de faisceaux $\overline{\Phi}$ dont chaque sous-faisceau singulier a deux invariants indépendants (et pas davantage) a pour représentant un faisceau du type

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u, u_0) L_\alpha, & X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(v, v_0) M_\alpha, \\ X_3 &= \frac{\partial f}{\partial u_0}, & X_4 &= \frac{\partial f}{\partial v_0}, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

$$L_i = \lambda_{i\alpha}(w_1, w_2, w_3)\frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \quad M_i = \mu_{i\alpha}(w_1, w_2, w_3)\frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \quad (i, \alpha = 1, 2, 3), \tag{26bis}$$

où (L_1, L_2, L_3) et (M_1, M_2, M_3) sont deux groupes ($\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$) simplement transitifs réciproques. Réciproquement, tout faisceau $\mathfrak{F}$ de ce

---

(¹) *Voir*, par exemple, S. LIE et F. ENGEL, *Theorie der Transf. Gruppen*, t. I, p. 380.

type satisfait aux relations de structure

$$(X_{2i-1}, X_{2j}) = 0 \qquad (i = 1, 2; j = 1, 2)$$

et ses sous-faisceaux $\{X_1, X_3\}$, $\{X_2, X_4\}$ admettent respectivement les invariants v, v_0 et u, u_0. C'est donc un faisceau Φ, dont chaque sous-faisceau singulier a deux invariants au moins, sous la seule réserve que les φ_i et ψ_i ne satisfont à aucun des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui expriment, soit que

$$Z_1 = (X_3, X_1) = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_0} L_\alpha, \qquad Z_2 = (X_1, X_2) = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial v_0} M_\alpha$$

ne sont pas divergentes, soit [*voir* n° **2**] que Z_1 est en involution, dans $\mathcal{F}'$, avec X_1 et X_3, soit que Z_2 est en involution, dans $\mathcal{F}'$, avec X_2 et X_4. Et aucun des sous-faisceaux singuliers, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, de ce faisceau $\mathcal{F}$ n'aura plus de deux invariants si, ni les φ_i, ni les ψ_i ne satisfont aux systèmes d'équations aux dérivées partielles respectifs qui expriment que $\mathcal{F}''_1$, ou $\mathcal{F}''_2$, est complet.

Nous avons donc trouvé toutes les classes de faisceaux Φ, dont chaque sous-faisceau singulier a deux invariants. Dans leur type général (26), (26*bis*), interviennent deux groupes simplement transitifs réciproques $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$; de sorte que ce type, n'étant défini qu'à une transformation ponctuelle près, ne dépend que de la *structure* commune à ces deux groupes [1]. Il y a donc autant de types que de structures distinctes pour les groupes d'ordre 3. Ces types de structures ont été déterminés par S. Lie [2]; ils sont au nombre de cinq, dont l'un dépend d'une constante arbitraire c, avec des particularités spéciales pour $c = 0$ et $c = 1$.

Une même classe de faisceaux Φ a, du reste, une infinité de représentants (26), lorsque l'on a choisi un couple de groupes $(\mathcal{L})$, $(\mathcal{M})$ et un seul pour chaque structure; car un faisceau $\mathcal{F}$, supposé choisi comme représentant d'une classe, peut être réduit à la forme (26)

---

(1) Deux groupes simplement transitifs qui ont la même structure sont, en effet, semblables.

(2) *Voir*, par exemple, S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transf. Gruppen*, t. III, p. 716.

d'une infinité de manières, suivant le choix que l'on fait pour (u, u_0), (v, v_0), parmi les couples respectifs d'invariants de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

D'autre part, les types trouvés dépendent des fonctions arbitraires $\varphi_\alpha(u, u_0)$ et $\psi_\alpha(v, v_0)$; et il restera à discuter, pour chaque structure, combien de classes différentes de faisceaux sont ainsi représentées. Car deux faisceaux (26), pour lesquels les systèmes de fonctions φ_α et ψ_α sont différents, peuvent, néanmoins, appartenir à la même classe.

III. — Méthode d'intégration des faisceaux-types trouvés. Faisceaux intégrables et faisceaux semi-intégrables.

14. Occupons-nous maintenant de l'intégration d'un faisceau $\mathcal{F}$ du type (26), (26 *bis*) trouvé au paragraphe précédent. Soit

$$(1) \qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + Lf, \qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + Mf, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}$$

ce faisceau. Les transformations

$$(2) \qquad Lf = \varphi_\alpha(u, u_0) L_\alpha, \qquad Mf = \psi_\alpha(v, v_0) M_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

dans lesquelles (L_1, L_2, L_3) et (M_1, M_2, M_3) sont deux groupes simplement transitifs réciproques, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, de l'espace (w_1, w_2, w_3), sont indépendantes, la première, de v et v_0, la deuxième, de u et u_0. Nous avons à chercher les multiplicités intégrales, à deux dimensions de ce faisceau.

Soit S l'une d'elles. Je dis que l'on peut supposer que u et v sont, sur S, des variables indépendantes. Dans le cas contraire, en effet, on aurait, par exemple, $v = F(u)$. Comme v est un invariant quelconque du sous-faisceau $\mathcal{F}_2$ (c'est-à-dire $\{X_2, X_4\}$), on aurait, en même temps, $v_0 = G(u)$. Si donc

$$(3) \qquad X = aX_1 + bX_2 + a_0X_3 + b_0X_4$$

était une transformation de $\mathcal{F}$ laissant S invariante, on aurait, sur S,

$$0 = X(v - F) = b - aF', \qquad 0 = X(v_0 - G) = b_0 - aG',$$

d'où

$$X = a[X_1 + F'(u)X_2 + G'(u)X_4] + a_0X_3.$$

S, devant admettre deux transformations divergentes de cette forme, admettrait donc les transformations

$$X_1 + F'(u)X_2 + G'(u)X_4, \quad X_3,$$

et, par suite, leur crochet, $Z_1 = (X_1, X_3)$. Mais cela ne peut pas être, car S ne peut pas admettre plus de deux transformations infinitésimales divergentes, puisqu'elle est à deux dimensions. Notre affirmation est ainsi justifiée.

Dès lors, on aura, pour définir S, des équations de la forme

$$(4) \qquad u_0 = F(u, v), \qquad v_0 = G(u, v), \qquad w_i = H_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si nous exprimons que ce système admet la transformation (3), nous obtenons, en particulier, les conditions

$$aF'_u + bF'_v - a_0 = 0, \qquad aG'_u + bG'_v - b_0 = 0,$$

de sorte que l'on a, sur S,

$$X = a(X_1 + F'_u X_3 + G'_u X_4) + b(X_2 + F'_v X_3 + G'_v X_4).$$

Donc S devant admettre deux transformations divergentes de cette forme, admettra les transformations

$$(5) \qquad X_1 + F'_u X_3 + G'_u X_4, \qquad X_2 + F'_v X_3 + G'_v X_4.$$

Elle admettra donc leur crochet; et, comme, étant à deux dimensions, elle ne peut admettre plus de deux transformations divergentes, ce crochet, qui est

$$F'_v Z_1 - G'_u Z_2, \qquad \text{où} \quad Z_1 = (X_1, X_3), \qquad Z_2 = (X_2, X_4),$$

sera identiquement nul. Les équations (4) de S seront donc de la forme

$$(6) \qquad u_0 = F(u), \qquad v_0 = G(v), \qquad w_i = H_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et les transformations (5), de $\mathcal{F}$, que S admet, seront

$$(7) \qquad U = X_1 + F'(u)X_3, \qquad V = X_2 + G'(v)X_4.$$

Comme, réciproquement, tout faisceau ayant pour base deux transformations de la forme

$$(8) \qquad U = X_1 + \varphi(u)X_3, \qquad V = X_2 + \psi(v)X_4,$$

où φ et ψ sont des fonctions arbitraires, est complet, on obtiendra toutes les intégrales S cherchées en déterminant les multiplicités caractéristiques des divers faisceaux de cette forme.

15. Les équations de l'une d'elles étant prises sous la forme (6), les fonctions $F(u)$ et $G(v)$ seront déterminées par les quadratures

$$(9) \qquad u_0 = \int \varphi(u)\,du = F(u), \qquad v_0 = \int \psi(v)\,dv = G(v),$$

où F et G contiendront chacune une constante arbitraire additive, et w_1, w_2, w_3 s'obtiendront ensuite en cherchant les caractéristiques du faisceau complet

$$(10) \qquad \overline{U} = \frac{\partial f}{\partial u} + \Phi_\alpha(u) L_\alpha, \qquad \overline{V} = \frac{\partial f}{\partial v} + \Psi_\alpha(v) M_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

où les Φ_i et Ψ_i s'obtiennent en remplaçant u_0 par $F(u)$ et v_0 par $G(v)$ dans les expressions $\varphi_i(u, u_0)$ et $\psi_i(v, v_0)$.

Ce faisceau est un *faisceau de Lie*, relatif au couple de groupes simplement transitifs réciproques $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ [1]. Il s'intègre, comme je l'ai montré, de la manière suivante. Soient

$$(11) \qquad c_i = \Omega_i(b_1, b_2, b_3;\, a_1, a_2, a_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les équations qui donnent les paramètres (c_1, c_2, c_3) de la transformation $T_c = T_b T_a$ en fonction des paramètres (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) des transformations T_a et T_b, pour un groupe G quelconque ayant même structure que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$. Pour un repérage [2] approprié des transformations de G, les équations finies de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ seront

$$(12) \qquad \begin{cases} (\mathcal{L}) & w'_i = \Omega_i(w_1, w_2, w_3;\, a_1, a_2, a_3) \\ (\mathcal{M}) & w'_i = \Omega_i(b_1, b_2, b_3;\, w_1, w_2, w_3) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

---

(1) *Voir* mon Mémoire récent M_4 du *Bulletin de la Société Mathématique de France,* t. 45, 1937, p. 149-167; et, en particulier, le n° **8**, p. 163 de ce travail.

(2) T_a, T_b, T_c sont figurées par les trois points (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3), d'un espace à trois dimensions, dans lequel le choix du système de coordonnées est arbitraire.

Les caractéristiques de (12) seront alors

$$(13)\qquad w_i = \Omega_i(b_1, b_2, b_3;\ a_1, a_2, a_3) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

les a_i étant des fonctions de u, et les b_i des fonctions de v, définies respectivement par les *systèmes de Lie*, à une variable indépendante,

$$(14)\qquad \frac{da_i}{du} = \Phi_\alpha(u)\,\lambda_{\alpha,i}(a_1, a_2, a_3) \qquad (i, \alpha = 1, 2, 3),$$

$$(15)\qquad \frac{db_i}{dv} = \Psi_\alpha(v)\,\mu_{\alpha,i}(b_1, b_2, b_3) \qquad (i, \alpha = 1, 2, 3),$$

dont les coefficients sont ceux des transformations L_h et M_h,

$$(16)\quad L_h = \lambda_{h,\alpha}(w_1, w_2, w_3)\frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \quad M_h = \mu_{h,\alpha}(w_1, w_2, w_3)\frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \quad (h, \alpha = 1, 2, 3).$$

L'intégration de $\mathcal{F}$ est ainsi ramenée à celle des deux faisceaux de degré (2) (sous-faisceaux singuliers de $\mathcal{F}$), pris individuellement,

$$(17)\quad (\mathcal{F}_1)\left\{X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + L,\ X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}\right\}, \qquad (\mathcal{F}_2)\left\{X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + M,\ X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}\right\}.$$

16. Si chacun de ces sous-faisceaux, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, est *intégrable* [1], le faisceau $\mathcal{F}$ aura une *intégrale générale explicite*. En effet, l'ensemble des solutions de (14), pour les divers choix de la fonction arbitraire $F(u)$ sera donné par des formules

$$(18)\quad u = f(x, x_0, x_1, \ldots, x_p), \qquad a_i = f_i(x, x_0, x_1, \ldots, x_p) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où les fonctions f et f_i seront des fonctions déterminées, et où l'on aura

$$(19)\qquad x_0 = \xi(x), \qquad x_1 = \xi'(x), \qquad \ldots, \qquad x_p = \xi^{(p)}(x),$$

ξ étant une fonction arbitraire de x, et ξ', ξ'', ... ses dérivées successives. Et, de même, l'ensemble des solutions de (15), pour les divers choix de la fonction $G(v)$ sera fourni par des formules déterminées,

$$(20)\quad v = g(y, y_0, y_1, \ldots, y_q), \qquad b_i = g_i(y, y_0, y_1, \ldots, y_q) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

[1] *Voir* M_2, n° 15, p. 233. Un faisceau de degré n dont le dérivé est de degré $n+1$, est dit *intégrable*, si les dérivés successifs sont des degrés $n+1$, $n+2$, ...

avec

$$(21)\qquad y_0=\eta(y), \qquad y_1=\eta'(y), \qquad \ldots, \qquad \eta_q=\eta^{(q)}(y),$$

η étant une fonction arbitraire, et η', η'', ..., ses dérivées successives. Les formules (13) donneront, dès lors, l'intégrale explicite annoncée.

17. Supposons que, réciproquement, $\mathcal{F}$ admette une intégrale générale explicite, c'est-à-dire qu'il existe des formules

$$(22)\qquad \begin{cases} u\ =\alpha\ (x, x_0, x_1, \ldots, x_p; y, y_0, y_1, \ldots, y_q), \\ u_0=\alpha_0(x, x_0, x_1, \ldots, x_p; y, y_0, y_1, \ldots, y_q), \end{cases}$$

$$(23)\qquad \begin{cases} v\ =\beta\ (x, x_0, x_1, \ldots, x_p; y, y_0, y_1, \ldots, y_q), \\ v_0=\beta_0(x, x_0, x_1, \ldots, x_p; y, y_0, y_1, \ldots, y_q), \end{cases}$$

$$(24)\qquad w_i=\gamma_i(x, x_0, x_1, \ldots, x_p; y, y_0, y_1, \ldots, y_q) \qquad (i=1, 2, 3),$$

donnant une représentation paramétrique, en x, y, des diverses multiplicités intégrales, quand on y remplacera x_0, x_1, ..., x_p et y_0, y_1, ..., y_q, respectivement par des fonctions (19) et (21), où, comme ci-dessus, ξ est une fonction arbitraire de x et η une fonction arbitraire de y.

En fait, les fonctions α et α_0 ne pourront dépendre que de l'une des séries d'arguments mises en évidence (x, x_0, x_1, ..., x_p) et (y, y_0, y_1, ..., y_q), que j'appellerai les x et les y; et β et β_0 ne pourront dépendre que de l'autre série.

Nous avons vu, en effet, au n° **14**, que sur toute multiplicité intégrale de $\mathcal{F}$, u_0 est une fonction de u. Écrivons donc que le déterminant fonctionnel des fonctions u et u_0 de x et y définies par les formules (22), (19), (21), est nul. En posant

$$(25)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}+x_1\dfrac{\partial f}{\partial x_0}+x_2\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+x_p\dfrac{\partial f}{\partial x_{p-1}}, \\ \mathrm{B}f=\dfrac{\partial f}{\partial y}+y_1\dfrac{\partial f}{\partial y_0}+y_2\dfrac{\partial f}{\partial y_1}+\ldots+y_p\dfrac{\partial f}{\partial y_{q-1}}, \end{cases}$$

cela nous donnera la condition

$$\left(\mathrm{A}\alpha+\xi^{(p+1)}\frac{\partial\alpha}{\partial x_p}\right)\left(\mathrm{B}\alpha_0+\eta^{(q+1)}\frac{\partial\alpha_0}{\partial y_q}\right)-\left(\mathrm{B}\alpha+\eta^{(q+1)}\frac{\partial\alpha}{\partial y_q}\right)\left(\mathrm{A}\alpha_0+\xi^{(p+1)}\frac{\partial\alpha_0}{\partial x_p}\right)=0,$$

qui sera une identité en x et y, sous le bénéfice de (19) et (21); et les fonctions ξ et η étant arbitraires, cette condition équivaudra aux quatre identités, relatives aux x et aux y,

$$(26)\qquad \left\{\begin{array}{ll} A\alpha\, B\alpha_0 - B\alpha\, A\alpha_0 = 0, & A\alpha \dfrac{\partial \alpha_0}{\partial y_q} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial y_q} A\alpha_0 = 0, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_p} B\alpha_0 - B\alpha \dfrac{\partial \alpha_0}{\partial x_p} = 0, & \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_p}\dfrac{\partial \alpha_0}{\partial y_q} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial y_q}\dfrac{\partial \alpha_0}{\partial x_p} = 0. \end{array}\right.$$

1° Si l'on avait, à la fois, $A\alpha = 0$, $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_p} = 0$, α serait un invariant du faisceau $\left\{ Af, \dfrac{\partial f}{\partial x_p} \right\}$, et par conséquent, de ses dérivés successifs, dont le $p^{\text{ième}}$ est $\left\{ \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x_0}, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p} \right\}$, et par conséquent, n'admet d'autre invariant que des constantes (relativement aux x). Donc, α ne dépendrait que des y.

Les identités (26) se réduiraient alors à

$$(27)\qquad B\alpha\, A\alpha_0 = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y_q} A\alpha_0 = 0, \qquad B\alpha \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_p} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y_q}\frac{\partial \alpha_0}{\partial x_p} = 0.$$

Or l'on ne saurait avoir $B\alpha = \dfrac{\partial \alpha}{\partial y_q} = 0$, qui exprime que α est un invariant du faisceau $\left\{ Bf, \dfrac{\partial f}{\partial y_q} \right\}$, car l'on en conclurait, en raisonnant comme on vient de le faire, que α ne dépendrait pas des y, et par conséquent, se réduirait à une constante. Ce qui est impossible, puisque u doit pouvoir être pris comme variable indépendante sur S, d'après le n° **14**.

On conclurait donc de (27) que α_0 serait, comme α, un invariant du faisceau $\left\{ Af, \dfrac{\partial f}{\partial x_p} \right\}$; c'est-à-dire que α_0, comme α, ne dépendrait que des y.

2° Supposons maintenant que l'on n'ait pas à la fois, $A\alpha = 0$ et $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_p} = 0$, et raisonnons dans l'hypothèse $A\alpha \neq 0$. Le cas $A\alpha = 0$, $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_p} \neq 0$ se traiterait de même. Il existera deux fonctions ρ et σ des x et des y, telles que l'on ait

$$(28)\qquad B\alpha + \rho A\alpha = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y_q} + \sigma A\alpha = 0.$$

On peut supposer que $B\alpha$ et $\frac{\partial\alpha}{\partial y_q}$ ne sont pas nuls tous deux; car, s'il en était ainsi, on montrerait, en raisonnant comme dans le cas 1°, traité ci-dessus, que α et α_0 ne dépendraient que des x. Donc nous pouvons supposer que ρ et σ ne sont pas nuls tous deux.

Alors, si l'on tient compte de (28) et de $A\alpha \neq 0$, on tire des équations (26) les identités nouvelles

$$(29)\quad B\alpha_0 + \rho A\alpha_0 = 0, \qquad \frac{\partial\alpha_0}{\partial y_q} + \sigma A\alpha_0 = 0, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x_p} A\alpha_0 - A\alpha\frac{\partial\alpha_0}{\partial x_p} = 0,$$

dont la dernière indique qu'il existe une fonction τ des x et des y telle que l'on ait encore

$$(30)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x_p} + \tau A\alpha = 0, \qquad \frac{\partial\alpha_0}{\partial x_p} + \tau A\alpha_0 = 0.$$

Or, ceci conduit à une impossibilité. Car il résultera de (28), (29), (30) que α et α_0 sont deux invariants du faisceau

$$(31)\qquad \left\{ Bf + \rho Af, \ \frac{\partial f}{\partial y_q} + \sigma Af, \ \frac{\partial f}{\partial x_p} + \tau Af \right\}$$

et l'on montrerait facilement (en tenant compte du fait que ρ et σ ne sont pas tous deux nuls) que le premier des dérivés successifs de ce faisceau qui puisse être complet sera de la forme

$$(32)\qquad \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} + \omega\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y_i} + \omega_i\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial x_j} + \theta_j\frac{\partial f}{\partial x} \right\}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, q;\ j = 0, 1, 2, \ldots, p).$$

De sorte que (31) ne peut avoir que des invariants de la forme $f(\alpha)$. Ainsi α_0 serait une fonction déterminée $\alpha_0 = K(\alpha)$, et l'on aurait, sur toute intégrale S de $\mathcal{F}$, $u_0 = K(u)$, tandis que l'équation $u_0 = F(u)$ qui figure dans les équations (6) d'une intégrale S quelconque peut être arbitraire, si S est convenablement choisie.

18. Il résulte de la discussion précédente que α et α_0 dépendront, simultanément, soit des x seuls, soit des y seuls. Et l'on verrait, de la même manière, qu'il en sera de même pour β et β_0. De plus, si nous supposons que les x figurent seuls, par exemple, dans α et α_0, ce seront les y qui figureront seuls dans β et β_0. Car si α et β ne dépendaient, l'une et l'autre, que des x, elles seraient, lorsque les x_i y auraient la forme (19), deux fonctions de la seule variable x; et u et v, donnés par les formules (22) et (23), ne pourraient pas être indépendantes sur les multiplicités intégrales, contrairement à ce que nous avons supposé dès le début (n° **14**).

Nous concluons donc que si $\mathcal{F}$ a une intégrale générale explicite, celle-ci doit être de la forme

$$(33)\qquad u=\alpha(x, x_0, x_1, \ldots, x_p), \qquad u_0=\alpha_0(x, x_0, x_1, \ldots, x_p),$$

$$(34)\qquad v=\beta(y, y_0, y_1, \ldots, y_q), \qquad v_0=\beta_0(y, y_0, y_1, \ldots, y_q),$$

$$(35)\qquad w_i=\gamma_i(x, x_0, x_1, \ldots, x_p;\ y, y_0, y_1, \ldots, y_q) \qquad (i=1, 2, 3),$$

avec

$$(36)\qquad x_0=\xi(x), \qquad x_i=\xi^{(i)}(x), \qquad y_0=\eta(x), \qquad y_j=\eta^{(j)}(y)$$
$$(i=1, 2, \ldots, p;\ j=1, 2, \ldots, q).$$

19. Ce premier point acquis, considérons l'une quelconque, S, des multiplicités intégrales ainsi représentées, et faisons varier x d'une quantité infiniment petite dx, en laissant y constant. Si l'on pose

$$(37)\qquad A_1 f = A f + \xi^{(p+1)}(x)\frac{\partial f}{dx_p},$$

on aura, pour les variations correspondantes de u, u_0, v, v_0, w_1, w_2, w_3,

$$(38)\quad du=A_1\alpha\, dx, \quad du_0=A_1\alpha_0\, dx, \quad dv=0, \quad dw_i=A_1\gamma_i\, dx \quad (i=1, 2, 3).$$

Les équations (33) et (36) permettant de substituer u à x comme variable indépendante, ces variations sont celles que détermine la transformation infinitésimale

$$(39)\qquad \overline{A_1\alpha}\frac{\partial f}{\partial u}+\overline{A_1\alpha_0}\frac{\partial f}{\partial u_0}+\overline{A_1\gamma_\nu}\frac{\partial f}{\partial w_\nu} \qquad (\nu=1, 2, 3),$$

sur la multiplicité S considérée : les traits qui surlignent les coefficients de cette transformation indiquent que x y a été remplacé par sa valeur en fonction de u.

Cette transformation en u, u_0, v, v_0, w_1, w_2, w_3 laissant S invariante doit être équivalente, sur S, à une transformation de $\mathcal{F}$; et comme v

et v_0 n'y varient pas, cette transformation de $\mathcal{F}$ est une transformation de $\mathcal{F}_1$. Il en résulte que, dans les conditions où nous venons d'opérer (c'est-à-dire en laissant les y constants), les formules (33), (35), avec

$$x_0 = \xi(x), \qquad x_i = \xi^{(i)}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

définissent des multiplicités intégrales de $\mathcal{F}_1$, et, puisqu'il y figure la fonction arbitraire $\xi(x)$, elles en donnent ainsi l'intégrale générale([1]). Celle-ci étant explicite, $\mathcal{F}_1$ est donc un faisceau intégrable.

Un raisonnement analogue, fondé sur la variation de y seul, montrerait que $\mathcal{F}_2$ est aussi intégrable. Nous concluons donc que, *pour que $\mathcal{F}$ ait une intégrale générale explicite, il faut et il suffit que les sous-faisceaux singuliers, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, soient l'un et l'autre des faisceaux intégrables*. Nous dirons alors, pour abréger, de $\mathcal{F}$ lui-même qu'il est *intégrable*. Et nous dirons qu'il est *semi-intégrable* si un des sous-faisceaux singuliers, et un seul, est intégrable.

20. Nous avons vu au n° **7** que si un faisceau Φ a un invariant du premier ordre pour chacun de ses sous-faisceaux singuliers, il est associé à une équation E de la forme $s = \sigma(x, y, z, p, q)$. Les sous-faisceaux singuliers $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ d'un tel faisceau $\mathcal{F}$ sont alors,

$$(40) \qquad (\mathcal{F}_1) \quad Xf + Y\sigma\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial r}; \qquad (\mathcal{F}_2) \quad Yf + X\sigma\frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{\partial f}{\partial t},$$

avec

$$(41) \qquad Xf = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + \sigma\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad Yf = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \sigma\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}.$$

On a, en effet, si l'on pose, pour abréger,

$$(42) \qquad \begin{cases} X_1 f = Xf + Y\sigma\dfrac{\partial f}{\partial t}, & X_2 f = Yf + X\sigma\dfrac{\partial f}{\partial r}, \\ X_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial r}, & X_4 f = \dfrac{\partial f}{\partial t}, \end{cases}$$

([1]) Le résultat du n° **18** et celui-ci pourraient être déduits immédiatement du fait, démontré par Ed. Goursat (*Équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. **2**, p. 223), que si une équation E a une intégrale générale explicite de la forme (22), (23), (26), (19), (21), les courbes $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ sont, sur chaque surface intégrale, les courbes caractéristiques des deux systèmes.

les relations de structure, de forme canonique,

$$(43)\qquad (X_1, X_3) \equiv -\frac{\partial f}{\partial p}, \qquad (X_2, X_4) \equiv -\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad (X_{2i-1}, X_{2j}) \equiv 0$$
$$(i, j = 1, 2;\ mod\ \mathcal{F}).$$

Le dérivé $\mathcal{F}'_1$ de $\mathcal{F}_1$ est, d'après les formules précédentes,

$$(\mathcal{F}'_1)\quad X_1, \quad \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial r},$$

d'où il résulte que $\mathcal{F}''_1$ est de degré 4. Si $\mathcal{F}_1$ a deux invariants, le premier de ses dérivés qui sera complet aura le degré 5, et ce sera $\mathcal{F}'''_1$; si $\mathcal{F}_1$ a trois invariants, le premier de ses dérivés qui sera complet aura le degré 4, et ce sera $\mathcal{F}''_1$, Dans les deux cas, $\mathcal{F}_1$ sera intégrable.

Mêmes constatations et même conclusion pour $\mathcal{F}_2$.

Donc les faisceaux associés aux équations E, de la forme $s = \sigma(x, y, z, p, q)$, qui ont deux invariants pour chaque système de caractéristiques sont *intégrables;* et, par conséquent, ces équations ont une intégrale générale explicite. Ceci explique les résultats obtenus, à leur égard, par E. Goursat, qui, comme l'on sait, a déterminé des types pour ces équations, et les a intégrés (1).

21. Supposons, inversement, que le faisceau $\mathcal{F}$, défini par les formules (1) et (2), soit intégrable. Si nous considérons, par exemple, $\mathcal{F}_1$, nous avons, pour $\mathcal{F}'_1$, la base

$$(44)\qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha L_\alpha, \quad \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_0} L_\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

et, $\mathcal{F}''_1$ devant être de degré 4, il y aura, parmi les trois transformations

$$(45)\qquad \left(X_1, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_0} L_\alpha\right), \quad \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial u_0^2} L_\alpha, \quad \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_0} L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. 1, 1899, p. 31-78 et 439-464.

deux transformations divergentes seulement. Si l'on a

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial u_0^2} L_\alpha = m \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_0} L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{46}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial u_0^2} = m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_0} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{47}$$

$\frac{\partial f}{\partial u_0}$ est distinguée dans $\mathcal{F}'_1$, et est, par suite, transformation principale de $\mathcal{F}$. (*Voir* I, n° **2**); de sorte que u est un invariant du premier ordre de $\mathcal{F}_1$.

Si l'on n'a pas d'identité de la forme (46), on en aura une de la forme

$$\left(X_1, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_0} L_\alpha\right) = \left(m_1 \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_0} + m_2 \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial u_0^2}\right) L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{48}$$

Cherchons alors la transformation principale de $\mathcal{F}$ qui appartient à $\mathcal{F}_1$. Puisque ce n'est pas $\frac{\partial f}{\partial u_0}$, elle sera de la forme

$$W f = X_1 + \omega \frac{\partial f}{\partial u_0}, \tag{49}$$

et l'on aura, d'après (48), *modulo* $\mathcal{F}'$,

$$\left(W f, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_0} L_\alpha\right) \equiv \left[m_1 \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_0} + (m_2 + \omega) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial u_0^2}\right] L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Il suffira de prendre $\omega = -m_2$ pour que ce crochet appartienne à $\mathcal{F}'$: moyennant quoi Wf sera distinguée dans $\mathcal{F}'$, car elle est, quel que soit ω, en involution (dans $\mathcal{F}'$) avec les autres transformations (40) de $\mathcal{F}'_1$, et avec les transformations de base de $\mathcal{F}'_2$,

$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha M_\alpha, \quad \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial v_0} M_\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{50}$$

Or m_2 est une fonction de u et u_0, car le calcul du premier membre de (48) donne une expression de la forme

$$\left(X_1, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_0} L_\alpha\right) = \chi_\alpha(u, u_0) L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{51}$$

de sorte que m_1 et m_2 sont définis par les équations

$$\chi_i = m_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_0} + m_2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_0^2} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{52}$$

qui, par hypothèse, sont compatibles et déterminées. Donc $\omega = -m_2$ est aussi une fonction $\omega(u, u_0)$; et, par suite, Wf a un invariant $\left[\text{celui de } \frac{\partial f}{\partial u} + \omega(u, u_0)\frac{\partial f}{\partial u_0}\right]$, qui est un invariant de $\mathcal{F}_2$; et, de plus, un invariant du premier ordre, puisque Wf est transformation principale.

Ainsi, *si* $\mathcal{F}_1$ *est intégrable,* $\mathcal{F}_2$ *a un invariant du premier ordre; et inversement, si* $\mathcal{F}_2$ *est intégrable,* $\mathcal{F}_1$ *a un invariant du premier ordre.*

Par suite, *si* $\mathcal{F}$ *est intégrable,* $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *ont, chacun, un invariant du premier ordre, et l'une des équations* E *associées à* $\mathcal{F}$ *est de la forme* $s = \sigma(x, y, z, p, q)$, *étudiée par Goursat.*

22. Il résulte encore de ce qui précède que *si* $\mathcal{F}$ *est demi-intégrable, l'un de ses sous-faisceaux singuliers a un invariant du premier ordre* (c'est celui qui n'est pas intégrable). Par suite (*voir* I, n° **6**), l'une des équations E associées à $\mathcal{F}$ est indépendante de t. Examinons la réciproque. Soit l'équation $s = \sigma(x, y, z, p, q, r)$. D'après mon Mémoire M_3 (§ III, n° **5**, p. 310), les sous-faisceaux singuliers sont, avec $\lambda \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 1$,

$$(\mathcal{F}_1) \quad X_1 = X + \lambda\left(Y + X\sigma\frac{\partial f}{\partial r}\right), \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{53}$$

$$(\mathcal{F}_2) \quad X_2 = X + \lambda(X\sigma - \lambda Y\sigma)\frac{\partial f}{\partial r}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda^2\frac{\partial f}{\partial r}, \tag{54}$$

les opérateurs X et Y étant donnés, comme au n° **20**, par les formules (41). $\mathcal{F}_2$ a l'invariant y (du premier ordre); et $\mathcal{F}'_1$ a pour base

$$X_1, \quad \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{55}$$

de sorte que $\mathcal{F}''_1$ sera de degré 4; et que, par suite, $\mathcal{F}''_1$ sera intégrable.

En résumé, *Les classes intégrables, parmi celles pour lesquelles chaque système de caractéristiques a deux invariants, sont celles pour lesquelles chacun des systèmes a un invariant du premier ordre, et les* *classes semi-intégrables sont celles pour lesquelles un des systèmes, et un seul, a un invariant du premier ordre.*

23. A chacun de ces deux cas correspond une forme type particulière pour $\mathcal{F}$. En effet, $\mathcal{F}_1$ étant supposé intégrable, on peut, dans le type (1), (2), supposer que u est un invariant du premier ordre, pour $\mathcal{F}_2$. Alors $\frac{\partial f}{\partial u_0}$ devra être distinguée dans $\mathcal{F}'$, et aucune transformation $\mathrm{W}f$ de la forme (49) ne le sera. Donc, d'après ce qu'on a vu au n° **21**, aucune identité (48) ne pourra avoir lieu; et il y aura, par suite, une identité de la forme (46).

Les φ_i seront donc, d'après (47), trois solutions d'une équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u_0^2} = m(u, u_0)\frac{\partial z}{\partial u_0}, \tag{56}$$

c'est-à-dire seront de la forme

$$\varphi_i = a_i(u)\,\varphi(u, u_0) + c_i(u) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{57}$$

La fonction $u'_0 = \varphi(u, u_0)$ dépend, effectivement, de u_0; car, si elle n'en dépendait pas, $\mathcal{F}_1$ serait un faisceau complet; ce qui ne peut être. On pourra la prendre comme variable à la place de u_0, de sorte que l'on aura

$$\varphi_i = u'_0\,a_i(u) + c_i(u) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{58}$$

et, en faisant abstraction d'un terme en $\frac{\partial f}{\partial u'_0}$,

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + c_\alpha(u)\,\mathrm{L}_\alpha + u'_0\,a_\alpha(u)\,\mathrm{L}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{59}$$

Or, d'après ma théorie des équations de Lie, la transformation

$$\mathrm{L}_0 f = \frac{\partial f}{\partial u} + c_\alpha(u)\,\mathrm{L}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{60}$$

admet des invariants

$$w'_i = f_i(w_1, w_2, w_3; u) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{61}$$

tels que les équations (61) définissent une famille (au paramètre u) de transformation du groupe $\mathcal{L}$. Si donc on prend ces invariants pour variables nouvelles, à la place des w_i, les transformations Mf demeureront invariantes (du fait que $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont deux groupes réciproques), et les $L_i f$ deviendront d'autres transformations infinitésimales de $\mathcal{L}$, c'est-à-dire prendront la forme $l_\alpha(u)L_\alpha$. Donc Mf ne sera pas changée et Lf deviendra de la forme [1]

$$Lf = u_0\,\varphi_\alpha(u)L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{62}$$

Si donc $\mathcal{F}_1$ est seul intégrable, cette expression (62) remplacera la première des formules (2). Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont tous deux intégrables, les formules (2) seront remplacées par (62) et par la formule analogue

$$Mf = v_0\,\psi_\alpha(v)M_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{63}$$

IV. — Faisceaux Φ dont un sous-faisceau singulier a trois invariants et l'autre deux.

24. Nous supposerons dans ce paragraphe que $\mathcal{F}_1$ a deux invariants indépendants, v, v_0, et que $\mathcal{F}_2$ en a trois, u, u_0, u_1. D'après le n° **7**, nous pourrons prendre la base de $\mathcal{F}_2$ résolue en $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial u_0}$. Si celle de $\mathcal{F}_2$ n'était pas résoluble par rapport à deux des dérivées $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial u_0}$, $\frac{\partial f}{\partial u_1}$, on aurait, pour la base de $\mathcal{F}$, les variables étant u, u_0, u_1 ; v, v_0 ; x_1, x_2,

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + \omega_0\frac{\partial f}{\partial u_0} + \omega_1\frac{\partial f}{\partial u_1} + \zeta_{1,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, & X_3 &= \zeta_{3,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \\
X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + \zeta_{2,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, & X_4 &= \frac{\partial f}{\partial v_0} + \zeta_{4,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}
\end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2),$$

mais les conditions d'involution de X_1, X_3 avec X_2, X_4 donneraient alors

$$X_2\omega_0 = X_4\omega_0 = 0, \qquad X_2\omega_1 = X_4\omega_1 = 0,$$

de sorte que ω_0 et ω_1 seraient des invariants de $\mathcal{F}_2$, c'est-à-dire des fonctions u, u_0, u_1 seuls. Mais alors $\mathcal{F}$ aurait pour invariants les fonctions de u, u_0, u_1 (seuls) admettant $\frac{\partial f}{\partial u} + \omega_0\frac{\partial f}{\partial u_0} + \omega_1\frac{\partial f}{\partial u_1}$, ce qui

---

[1] On laisse ici tomber les accents de u'_0 et des w'.

est impossible, $\mathcal{F}$ n'ayant pas d'invariant. On doit donc supposer que la base de $\mathcal{F}_1$ est résoluble en $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial u_0}$ par exemple. Soit alors

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \omega \frac{\partial f}{\partial u_0} + \xi_{1,\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1} + \omega_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + \xi_{3,\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

la base de $\mathcal{F}_1$. Les conditions d'involution de X_1, X_3 avec X_2, X_4 montreront que ω et ω_1 sont des fonctions de u, u_0, u_1 seuls. Prenons alors pour variable un invariant de $\frac{\partial f}{\partial u_1} + \omega_1 \frac{\partial f}{\partial u_0}$, à la place de u_0, ce qui donnera la forme

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \omega \frac{\partial f}{\partial u_0} + \xi_{1,\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1} + \xi_{3,\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2).$$

La fonction ω ne dépendra que de u, u_0, u_1, et, de plus, elle dépendra effectivement de u_1. Car si elle n'en dépendait pas, les deux transformations

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \omega(u, u_0) \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1}$$

auraient un invariant commun, fonction de u, u_0, c'est-à-dire invariant aussi de $\mathcal{F}_2$. Ce serait donc un invariant de $\mathcal{F}$ (lequel n'en a pas). On peut donc prendre ω pour variable à la place de u_1; ce qui revient à supposer $\omega = u_1$. Les conditions d'involution de X_1, X_3 avec X_2, X_4 s'écrivent, du reste,

$$(1) \qquad (X_{2i-1}, X_{2j}) = 0 \qquad (i, j = 1, 2),$$

et, par suite, on pourra prendre pour variables, à la place de x_1, x_2, deux invariants w_1, w_2 du faisceau complet $\{X_3, X_4\}$. La base de $\mathcal{F}$ deviendra ainsi

$$(2) \qquad (\mathcal{F}) \begin{cases} (\mathcal{F}_1) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + \mathrm{L}f, & X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \\ (\mathcal{F}_2) \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + \mathrm{M}f, & X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}, \end{cases}$$

avec [compte tenu de $(X_1, X_4) = 0$, $(X_2, X_3) = 0$]

$$(3) \quad \mathrm{L} = \lambda_\alpha(u, u_0, u_1; v; w_1, w_2) \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \qquad \mathrm{M} = \mu_\alpha(u, u_0; v, v_0; w_1, w_2) \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}$$
$$(\alpha = 1, 2),$$

et il reste à tenir compte de la condition de structure

$$(4) \qquad (X_1, X_2) = 0.$$

25. Cela se fera, comme on l'a fait au n° **8**, dans des conditions analogues, en prenant les dérivées successives de cette identité par rapport à u_1 et par rapport à v_0. On obtiendra d'abord, en dérivant par rapport à u_1,

$$0 = (X_2, L''_{u_1^2}) = (X_2, L'''_{u_1^3}) = (X_2, L^{\text{IV}}_{u_1^4}),$$

et l'on en conclura que L est de la forme

$$(5) \qquad L = L_0 + \varphi_\alpha(u, u_0, u_1)L_\alpha + u_1 L_3, \qquad L_i = \lambda_{i,\alpha}(u, u_0; v; w_1, w_2)\frac{\partial f}{\partial w_\alpha}$$
$$(\alpha = 1, 2).$$

On pourra, de plus, faire $L_3 = 0$ en introduisant comme variables, au lieu de w_1, w_2 deux invariants de $\frac{\partial f}{\partial u_0} + L_3$. Ce qui, en vertu de (4), entraînera $\left(\frac{\partial f}{\partial u_0}, X_2\right) = 0$, c'est-à-dire fera disparaître u_0 de M.

On aura, en même temps, les identités

$$(6) \qquad (X_2, L_i) = 0, \qquad \left(X_2, \frac{\partial f}{\partial u} + L_0\right) = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

que l'on différentiera par rapport à u_0. En raisonnant comme au n° **11**, on montrera que L_0, L_1, L_2 sont de la forme

$$L_0 = \overline{L}_0 + \varphi_{0,\alpha}(u, u_0)\overline{L}_\alpha, \qquad L_i = \overline{\varphi}_{i,\alpha}(u, u_0)\overline{L}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2),$$

où $\overline{L}_0$, $\overline{L}_1$, $\overline{L}_2$ ne dépendront pas de u_0. En portant ces expressions dans (5), et laissant tomber les traits de surlignement, on aura (L_3 étant nul), une formule du type

$$(7) \qquad L = L_0 + \varphi_\alpha(u, u_0, u_1)L_\alpha, \qquad L_i = \lambda_i(u; v; w_1, w_2)\frac{\partial f}{\partial w_\alpha}$$
$$(\alpha = 1, 2; i = 0, 1, 2),$$

où l'on pourra même supposer L_0 nul $\left(\text{quitte à introduire pour variables nouvelles, à la place de } w_1, w_2, \text{ des invariants de } \frac{\partial f}{\partial u} + L_0\right)$.

On aura alors les identités

$$(8) \qquad (L_i, X_2) = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial u}, X_2\right) = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

d'où résultera, en particulier, que u aura disparu, à son tour, de M. En différentiant les deux premières par rapport à u, on montrera enfin que L est de la forme

$$(9) \qquad L = \varphi_\alpha(u, u_0, u_1) L_\alpha, \qquad L_i = \lambda_i(v; w_1, w_2)\frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \qquad (\alpha, i = 1, 2),$$

où φ_1 et φ_2 seront linéairement indépendants.

26. En différentiant alors l'identité (4) par rapport à v_0, on montrera que M est de la forme

$$(10) \qquad M = M_0 + \psi_\alpha(v, v_0) M_\alpha, \qquad M_i = \mu_{i,\alpha}(v; w_1, w_2)\frac{\partial f}{\partial w_\alpha}$$
$$(\alpha = 1, 2;\ i = 0, 1, 2),$$

et l'on pourra réduire M_0 à zéro, en prenant pour variables, au lieu de w_1, w_2, deux invariants de $\frac{\partial f}{\partial v} + M_0$. On aura alors les identités [issues de (4)]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}, X_1\right) = 0, \qquad (M_i, X_1) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

La première montre que v aura disparu des L_i. Il restera à différentier les deux autres par rapport à v; ce qui montrera que l'on peut supposer que dans (10) (où M_0 est nul) la variable v ne figure pas dans les M_i. On aura donc, en définitive, à la place de (3),

$$(11) \qquad Lf = \varphi_\alpha(u, u_0, u_1) L_\alpha, \qquad Mf = \psi_\alpha(v, v_0) M_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2),$$

avec

$$(12) \qquad L_i = \lambda_{i,\alpha}(w_1, w_2)\frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \qquad M_i = \mu_{i,\alpha}(w_1, w_2)\frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \qquad (i, \alpha = 1, 2)$$

et l'identité (4) donnera

$$(13) \qquad (L_i, M_j) = 0 \qquad (i, j = 1, 2).$$

On verra enfin, comme au n° **12**, que (L_1, L_2), (M_1, M_2) sont deux groupes simplement transitifs réciproques, $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$.

Ici encore, les types obtenus ne dépendent que de la structure commune à $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$; et il n'y a que deux structures distinctes pour les groupes à deux paramètres.

27. On peut simplifier l'expression de Mf. Cherchons, en effet, la transformation principale de $\mathcal{F}$ qui fait partie de $\mathcal{F}_2$. Soit

$$(14)\qquad Wf = w\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha M_\alpha\right) + w_0 \frac{\partial f}{\partial v_0} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

cette transformation. La base du dérivé $\mathcal{F}'$ étant

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4, \quad Z_1 = \frac{\partial f}{\partial u_0} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} L_\alpha, \quad Z_2 = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial v_0} M_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2),$$

la condition qui détermine Wf est (m étant un coefficient inconnu)

$$(15)\qquad (Wf, Z_2) = m Z_2 - Z_2 w X_1 - Z_2 w_0 \frac{\partial f}{\partial v_0};$$

car le crochet (Wf, Z_2) ne contient que les dérivés $\frac{\partial f}{\partial w_1}, \frac{\partial f}{\partial w_2}$. Or, si l'on pose

$$(16)\qquad (X_1, Z_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha M_\alpha, \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial v_0} M_\alpha\right) = \chi_\alpha(v, v_0) M_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2),$$

la condition (15) se décompose en les deux équations

$$(17)\qquad w\chi_i + w_0 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial v_0^2} - m \frac{\partial \psi_i}{\partial v_0} = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

On pourra donc prendre pour w et w_0 les fonctions de v et v_0

$$(18)\qquad w = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial v_0^2} \frac{\partial \psi^2}{\partial v_0} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial v_0^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial v_0}, \qquad w_0 = \chi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial v_0} - \chi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial v_0},$$

et Wf admettra un invariant $\left(\text{invariant de } w \frac{\partial f}{\partial v} + w_0 \frac{\partial f}{\partial v_0}\right)$ qui sera une fonction de v et v_0, c'est-à-dire un invariant de $\mathcal{F}_1$. Celui-ci, admettant la transformation principale Wf, sera un invariant du premier ordre.

Ainsi $\mathcal{F}$ *a un invariant du premier ordre*, et l'on peut supposer que celui-ci est la variable v. Cela revient à supposer que Wf se réduit à $\frac{\partial f}{\partial v_0}$ (à un facteur près), c'est-à-dire que w est nul; ce qui peut s'exprimer en disant que ψ_1 et ψ_2 sont deux solutions d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v_0^2} = f(v, v_0)\frac{\partial z}{\partial v_0}.$$

Donc ψ_1 et ψ_2 sont de la forme

$$\psi_i(v, v_0) = b_i(v)\,\psi(v, v_0) + c_i(v) \qquad (i = 1, 2).$$

On pourra prendre $\psi(v, v_0)$ pour variable nouvelle à la place de v_0, ce qui revient à écrire pour X_2 l'expression

$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + c_\alpha(v)M_\alpha + v_0 b_\alpha(v)M_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2). \tag{19}$$

Prenant enfin pour variables nouvelles, à la place des w_i, des invariants de $\frac{\partial f}{\partial v} + c_\alpha(v)M_\alpha$, $(\alpha = 1, 2)$, on sera ramené à avoir pour Mf une transformation de la forme

$$Mf = v_0\,\psi_\alpha(v)M_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2). \tag{20}$$

Le raisonnement justificatif serait tout pareil à celui du n° **23**.

On remarquera que $\mathcal{F}_2$, qui est de degré 2, a un dérivé $\mathcal{F}'_2$ de degré 3; et comme il ne dépend effectivement que des quatre variables, v_1, v_0, w_1, w_2, son second dérivé $\mathcal{F}''_2$ est $\left\{\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v_0}, \frac{\partial f}{\partial w_1}, \frac{\partial f}{\partial w_2}\right\}$, qui est de degré 4 et complet. Donc $\mathcal{F}_2$ *est intégrable.*

28. $\mathcal{F}_1$ ayant un invariant du premier ordre, il résulte du n° **19** que, si $\mathcal{F}_2$ a aussi un invariant du premier ordre [cas où l'une des équations associées à $\mathcal{F}$ est de la forme $s = \sigma(x, y, z, p, q)$], $\mathcal{F}_1$ sera, comme $\mathcal{F}_2$, intégrable.

Supposons, inversement, que $\mathcal{F}_1$ soit intégrable. D'après les formules (2) et (11), on a, pour la base de $\mathcal{F}_1$,

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1\frac{\partial f}{\partial u_0} + \varphi_\alpha(u, u_0, u_1)L_\alpha, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

et celle du dérivé $\mathcal{F}'_1$ s'en déduit par adjonction de

$$Z_1 = (X_3, X_1) = \frac{\partial f}{\partial u_0} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2).$$

Si donc nous considérons

$$(21) \qquad (X_3, Z_1) = \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial u_1^2} L_\alpha, \qquad (X_1, Z_1) = \theta_\alpha L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2),$$

où

$$(22) \quad \theta_i = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_1 \, \partial u} + u_1 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_1 \, \partial u_0} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_0} + \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \right) c_i \qquad (i = 1, 2),$$

les c_i étant les coefficients de la formule de structure de $\mathcal{L}$,

$$(L_1, L_2) = c_\alpha L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2),$$

la condition pour que $\mathcal{F}_1$ soit intégrable, c'est-à-dire pour que $\mathcal{F}''_1$ soit de degré 4, sera que les transformations (21) ne soient pas divergentes, c'est-à-dire que l'on ait l'identité

$$(23) \qquad \theta_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u_1^2} - \theta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1^2} = 0.$$

Cette condition étant supposée réalisée, on pourra choisir deux fonctions, $\omega(u, u_0, u_1)$, $\omega_0(u_1 u_0, u_1)$, qui satisfassent aux indentités

$$(24) \qquad \omega \theta_i + \omega_0 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_1^2} = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

et alors la transformation

$$(25) \qquad \Omega f = \omega X_1 + \omega_0 X_3$$

satisfera à la condition

$$(26) \qquad (\Omega f, Z_1) \equiv 0 \qquad (\mathit{mod}\, \mathcal{F}_1).$$

Ce sera donc la transformation principale de $\mathcal{F}$ contenue dans $\mathcal{F}_1$. Or, elle admet pour invariants indépendants deux fonctions de u, u_0, u_1 $\left[\text{invariants de } \omega\left(\frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0}\right) + \omega_0 \frac{\partial f}{\partial u}\right]$. Ceux-ci sont donc deux invariants du premier ordre de $\mathcal{F}_2$.

Donc, *si $\mathcal{F}_1$ est intégrable, $\mathcal{F}_2$ a deux invariants (indépendants) du premier ordre, et un invariant du second ordre (voir* **n° 3**).

29. Dans le cas où $\mathcal{F}_1$ est intégrable, on peut simplifier la forme de Lf. Si l'on a pris, en effet, pour u l'un des invariants du premier ordre, la transformation Ωf considérée ci-dessus laissera u invariant, ce qui exige que ω soit nul; les conditions (24) donnent alors $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_1^2} = 0$, $(i = 1, 2)$, et l'on a, pour X_1, la forme

$$(27)\qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + a_\alpha(u, u_0) L_\alpha + u_1 \left(\frac{\partial f}{\partial u_0} + b_\alpha(u, u_0) L_\alpha \right) \qquad (\alpha = 1, 2).$$

On remarquera que Ωf admet alors aussi u_0 pour invariant, de sorte que les invariants du premier ordre de $\mathcal{F}_2$ sont toutes les fonctions $f(u, u_0)$.

Si l'on prend ensuite comme variables, au lieu de w_1, w_2, deux invariants de $\frac{\partial f}{\partial u_0} + b_\alpha(u, u_0) L_\alpha$, on voit, en raisonnant comme au n° **23**, que X_2 et X_4 ne changeront pas, ni X_3, et que X_1 sera ramené au type

$$(28)\qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + \varphi_\alpha(u, u_0) L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2).$$

Si l'on désigne, en effet, par w'_1, w'_2 les nouvelles variables, on peut supposer que les formules qui les définissent

$$(29)\qquad w'_i = g_i(w_1, w_2;\, u, u_0) \qquad (i = 1, 2),$$

sont les équations d'une famille de transformations de $\mathcal{L}$, dépendant des paramètres u_0 et u. Si donc les équations de $\mathcal{L}$ sont, avec les paramètres γ_1 et γ_2,

$$(30)\qquad w'_i = f_i(w_1, w_2;\, \gamma_1, \gamma_2) \qquad (i = 1, 2),$$

les fonctions (29) seront

$$(31)\qquad w'_i = f_i[w_1, w_2;\, \gamma_1(u, u_0), \gamma_2(u, u_0)],$$

γ_1 et γ_2 étant des fonctions, convenablement choisies, de u et u_0. On aura donc

$$(32)\qquad \frac{\partial w'_i}{\partial u} = \frac{\partial f_i}{\partial \gamma_\alpha} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial u} \qquad (i, \alpha = 1, 2).$$

Or, d'après les équations fondamentales de la théorie des groupes continus finis (1), on a des identités de la forme

$$\frac{\partial f_i}{\partial \gamma_j} = m_{j,\alpha}(\gamma_1, \gamma_2)\,\lambda_{\alpha.i}(f_1, f_2) \qquad (i, j, \alpha = 1, 2),$$

de sorte que les formules (32) deviendront

$$\frac{\partial w'_i}{\partial u} = \mathrm{M}_\alpha(u, u_0)\,\lambda_{\alpha.i}(w'_1, w'_2) \qquad (i, \alpha = 1, 2), \tag{33}$$

les M_i étant certaines fonctions de u et u_0. Dans (27), le changement de variable (29) remplacera donc le terme $\frac{\partial f}{\partial u}$ par

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \mathrm{M}_\alpha(u, u_0)\,\mathrm{L}_\alpha.$$

Le coefficient de u_1 se réduira à $\frac{\partial f}{\partial u_0}$, et les L_i, dans le groupe de termes $a_\alpha \mathrm{L}_\alpha$, seront, comme au n° **23**, remplacés par des transformations infinitésimales de $\mathcal{L}$, $k_{\alpha\beta}(u, u_0)\mathrm{L}_\beta$. D'où la forme (28) annoncée.

30. Celle-ci est, à son tour, susceptible de simplification. En effet, le dérivé $\mathcal{F}'_1$ de $\mathcal{F}_1$ se présente maintenant sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u, u_0)\,\mathrm{L}_\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1}, \tag{34}$$

et l'on peut raisonner sur son sous-faisceau $\mathcal{G}$,

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha \mathrm{L}_\alpha, \qquad \mathfrak{X}_2 = \frac{\partial f}{\partial u_0}, \tag{35}$$

d'une manière analogue à celle qui a conduit, au n° **26**, à la simplification de F_2.

Ce faisceau $\mathcal{G}$ a pour dérivé $\mathcal{G}'$

$$\mathfrak{X}_1, \qquad \mathfrak{X}_2, \qquad \mathrm{Z}_1 = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_0}\mathrm{L}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2)$$

et l'une de ses transformations $\mathcal{Y}f = \varpi_1 \mathfrak{X}_1 + \varpi_2 \mathfrak{X}_2$ est distinguée

(1) S. Lie et Fr. Engel, *Théorie des Transf. Gruppen*, t. I, p. 33 et 34.

dans ce dérivé $\mathcal{G}'$. Elle est déterminée par la condition

$$(\mathcal{Y}f, Z_1) \equiv 0) \qquad (\operatorname{mod} \mathcal{G}'),$$

qui se traduit par deux équations linéaires homogènes en ϖ, ϖ_1 ϖ_2,

$$(36) \quad \varpi_1 = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_0 \, \partial u} + \varpi_2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_0^2} + \varpi_1 \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_0} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_0} \right) c_i = \varpi \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_0} \qquad (i = 1, 2).$$

On peut donc (car elle n'est définie qu'à un facteur près), prendre pour ϖ_1 et ϖ_2 des fonctions des seules variables u et u_0. Mais alors, il existe un invariant $f(u, u_0)$ du premier ordre de $\mathcal{F}_2$ qui admet cette transformation principale de $\mathcal{G}$: c'est ce que j'appellerai un invariant du premier ordre *spécial* (¹).

Nous pouvons donc supposer que u est un tel invariant. Alors ϖ_1 est nul, et les équations (36) exigent, pour cela, que l'on ait deux identités de la forme

$$\frac{\partial^2 \varphi_i'}{\partial u_0^2} = m \frac{\partial \varphi_i'}{\partial u_0} \qquad (i = 1, 2).$$

On achèvera, dès lors, comme au n° **27**, ce qui conduira à une formule

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 \varphi_\alpha(u) L_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2).$$

En résumé, le cas où $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont tous deux intégrables, correspond au type (2), avec

$$(37) \qquad Lf = u_0 \varphi_\alpha(u) L_\alpha, \qquad Mf = v_0 \psi_\alpha(v) M_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2).$$

31. Revenons au type général (2), (11), pour en chercher les multiplicités intégrales S à deux dimensions. On voit, comme au n° **14**, que l'on peut supposer les variables u et v indépendantes sur S, c'est-à-dire S définie par des équations

$$(38) \quad u_0 = F(u, v), \qquad u_1 = F_1(u, v), \qquad v_0 = G(u, v), \qquad w_i = H_i(u, v)$$
$$(i = 1, 2).$$

Soit alors

$$(39) \qquad X = aX_1 + bX_2 + a_1 X_3 + b_0 X_4$$

(¹) A parler strictement, il y a une infinité d'invariants spéciaux, donnés par la formule $F(u)$, où u est l'un d'eux, et où F est une fonction arbitraire.

une des transformations de $\mathcal{F}$ que S admet. On aura, sur S,

$$a\left(\frac{\partial F}{\partial u}-u_1\right)+b\frac{\partial F}{\partial v}=0,\quad a\frac{\partial G}{\partial u}+b\frac{\partial G}{\partial v}-b_0=0,\quad a\frac{\partial F_1}{\partial u}+b\frac{\partial F_1}{\partial v}-a_1=0.$$

Ces équations en a, b, a_1, b_0 doivent se réduire à deux, puisque S doit admettre deux transformations (39) divergentes. Cela exige que l'on ait, sur S,

$$u_1=\frac{\partial F}{\partial u},\qquad \frac{\partial F}{\partial v}=0,$$

de sorte que F ne dépend que de u, et F_1 est identique à la dérivée $F'(u)$ de cette fonction $F(u)$. On a ainsi

$$X=a\left(X_1+F''(u)X_3+\frac{\partial G}{\partial u}X_4\right)+b\left(X_2+\frac{\partial G}{\partial v}X_4\right)$$

et, par suite, S, qui admet deux transformations divergentes de ce type, admet

$$(40)\qquad X_1+F''(u)X_3+\frac{\partial G}{\partial u}X_4,\qquad X_2+\frac{\partial G}{\partial v}X_4.$$

Elle admet donc leur crochet, qui est

$$\frac{\partial G}{\partial u}(X_4,X_2)=\frac{\partial G}{\partial u}Z_2.$$

Celui-ci doit être identiquement nul, car S ne peut pas admettre plus de deux transformations infinitésimales divergentes. On a donc $\frac{\partial G}{\partial u}=0$, c'est-à-dire que G ne dépend que de v.

Les équations (38) de S s'écrivent donc

$$(41)\quad u_0=F(u),\qquad u_1=F'(u),\qquad v_0=G(v),\qquad w_i=H_i(u,v)\qquad (i=1,2),$$

et les transformations (40) de S qu'elle admet sont :

$$(42)\qquad U=X_1+F''(u)X_{23}\qquad V=X_2+G'(v)X_4.$$

Elles appartiennent respectivement aux deux sous-faisceaux singuliers $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

Les fonctions F et G étant arbitrairement choisies, les fonctions $w_i=H_i(u,v)$ $(i=1,2)$, restées inconnues, s'obtiendront par l'intégration du faisceau complet de Lie

$$(43)\qquad \frac{\partial f}{\partial u} + \Phi_\alpha(u)\mathrm{L}_\alpha f, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} + \Psi_\alpha(v)\mathrm{M}_\alpha f \qquad (\alpha = 1, 2),$$

où

$$(44)\qquad \Phi^i(u) = \varphi_i(u, \mathrm{F}, \mathrm{F}'), \qquad \Psi_i(v) = \psi_i(v, \mathrm{G}) \qquad (i = 1, 2).$$

L'intégration se fera, comme il a été rappelé au n° **14**, en introduisant les formules de structure de $\mathcal{L}$

$$(45)\qquad c_i = \Omega_i(b_1, b_2; a_1, a_2) \qquad (i = 1, 2),$$

qui donnent les équations finies des groupes $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$, à savoir :

$$(46)\qquad (\mathcal{L})\quad w'_i = \Omega_i(w_1, w_2; a_1, a_2), \qquad (\mathfrak{M})\quad w'_i = \Omega_i(b_1, b_2; w_1, w_2)$$
$$(i = 1, 2).$$

Les caractéristiques $w_i = \mathrm{H}_i(u, v)$, $(i = 1, 2)$ de (43) seront alors

$$(47)\qquad w_i = \Omega_i(b_1, b_2; a_1, a_2) \qquad (i = 1, 2),$$

les a_i et les b_i résultant de l'intégration respective des deux systèmes de Lie (en u et v respectivement)

$$(48)\qquad \frac{da_i}{du} = \Phi_\alpha(a)\lambda_{\alpha,i}(a_1, a_2) \qquad (i = 1, 2),$$

$$(49)\qquad \frac{\partial b_i}{dv} = \Psi_\alpha(v)\mu_{\alpha,i}(b_1, b_2) \qquad (i = 1, 2),$$

associés aux groupes $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$ respectivement.

Or, les intégrales générales de ces deux systèmes, associées aux formules $u_0\mathrm{F}(u)$, $u_1 = \mathrm{F}'(u)$ pour le premier, et $v_0 = \mathrm{G}(v)$ pour le second, constituent les intégrales générales des sous-faisceaux

$$(50)\qquad \frac{\partial f}{\partial u} + u_1\frac{\partial f}{\partial u_0} + \varphi_\alpha(u, u_0, u_1)\lambda_{\alpha,\gamma}(a_1, a_2)\frac{\partial f}{\partial a_\gamma}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1} \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2),$$

$$(51)\qquad \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(v, v_0)\mu_{\alpha,\gamma}(b_1, b_2)\frac{\partial f}{\partial b_\gamma}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0} \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2),$$

c'est-à-dire, aux notations près, des sous-faisceaux singuliers $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}$.

Nous avons vu, au n° **27**, que $\mathcal{F}_2$ est intégrable. Il suffira donc que $\mathcal{F}_1$ le soit pour que l'intégrale de $\mathcal{F}$ soit explicite, et, ici, comme au n° **21**, on aura affaire à des classes d'équations E contenant une équation de la forme $s = \sigma(x, y, z, p, q)$, c'est-à-dire au cas étudié par M. Ed. Goursat.

Il nous reste à montrer qu'ici encore, si $\mathcal{F}$ a une intégrale générale explicite, les sous-faisceaux singuliers $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont intégrables, et il suffira de le montrer en ce qui concerne $\mathcal{F}_1$, puisque cela a toujours lieu pour $\mathcal{F}_2$. Il n'y a, pour cela, qu'à reprendre le raisonnement des n^{os} **17** et **18**.

Les variables $u, u_0, u_1, v, v_0, w_1, w_2$ étant supposées données sous la forme de fonctions $\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \beta, \beta_0, \gamma_1, \gamma_2$ de deux séries de variables auxiliaires $x, x_0, x_1, \ldots, x_p$; $y, y_0, y_1, \ldots, y_q$, parmi lesquelles x et y restent indépendantes sur toute intégrale S, tandis que les autres s'expriment, en fonction de celles-là par des formules

$$(52)\qquad \begin{cases} x_0 = \xi(x), & x_1 = \xi'(x), & \ldots, & x_p = \xi^{(p)}(x), \\ y_0 = \eta(y), & y_1 = \eta'(y), & \ldots, & y_q = \eta^{(q)}(y), \end{cases}$$

où $\xi(x)$ et $\eta(y)$ sont des fonctions arbitraires, on montrera d'abord qu'il résulte du fait que, sur toute intégrale S, on a $u_0 = F(u)$, $u_1 = F_1(u)$, $v_0 = G(v)$, cette conséquence que $\alpha, \alpha_0, \alpha_1$ ne dépendent que de l'une des séries de variables auxiliaires, les x, par exemple, tandis que β et β_0 ne dépendent que de l'autre série (les y). On a donc, pour représenter les intégrales S, des formules de la forme

$$(53)\qquad \begin{cases} u = \alpha\,(x, x_0, x_1, \ldots, x_p), \\ u_0 = \alpha_0(x, x_0, x_1, \ldots, x_p), \\ u_1 = \alpha_1(x, x_0, x_1, \ldots, x_p), \end{cases}$$

$$(54)\qquad v = \beta(y, y_0, y_1, \ldots, y_q), \qquad v_0 = \beta_0(y, y_0, y_1, \ldots, y_q),$$

$$(55)\qquad w_i = \gamma_i(x, x_0, x_1, \ldots, x_p;\ y, y_0, y_1, \ldots, y_q) \qquad (i = 1, 2),$$

où les x_a et les y_j devront être remplacées par les expressions (52).

Une variation infinitésimale de x (seul) produira alors sur les points de l'intégrale S, définie par un choix quelconque des fonctions $\xi(x)$ et $\eta(y)$, les mêmes déplacements qu'une certaine transformation infinitésimale effectuée sur les variables $u, u_0, u_1, v, v_0, w_1, w_2$, et qui sera équivalente sur S à une des transformations de $\mathcal{F}$ (puisque S est une intégrale de $\mathcal{F}$). Et comme cette transformation laissera v et v_0 invariants, ce sera une transformation de $\mathcal{F}_1$ qui sera arbitraire, $\xi(x)$ l'étant.

Il en résulte que les formules (53), (55), avec

$$(56)\qquad \begin{cases} x_0 = \xi(x), \quad x_1 = \xi'(x), \quad \ldots, \quad x_p = \xi^{(p)}(x), \\ y, y_0, y_1, \ldots, y_q = \text{const.}, \end{cases}$$

donnent l'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$, et, par conséquent, que $\mathcal{F}_1$ est intégrable. C. Q. F. D.

Concluons que, ici encore, nous serons en droit d'appeler *intégrables* les faisceaux $\mathcal{F}$ de la forme (2), (11), dont les deux sous-faisceaux singuliers sont intégrables.

V. — Faisceaux Φ dont chaque sous-faisceau singulier a trois invariants.

32. Nous supposons, dans ce paragraphe, que $\mathcal{F}_1$ a trois invariants, u, u_0, u_1, et que $\mathcal{F}_2$ a également trois invariants (indépendants), v, v_0, v_1. Prenons-les comme variables, avec une septième variable quelconque x. La base de $\mathcal{F}_1$ sera résoluble par rapport à deux des dérivées $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial u_0}$, $\frac{\partial f}{\partial u_1}$. Car, sans cela, elle serait de la forme

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \omega_0 \frac{\partial f}{\partial u_0} + \omega_1 \frac{\partial f}{\partial u_1}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial x},$$

et, les transformations de base de $\mathcal{F}_2$, X_2 et X_4 ne contenant pas les dérivées $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial u_0}$, $\frac{\partial f}{\partial u_1}$, les conditions $(X_2, X_1) \equiv 0$, $(X_4, X_1) \equiv 0$, *mod.* $\mathcal{F}$, se traduiraient par $X_2\omega_0 = X_2\omega_1 = 0$, $X_4\omega_0 = X_4\omega_1 = 0$; de de sorte que ω_0 et ω_1 seraient des invariants de $\mathcal{F}_2$, c'est-à-dire des fonctions de u, u_0, u_1 seuls. Mais alors X_1 admettrait des invariants, fonctions de u, u_0, u_1 seuls, qui seraient des invariants de X_1, X_2, X_3, X_4; et cela ne peut pas être, $\mathcal{F}$ n'ayant pas d'invariants.

Un raisonnement analogue s'appliquant à $\mathcal{F}_2$, on pourra prendre la base de $\mathcal{F}$ sous la forme

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \omega \frac{\partial f}{\partial u_0} + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1} + \omega_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + \varpi \frac{\partial f}{\partial v_0} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_1} + \varpi_1 \frac{\partial f}{\partial v_0} + \xi_4 \frac{\partial f}{\partial x},$$

et les conditions d'involution de X_1, X_3 avec X_2, X_4 montreront que ω et ω_0 sont fonctions de u, u_0, u_1 seuls, tandis que ϖ et ϖ_1 sont fonctions des seules variables v, v_0, v_1. En opérant alors comme on l'a fait au n° **24**, on pourra réduire cette base à la forme

$$(1) \qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + \lambda \frac{\partial f}{\partial w}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$(2) \qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_1 \frac{\partial f}{\partial v_0} + \mu \frac{\partial f}{\partial w}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_1}.$$

Les relations de structure s'écrivent alors

$$(3) \qquad (X_{2i-1}, X_{2j}) = 0 \qquad (i, j = 1, 2),$$

$$(4) \qquad (X_3, X_1) = Z_1 = \frac{\partial f}{\partial u_0} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \frac{\partial f}{\partial w}, \qquad (X_4, X_2) = Z_2 = \frac{\partial f}{\partial v_0} + \frac{\partial \mu}{\partial v_1} \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Les transformations principales de $\mathcal{F}$, qui appartiennent à $\mathcal{F}_1$,

$$(5) \qquad Wf = w_1 X_1 + w_0 X_3,$$

sont définies par la condition $(W, Z_1) \equiv 0$, *mod* $\mathcal{F}$; et si l'on pose

$$(6) \qquad (X_1, Z_1) = a \frac{\partial f}{\partial w}, \qquad (X_3, Z_1) = a_0 \frac{\partial f}{\partial w}, \qquad a = X_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} - Z_1 \lambda, \qquad a_0 = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_1^2},$$

cette condition s'écrit

$$(7) \qquad a w_1 + a_0 w_0 = 0.$$

Or, X_2 et X_4 laissant invariantes X_1 et X_3, laissent aussi invariantes Z_1, (X_1, Z_1), (X_3, Z_1), qui en dérivent par crochets successifs. Un théorème de S. Lie, déjà plusieurs fois appliqué (*voir*, par exemple, II, n° **9**), permet d'en conclure que le rapport des fonctions a et a_0 est un invariant de $\mathcal{F}_2$, c'est-à-dire une fonction de u, u_0, u_1 seuls. Nous pouvons donc supposer que dans la transformation principale (5), w_1 et w_0 ne dépendent que de u, u_0, u_1. Mais alors les invariants de $w_1\left(\frac{\partial f}{\partial u} + u_1\frac{\partial f}{\partial u_0}\right) + w_0\frac{\partial f}{\partial u_1}$, fonctions de u, u_0, u_1 seuls, seront des invariants communs à $\mathcal{F}_2$ et à $\mathrm{W}f$, c'est-à-dire des invariants du premier ordre de $\mathcal{F}_2$.

$\mathcal{F}_2$ ayant, d'après cela, des invariants du premier ordre, nous pouvons supposer que u est l'un deux. Mais alors $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ est transformation principale, puisqu'elle laisse u invariant; et u_0 qui admet aussi $\frac{\partial f}{\partial u_1}$, est un second invariant du premier ordre de $\mathcal{F}_2$.

De plus, $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ étant transformation principale, l'équation (7) doit avoir pour solution $w = 0$, $w_0 = 1$, ce qui exige $a_0 = 0$, c'est-à-dire, d'après (6), $\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_1^2} = 0$. On verra de même que l'on peut supposer $\frac{\partial^2\mu}{\partial v_1^2} = 0$. On aura ainsi

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda_0\frac{\partial f}{\partial w} + u_1\left(\frac{\partial f}{\partial u_0} + \lambda_1\frac{\partial f}{\partial w}\right), \\ \mathrm{X}_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + \mu_0\frac{\partial f}{\partial w} + v_1\left(\frac{\partial f}{\partial v_0} + \mu_1\frac{\partial f}{\partial w}\right), \end{cases}$$

λ_0, λ_1, μ_0, μ_1 étant des fonctions de u, u_0, v, v_0, w_1.

33. La condition $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0$ indique alors que $\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda_0\frac{\partial f}{\partial w}$ et $\frac{\partial f}{\partial u_0} + \lambda_1\frac{\partial f}{\partial w}$ sont permutables avec chacune des transformations infinitésimales $\frac{\partial f}{\partial v} + \mu_0\frac{\partial f}{\partial w}$, $\frac{\partial f}{\partial v_0} + \mu_1\frac{\partial f}{\partial w}$. En particulier les deux transformations $\frac{\partial f}{\partial u_0} + \lambda_1\frac{\partial f}{\partial w}$, $\frac{\partial f}{\partial v_0} + \mu_1\frac{\partial f}{\partial w}$ ont des invariants communs et nous pourrons prendre l'un d'eux comme variable nouvelle à la place de w. On aura donc des formules de la forme

$$(9)\qquad \mathrm{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda(u, u_0; v, v_0; w)\frac{\partial f}{\partial w} + u_1\frac{\partial f}{\partial u_0}, \qquad \mathrm{X}_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$(10)\qquad \mathrm{X}_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + \mu(u, u_0; v, v_0; w)\frac{\partial f}{\partial w} + v_1\frac{\partial f}{\partial v_0}, \qquad \mathrm{X}_4 = \frac{\partial f}{\partial v_1},$$

d'où résulteront

$$(11)\qquad \mathrm{Z}_1 = (\mathrm{X}_3, \mathrm{X}_1) = \frac{\partial f}{\partial u_0}, \qquad \mathrm{Z}_2 = (\mathrm{X}_4, \mathrm{X}_2) = \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

La condition $(X_1, X_2) = 0$ prouvera alors que les transformations

$$(12) \qquad \mathfrak{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda(u, u_0; v, v_0; w)\frac{\partial f}{\partial w}, \qquad \mathfrak{X}_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

$$(13) \qquad \mathfrak{X}_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + \mu(u, u_0; v, v_0; w)\frac{\partial f}{\partial w}, \qquad \mathfrak{X}_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}$$

satisfont aux relations de permutabilité

$$(14) \qquad (\mathfrak{X}_{2i-1}, \mathfrak{X}_{2j}) = 0 \qquad (i, j = 1, 2).$$

On obtiendra une réduction nouvelle en remarquant que, comme $\mathfrak{X}_1$, et $\mathfrak{X}_3$, les transformations

$$\mathfrak{Z}_1 = (\mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_1) = \frac{\partial \lambda}{\partial u_0}\frac{\partial f}{\partial w}, \qquad (\mathfrak{X}_3, \mathfrak{Z}_1) = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_0^2}\frac{\partial f}{\partial w}$$

laissent invariantes $\mathfrak{X}_2$ et $\mathfrak{X}_4$: de sorte que l'on aura, d'après le théorème de S. Lie déjà invoqué, une identité

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_0^2} = m(u, u_0)\frac{\partial \lambda}{\partial u_0}.$$

Une remarque analogue valant pour μ, et les conditions (14) indiquant que v_0 ne figure pas dans λ, ni u_0 dans μ, on aura

$$\lambda = \lambda_0(u, v, w)\, a(u, u_0) + \lambda_1(u, v, w),$$
$$\mu = \mu_0(u, v, w)\, b(v, v_0) + \mu_1(u, v, w),$$

et, plus simplement, en prenant pour variables nouvelles, $a(u, u_0)$ à la place de u_0 et $\Gamma(v, v_0)$ à la place de v_0

$$(16) \quad \lambda = \lambda_0(u, v, w)u_0 + \lambda_1(u, v, w), \qquad \mu = \mu_0(u, v, w)v_0 + \mu_1(u, v, w).$$

Pour que les formules (9) et (10) ne soient pas altérées, il faudra, en même temps, remplacer u_1 par la variable $\frac{\partial a}{\partial u} + u_1\frac{\partial a}{\partial u_0}$ et v_1 par la variable $\frac{\partial b}{\partial v} + v_1\frac{\partial b}{\partial v_0}$.

La formule $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) = 0$ montre alors que les transformations

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda_1\frac{\partial f}{\partial w}, \quad \lambda_0\frac{\partial f}{\partial w}$$

sont permutables avec chacune des transformations

$$\frac{\partial f}{\partial v}+\mu_1\frac{\partial f}{\partial w},\quad \mu_0\frac{\partial f}{\partial w}.$$

On réduira donc λ_1 et μ_1 à zéro en prenant pour variable nouvelle, à la place de w, un invariant commun à $\frac{\partial f}{\partial u}+\lambda_1\frac{\partial f}{\partial w}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}+\lambda_2\frac{\partial f}{\partial w}$. On aura ainsi, pour la base de $\mathcal{F}$,

$$X_1=\frac{\partial f}{\partial u}+u_1\frac{\partial f}{\partial u_0}+u_0\,\lambda(u,v,w)\frac{\partial f}{\partial w},\qquad X_3=\frac{\partial f}{\partial u_1},\tag{17}$$

$$X_2=\frac{\partial f}{\partial v}+v_1\frac{\partial f}{\partial v_0}+v_0\,\mu(u,v,w)\frac{\partial f}{\partial w},\qquad X_4=\frac{\partial f}{\partial v_1}.\tag{18}$$

34. La condition $(X_1, X_2)=0$ donne alors

$$v_0\frac{\partial\mu}{\partial u}-u_0\frac{\partial\lambda}{\partial v}+u_0v_0\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial w}-\mu\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right)=0,\tag{19}$$

d'où l'on conclut

$$\lambda=\varphi(u)\,\omega(w),\qquad \mu=\psi(v)\,\omega(w).\tag{20}$$

En prenant alors comme variable nouvelle $\int\frac{dw}{\omega(w)}$ à la place de w, les formules (17), (18) prendront la forme

$$X_1=\frac{\partial f}{\partial u}+u_1\frac{\partial f}{\partial u_0}+u_0\,\varphi(u)\frac{\partial f}{\partial w},\qquad X_3=\frac{\partial f}{\partial u_1},\tag{21}$$

$$X_2=\frac{\partial f}{\partial v}+v_1\frac{\partial f}{\partial v_0}+v_0\,\psi(v)\frac{\partial f}{\partial w},\qquad X_4=\frac{\partial f}{\partial v_1},\tag{22}$$

et le changement de variables

$$\left\{\begin{aligned}&x=u,\quad y=v,\quad z=w,\quad p=u_0\,\varphi(u),\quad q=v_0\,\psi(v),\\&r=u_1\,\varphi(u)+u_0\,\varphi'(u),\qquad t=v_1\,\psi(v)+v_0\,\psi'(v),\end{aligned}\right.\tag{23}$$

donnera enfin le type

$$\left\{\begin{aligned}&X_1=\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+r\frac{\partial f}{\partial p},\qquad X_3=\frac{\partial f}{\partial r},\\&X_2=\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}+t\frac{\partial f}{\partial q},\qquad X_4=\frac{\partial f}{\partial t},\end{aligned}\right.\tag{24}$$

qui est le faisceau associé à l'équation

$$s = 0. \tag{21}$$

Les faisceaux Φ *considérés dans ce paragraphe sont donc ceux de la classe associée à la classe des équations* E *dans laquelle figure l'équation* $s = 0$.

En d'autres termes, *toute équation* E *qui a trois invariants pour chacun de ses systèmes de caractéristiques est réductible à la forme* $s = 0$ *par une transformation de contact convenablement choisie* ([1]).

([1]) Ce résultat me paraît nouveau, car je ne l'ai pas trouvé énoncé dans les leçons de Goursat sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.