JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES GIRAUD

Nouvelle méthode pour traiter certains problèmes relatifs aux équations du type elliptique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 18 (1939), p. 111-143.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__111_0>

Nouvelle méthode pour traiter certains problèmes relatifs aux équations du type elliptique;

PAR GEORGES **GIRAUD**.

Étant donnée une équation du type elliptique, on peut se proposer d'en construire une solution soumise, dans un domaine donné, à certaines conditions de régularité, et dont, en chaque point de la frontière, la dérivée suivant une direction donnée, augmentée du produit de la fonction inconnue par une fonction donnée, ait une valeur donnée. Lorsque la direction donnée en chaque point de la frontière est celle que certains auteurs nomment *transversale*, et d'autres *conormale*, on a les *problèmes* dits de *Neumann;* comme le problème classique de Neumann, ils peuvent être ramenés à des équations de Fredholm, moyennant certaines conditions de régularité que doivent remplir les données. Lorsque la direction donnée n'est pas partout transversale, on a un nouveau type de problèmes qui, pourvu que cette direction donnée ne soit nulle part tangente à la frontière, et pourvu que les données remplissent certaines autres conditions de régularité, peuvent être traités au moyen d'équations qui diffèrent des équations de Fredholm en ce que les intégrales doivent être prises en *valeurs principales* ([1]).

([1]) *Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application* (*Annales scient. Éc. Norm. sup.*, t. 51, 1934, p. 251 à 372; rectification dans le même recueil, t. 54, 1937, p. 293 et 294). *Équations à intégrales principales d'ordre quelconque* (même recueil, t. 53, 1936, p. 1 à 40). Ces Mémoires seront désignés respectivement par les lettres i et j.

Or l'intervention des intégrales principales peut être évitée. Déjà Liénard l'a prouvé pour les fonctions harmoniques de deux variables, quand on donne la valeur de la dérivée suivant une direction donnée en chaque point de la frontière ([1]); la solution de Liénard ne suppose même pas que la direction donnée soit partout non tangente, mais alors la discussion se complique. Ensuite Oseen a formé une équation de Fredholm dont toute solution fournit une solution de la question analogue, relative aux fonctions harmoniques de trois variables ([2]); toutefois il est nécessaire, comme avec les équations à intégrales principales, de supposer que la direction donnée n'est nulle part tangente à la frontière. Le but du présent Mémoire, écrit en hommage à M. Jacques Hadamard, est de prouver que tous les cas antérieurement traités au moyen des équations à intégrales principales peuvent aussi être traités au moyen des équations de Fredholm.

Nous ne traiterons que des cas où toutes les fonctions données sont continues. Les autres cas antérieurement traités se déduisent des précédents au moyen d'équations de Fredholm, analogues d'ailleurs à celles qui vont nous servir ([3]).

Dans des cas où l'on connaît *a priori* certaines fonctions de Green ou certaines fonctions analogues, relatives à des domaines qui contiennent le domaine donné et sa frontière, la mise en équations à intégrales principales est plus prompte que la mise en équations de Fredholm. Il en est ainsi quand l'opération du type elliptique est le laplacien; on emploie alors des potentiels ordinaires : logarithmiques, newtoniens ou autres, selon le nombre des dimensions. La nouvelle

---

([1]) Alfred Liénard, *Problème de la dérivée oblique dans la théorie du potentiel* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **201**, 1935, p. 320 à 322). M. Liénard a bien voulu m'informer que le Mémoire détaillé paraît dans le *Journal de l'École Polytechnique*, numéros de janvier à juillet 1938.

([2]) C. W. Oseen, *Contributions à la théorie analytique des marées* (*Ark. Mat. Astron. Fys.*, t. **25** A, n° **24**, 1937, p. 1-39).

([3]) *Voir* d'une part le Mémoire *j*, spécialement Chapitre IV, et, d'autre part, *Généralisation d'un type de problèmes relatifs aux équations aux dérivées partielles du type elliptique* (*Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa*, 2^e^ série, t. **7**, 1938, p. 25 à 71). Ce dernier Mémoire sera désigné par la lettre *n*.

méthode a cependant permis de traiter des cas nouveaux ([1]), qui ne seront pas abordés ici.

CHAPITRE I.

LE PROBLÈME PRÉLIMINAIRE.

1. Énoncé du problème préliminaire, définition de sa fonction de Green. — Dans un espace euclidien à m dimensions ($m \geqq 2$), nous choisissons un système de coordonnées cartésiennes orthogonales ($x_1, \ldots, x_m$). Tout point sera désigné par une majuscule, et ses coordonnées seront désignées par la minuscule correspondante, affectée d'indices. Deux fonctions sont données, savoir : une fonction $f(x_1, \ldots, x_m)$ ou $f(X)$, définie et continue pour $x_m \geqq 0$, et nulle à l'infini, et une fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_{m-1})$ qui est considérée comme fonction $\varphi(X)$ d'un point X de la variété $x_m = 0$, et qui est partout continue et nulle à l'infini. Une constante positive g et un angle θ aigu ou nul ($0 \leqq 2\theta < \pi$) sont donnés d'autre part. Le problème préliminaire qui va nous occuper est le suivant :

Construire dans la région $x_m \geqq 0$ une fonction $u(X)$ partout continue, nulle à l'infini, et qui satisfasse dans le domaine $x_m > 0$ à l'équation

$$\Delta u - g^2 u = f(X) \qquad (\Delta = \text{laplacien}\,;\ g > 0), \tag{1}$$

et dont en tout point de $x_m = 0$ la dérivée $\Theta u \cos\theta$ suivant la direction ($\sin\theta$, 0, ..., 0, $-\cos\theta$) *existe et soit égale à $\varphi(X)\cos\theta$,*

$$\Theta u = \varphi(X). \tag{2}$$

Il sera démontré que *ces conditions sont remplies par une fonction u et une seule.*

Nous traiterons d'abord le cas où la fonction donnée φ est identiquement nulle, et où les dérivées secondes de f existent, sont partout continues, et s'annulent à l'infini. Dans ce cas, nous avons, pour

---

([1]) *Voir* aussi deux Notes : *C. R. Acad. Sc.*, t. **205**, 1937, p. 1340 à 1343, et t. **206**, 1938, p. 1157 à 1160.

$x_m > 0$,

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\operatorname{tang}\theta - \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) - g^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\operatorname{tang}\theta - \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\operatorname{tang}\theta - \frac{\partial f}{\partial x_m};$$

si de plus $\frac{\partial u}{\partial x_1}\operatorname{tang}\theta - \frac{\partial u}{\partial x_m}$ tend vers une limite quand X tend vers un point de $x_m = 0$, cette limite est nulle; supposons qu'il en soit ainsi, et que les dérivées de u s'annulent à l'infini. Désignons par $\Psi[L(X, \Xi)]$ la fonction de Green relative à l'opération $\Delta - g^2 \times (\ldots)$ dans l'espace entier, L désignant la distance des deux points; cette fonction, qui a aussi été nommée *solution fondamentale principale*, a pour expression [1]

$$(3) \quad \Psi(L) = \frac{e^{-gL}}{2g\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\left(\frac{g}{2\pi L}\right)^{\frac{m-1}{2}}\int_0^{+\infty} t^{\frac{m-3}{2}}\left(1 + \frac{t}{2gL}\right)^{\frac{m-3}{2}} e^{-t}\,dt.$$

Cette fonction et ses dérivées d'ordre p quelconque, relativement à L, admettent les limitations suivantes, où l'on doit prendre $p = 0$ quand la fonction n'est pas dérivée :

$$(4) \quad \Psi^{(p)}(L) = \begin{cases} O(L^{2-m-p}) & (m + p > 2), \\ O\left(\log\frac{2Q}{gL}\right) & (gL \leq Q \text{ et } m+p=2;\ \text{on a alors } m-2=p=0); \end{cases}$$

Q et les constantes sous-entendues dans les symboles O de Landau sont, ici et dans la suite, indépendants de g; si maintenant gL a une borne inférieure, positive et indépendante de g, nous avons

$$(5) \qquad \Psi^{(p)}(L) = O\left(g^{\frac{m-3}{2}+p}\right) L^{\frac{1-m}{2}} e^{-gL}.$$

En désignant par A′ le point $(a_1, \ldots, a_{m-1}, -a_m)$, symétrique de A par rapport à $a_m = 0$, nous avons, d'après ce qui précède, en désignant

---

[1] *Sur quelques problèmes de Dirichlet et de Neumann* (*Journal de Mathématiques*, 9e série, t. 11, 1932, p. 389 à 416), spécialement Chapitre II. Ce Mémoire sera désigné par la lettre *f*.

par $d\mathrm{V}$ l'élément euclidien,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\operatorname{tang}\theta - \frac{\partial u}{\partial x_m}$$
$$= -\int_{a_m>0}^{(m)} \{ \Psi[\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A})] - \Psi[\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A}')] \} \left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\operatorname{tang}\theta - \frac{\partial f}{\partial a_m} \right) d\mathrm{V}_\mathrm{A}.$$

Appliquons un déplacement à la figure; le transformé Y de X est déterminé par les relations

$$x_1 = y_1 \cos\theta - y_m \sin\theta, \qquad x_m = y_1 \sin\theta + y_m \cos\theta,$$
$$(\alpha - 1)(\alpha - m)(x_\alpha - y_\alpha) = 0;$$

soient B le transformé de A, et B' le transformé de A'. Calculons les coordonnées b'_α de B'; nous avons

$$\begin{aligned} b'_1 &= a_1 \cos\theta - a_m \sin\theta = b_1 \cos(2\theta) - b_m \sin(2\theta), \\ b'_m &= - a_1 \sin\theta - a_m \cos\theta = - b_1 \sin(2\theta) - b_m \cos(2\theta), \\ &(\alpha - 1)(\alpha - m)(b'_\alpha - b_\alpha) = 0. \end{aligned}$$

En utilisant la lettre δ au lieu de ∂ pour les dérivations relatives aux nouveaux points, nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta y_m} &= -\int^{(m)} \{ \Psi[\mathrm{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{B})] - \Psi[\mathrm{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{B}')] \} \frac{\delta f}{\delta b_m} d\mathrm{V}_\mathrm{B} \\ &= -\int^{(m)} \Big\{ \Psi'[\mathrm{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{B})] \frac{y_m - b_m}{\mathrm{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{B})} \\ &\qquad + \Psi'[\mathrm{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{B}')] \frac{y_1 \sin(2\theta) + y_m \cos(2\theta) + b_m}{\mathrm{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{B}')} \Big\} f\, d\mathrm{V}_\mathrm{B}. \end{aligned}$$

Il reste à intégrer relativement à y_m, de façon que le résultat soit nul à l'infini. Posons

$$(6) \quad \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A}') \cos\Omega = y_m - b'_m = (x_m + a_m)\cos\theta - (x_1 - a_1)\sin\theta \qquad (0 \leqq \Omega \leqq \pi),$$

$$\begin{aligned} (7) \quad \mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathrm{A}) = {} & \Psi[\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A})] + \Psi[\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A}')] \cos(2\theta) \\ & - \sin(2\theta)\,[(x_1 - a_1)\cos\theta + (x_m + a_m)\sin\theta] \\ & \times \int_{\cos\Omega}^{+\infty} \frac{\Psi'\big[\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A}')\sqrt{\sin^2\Omega + t^2}\big]}{\sqrt{\sin^2\Omega + t^2}} dt; \end{aligned}$$

nous trouvons alors sans difficulté, si les hypothèses faites au cours du calcul précédent sont vérifiées,

$$(8) \qquad u(\mathrm{X}) = -\int_{a_m>0}^{(m)} \mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathrm{A}) f(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}}.$$

Nous vérifierons que cette fonction u remplit les conditions exigées, mais auparavant nous devons étudier *la fonction* $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathrm{A})$ *qui sera nommée désormais la fonction de Green du problème* énoncé au début du paragraphe. Nous justifierons cette dénomination. La méthode employée pour former cette fonction est une extension de celle que Bouligand employa dans une question voisine [1].

2. Étude de la fonction de Green du problème préliminaire. — Regardons $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathrm{A})$ comme une fonction de X. Il est évident que cette fonction est holomorphe en tout autre point réel que le point A et les points de la demi-droite $\Omega = \pi$, dont l'origine est A′, et qui est parallèle à la direction $(\sin\theta, 0, \ldots, -\cos\theta)$. Un seul de ces points est dans la région $x_m \geqq 0$, c'est le point A; si a_m est positif, $\mathrm{H}_1(\mathrm{X},\mathrm{A}) - \Psi[\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A})]$ est holomorphe en A, et cela prouve que $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathrm{A})$ a en A la singularité d'une fonction de Green. Il n'est pas sans intérêt de connaître l'allure de $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathrm{A})$ au voisinage de la demi-droite $\Omega = \pi$; pour cela nous remarquons qu'on a

$$(9) \qquad \int_{\cos\Omega}^{+\infty} \frac{\Psi'(\mathrm{L}\sqrt{\sin^2\Omega + t^2})}{\sqrt{\sin^2\Omega + t^2}}\, dt = \int_{\cot\Omega}^{+\infty} \frac{\Psi'(\mathrm{L}\sin\Omega\sqrt{1 + t^2})}{\sqrt{1 + t^2}}\, dt;$$

mais d'après (4) nous avons

$$\int_{\cot\Omega}^{+\infty} \frac{\Psi'(\mathrm{L}\sin\Omega\sqrt{1 + t^2})}{\sqrt{1 + t^2}}\, dt$$
$$= \mathrm{O}[(\mathrm{L}\sin\Omega)^{1-m}] \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t^2)^{-\frac{m}{2}}\, dt = \mathrm{O}[(\mathrm{L}\sin\Omega)^{1-m}];$$

comme $|(x_1 - a_1))\cos\theta + (x_m + a_m)\sin\theta|$ est $\leqq \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A}')\sin\Omega$, nous en concluons que le dernier terme du second membre de (7) vaut

---

[1] Georges Bouligand, Georges Giraud et Paul Delens, *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel* (volume de 78 pages, Paris, 1935), spécialement première partie, paragraphe **11**.

$O(\sin^{2-m}\Omega)\,L^{2-m}(X, A')$. Pour $m = 2$, on a

$$|(x_1 - a_1)\cos\theta + (x_m + a_m)\sin\theta| = L(X, A')\sin\Omega,$$

et l'on trouve que, si X tend vers un point autre que A′, sur la demi-droite $\Omega = \pi$, le dernier terme a deux limites opposées, suivant que X rend $(x_1 - a_1)\cos\theta + (x_m + a_m)\sin\theta$ positif ou négatif.

Étudions maintenant l'allure de $H_1(X, A)$ et de ses dérivées de tout ordre quand Ω a une limite supérieure $\omega < \pi$, et quand en outre $L(X, A)\,L^{-1}(X, A')$ est borné; ces conditions sont remplies en particulier quand x_m est $\geqq 0$, car, puisque a_m est $\geqq 0$, $\cos\Omega$ est $\geqq -\sin\theta$, d'où $\Omega \leqq \theta + \frac{\pi}{2}$, et $L(X, A)$ est $\leqq L(X, A')$; nous supposerons $\cos\omega \leqq 0$.

Dans ce but, nous allons étudier l'allure de l'intégrale (9) et de ses dérivées de tout ordre par rapport aux variables L et Ω, ou plutôt par rapport aux variables L et $L\cos\Omega = x$. En remplaçant t par $(t+x)L^{-1}$, le premier membre de (9) devient

$$F(L, x) = \int_0^{+\infty} \frac{\Psi'(\sqrt{L^2 + 2tx + t^2})}{\sqrt{L^2 + 2tx + t^2}}\,dt.$$

Remarquons immédiatement que les inégalités $x \geqq L\cos\omega > -L$ entraînent

$$\sqrt{L^2 + 2tx + t^2} \geqq L\sin\omega.$$

Or nous avons, quand p et q sont $\geqq 0$,

$$\frac{\partial^{p+q} F}{\partial L^p\,\partial x^q}$$
$$= \sum_{n=0}^{p+q} \int_0^{+\infty} \Psi^{(n+1)}(\sqrt{L^2 + 2tx + t^2})(\sqrt{L^2 + 2tx + t^2})^{n-1-2p-2q} A_{p,q,n}(L, x, t)\,dt;$$

on a $A_{0,0,0} = 1$, et l'on vérifie par récurrence que $A_{p,q,n}$ est un polynome homogène et d'ordre $p+q$ par rapport à L, à x et à t. L'intégrale où figure $A_{p,q,n}$ vaut donc

$$\int_0^{+\infty} O[(\sqrt{L^2 + 2tx + t^2})^{-m-p-q}]\,dt = O(L^{1-m-p-q}),$$

cette dernière limitation se justifiant soit directement, soit par application d'un lemme qui sera énoncé plus loin (Chap. II, § 5). Mais une autre limitation est possible si gL est $\geqq 1$. Dans ce cas, le produit de $A_{p,q,n}$ par les autres facteurs qui sont sous le même signe $\int$ vaut

$$O\left(g^{\frac{m-1}{2}+n}\right)\left(\sqrt{L^2+2tx+t^2}\right)^{n-\frac{m+1}{2}-p-q}\exp\left(-g\sqrt{L^2+2tx+t^2}\right).$$

Si x est négatif, nous avons, dans le champ $0 < t < L - x$,

$$\sqrt{L^2+2tx+t^2} > L\sin\omega + \frac{(t+x)^2}{L}(\sqrt{2}-1);$$

si x est $\geqq 0$, nous avons, dans le champ $0 < t < L$,

$$\sqrt{L^2+2tx+t^2} > L + \frac{(\sqrt{2}-1)t^2}{L};$$

l'intégrale qui correspond au champ où ces limitations ont lieu est donc

$$O\left(g^{\frac{m-1}{2}+n}\right)L^{n-\frac{m+1}{2}-p-q}e^{-gL\sin\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{(1-\sqrt{2})gt^2}{L}\,dt$$
$$= O\left(g^{\frac{m}{2}-1+n}\right)L^{n-\frac{m}{2}-p-q}e^{-gL\sin\omega}.$$

Dans le champ restant, nous avons

$$\sqrt{L^2+2tx+t^2} > \begin{cases} L\sin\omega + t + x - L & (x < 0), \\ t & (x \geqq 0); \end{cases}$$

l'intégrale correspondante est donc

$$O\left(g^{\frac{m-3}{2}+n}\right)L^{n-\frac{m+1}{2}-p-q}e^{-gL\sin\omega}.$$

En résumé nous avons, pour $\Omega \leqq \omega < \pi$ et $\cos\omega \leqq 0$,

$$\frac{\partial^{p+q}F}{\partial L^p\,\partial x^q} = \begin{cases} O(L^{1-m-p-q}) & \text{quel que soit } L, \\ O\left(g^{\frac{m}{2}-1+p+q}\right)L^{-\frac{m}{2}}e^{-gL\sin\omega} & \text{pour } gL \geqq 1; \end{cases}$$

les constantes sous-entendues dans les symboles O dépendent de ω, mais non de g.

Arrivons maintenant à la fonction $H_1(X, A)$ définie par (7). Elle dépend de X, de A et de θ. Dérivons-la p fois par rapport à des coordonnées de X et de A, et q fois par rapport à θ, p et q étant $\geqq 0$. D'après ce qui précède, *si l'on a constamment* $\Omega \leqq \omega < \pi$, ω *étant indépendant de* g, *et si* $L(X, A) L^{-1}(X, A')$ *a une borne supérieure indépendante de* g, *le résultat de ces dérivations vaut* $O(L^{2-m-p})$ *si l'on a* $m+p>2$, $O\left(\log \frac{2}{gL}\right)$ *si l'on a* $gL \leqq 1$ *et* $m+p=2$ (*d'où* $m-2=p=0$), *enfin* $O(g^{m+p-2}) e^{-gL \sin\omega}$ *si* gL est $\geqq 1$.

Démontrons maintenant qu'on a

$$\Delta H_1(X, A) - g^2 H_1(X, A) = 0, \tag{10}$$

$$\Theta H_1(X, A) = 0, \tag{11}$$

les opérations étant relatives à X; dans (11), x_m est donc nul. D'après la formation de H_1, nous avons

$$\frac{\partial H_1}{\partial y_m} = \frac{\partial \Psi[L(Y, B)]}{\partial y_m} + \sin(2\theta)\frac{\partial \Psi[L(Y, B')]}{\partial y_1} + \cos(2\theta)\frac{\partial \Psi[L(Y, B')]}{\partial y_m}; \tag{12}$$

l'opération $\Delta - g^2 \times (\ldots)$, appliquée à cette dernière fonction, donne un résultat nul; donc le premier membre de (10) ne dépend pas de y_m; mais, d'après les limitations qui viennent d'être obtenues, ce premier membre tend vers zéro quand y_m augmente indéfiniment par valeurs positives, les autres y_α et tous les b_α restant fixes; donc ce premier membre est nul, et (10) est démontré pour tous les points X qui n'appartiennent ni à la demi-droite singulière, dont l'origine est A', ni à la demi-droite parallèle issue de A; la continuité prouve que l'identité (10) subsiste même pour les points de cette dernière demi-droite [1]. En vue de vérifier (11), nous remarquons que, en changeant les signes des deux membres, (12) s'écrit

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\sin\theta - \frac{\partial H_1}{\partial x_m}\cos\theta = \Psi'[L(X, A)]\frac{(x_1-a_1)\sin\theta - (x_m-a_m)\cos\theta}{L(X, A)} - \Psi'[L(X, A')]\frac{(x_1-a_1)\sin\theta + (x_m+a_m)\cos\theta}{L(X, A')}; \tag{13}$$

---

[1] Une confusion évidente s'est glissée dans un passage analogue de j (Chap. II, § 3), où, huit lignes avant la fin, il faut lire : « $\frac{\partial F}{\partial x_m}$ est une fonction harmonique », en supprimant plusieurs mots.

si maintenant x_m est nul, nous avons $L(X, A) = L(X, A')$, et par suite

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\operatorname{tang}\theta - \frac{\partial H_1}{\partial x_m} = 0 \qquad (x_m = 0);$$

la formule (11) en résulte aussitôt. Nous avons ainsi achevé de justifier le nom de fonction de Green, appliqué à H_1.

Établissons d'autres propriétés de H_1. Tout d'abord, *si nous échangeons les rôles des points* X *et* A, *la fonction* H_1 *remplit les conditions analogues à* (10) *et à* (11), *mais où* θ *est remplacé par* $-\theta$. C'est évident sur l'expression (7), puisque, en désignant par X′ le point $(x_1, \ldots, x_{m-1}, -x_m)$, on a $L(X, A') = L(X', A)$.

D'autre part, *si* x_m *et* a_m *sont* $\geqq 0$, H_1 *est positif*. En effet, si a_m est positif, la fonction H_1, qui est positive quand X, regardé comme variable, est assez voisin de A, et qui est nulle à l'infini, et qui ne peut atteindre un minimum $\leqq 0$ en aucun point ni du domaine $x_m > 0$ (¹) ni de sa frontière (²), est donc positive où que soit X. De même, elle est positive si x_m est positif. Si x_m et a_m sont nuls, elle est encore positive, car, regardée comme fonction de X, elle ne peut non plus atteindre un minimum nul sur la frontière.

Appliquons maintenant la formule de Green aux fonctions $H_1(X, A)$ et $\exp(-ga_m)$, dans la région définie par les conditions simultanées $a_m > 0$, $L(O, A) < R$ et $L(X, A) > \eta$, puis passons à la limite en faisant tendre R vers l'infini et η vers zéro; nous trouvons ainsi, en désignant par dS l'élément euclidien,

$$(14) \qquad \int_{b_m=0}^{(m-1)} H_1(X, B)\, dS_B = \frac{\exp(-gx_m)}{g} \qquad (x_m \geqq 0),$$

(¹) *Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique* (*Bull. Sciences math.*, t. 56, 1932, p. 248 à 272, 281 à 312, 316 à 352, et errata p. 384), spécialement Chapitre I, paragraphes 6 à 8. Ce Mémoire sera désigné par la lettre *g*.

(²) *Problèmes de valeurs à la frontière relatifs à certaines données discontinues* (*Bull. Soc. math.*, t. 61, 1933, p. 1 à 54), spécialement Chapitre IV, paragraphe 3. Le passage cité ne traitait que le cas où l'on a $a_{\alpha.\beta} = a_{\beta.\alpha}$ (dérivation suivant la transversale), mais cette hypothèse n'intervenait pas dans le raisonnement. Ce Mémoire sera désigné par la lettre *h*.

car pour x_m positif cette formule résulte de ce qui précède, et la continuité prouve que (14) reste valable pour $x_m = 0$. La même formule de Green, appliquée aux fonctions $H_1(X, A)$ et 1, conduit par le même raisonnement à l'identité

$$(15) \qquad \int_{a_m}^{(m)} H_1(X, A)\, dV_A = \frac{1}{g^2} \qquad (x_m \geqq 0).$$

3. Résolution du problème préliminaire. — Nous allons maintenant non seulement justifier la formule (8), mais prouver que la fonction

$$(16) \quad u(X) = -\int_{a_m>0}^{(m)} H_1(X, A) f(A)\, dV_A + \int_{b_m=0}^{(m-1)} H_1(X, B)\, \varphi(B)\, dS_B$$

remplit toutes les conditions du problème posé au début du paragraphe **1**, et qu'aucune autre fonction ne les remplit. La formule (1) résulte en effet de la formule (10) et du fait que H_1 a la singularité des fonctions de Green quand les deux points tendent vers un même point-limite. D'autre part nous avons d'après (13)

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\operatorname{tang}\theta - \frac{\partial u}{\partial x_m} = -\int_{a_m>0}^{(m)} \left[\frac{\partial H_1}{\partial x_1}(X, A)\operatorname{tang}\theta - \frac{\partial H_1}{\partial x_m}(X, A)\right] f(A)\, dV_A$$
$$- 2\int_{b_m=0}^{(m-1)} \frac{x_m \Psi'[L(X, B)]}{L(X, B)} \varphi(B)\, dS_B;$$

l'intégrale d'ordre m est uniformément convergente d'après les limitations des dérivées de H_1, et par suite elle tend vers zéro quand X tend vers un point de $x_m = 0$ (toutes les dérivées du premier terme de l'expression de u ont aussi des limites dans ces conditions); quant à l'intégrale d'ordre $m-1$, elle est bien connue par l'étude des problèmes de Dirichlet et de Neumann : sa limite est $\varphi(X)$, ce qui démontre la formule (2).

Prouvons que, lorsque $L(O, X)$ est assez grand, $|u(X)|$ est inférieur à un nombre positif donné 3ε. Soit R_1 une longueur assez grande pour que la condition $L(O, X) > R_1$ entraîne $|f(X)| < \varepsilon g^2$ et $|\varphi(X)| < \varepsilon g$. Alors les champs $L(O, A) > R_1$ et $L(O, B) > R_1$ apportent à $u(X)$, dans l'expression (16), une contribution dont la valeur absolue est $< 2\varepsilon$, quel que soit X. Les champs restants donnent une contribution qui tend vers zéro quand $L(O, X)$ augmente indéfiniment; il existe donc une longueur R telle que la valeur absolue de cette contribution soit $< \varepsilon$ quand $L(O, X)$ est $> R$. Alors on a bien $|u(X)| < 3\varepsilon$ quand $L(O, X)$ est $> R$.

Ainsi la fonction définie par (16) remplit toutes les conditions énoncées au paragraphe **1**. Aucune autre fonction ne peut les remplir, car, si f et φ sont identiquement nuls, la fonction u, nulle à l'infini, et qui ne peut atteindre un maximum positif ou un minimum négatif en aucun point ni du domaine $x_m > 0$ ni de sa frontière (voir les indications données à propos de H_1), est identiquement nulle.

L'existence des dérivées de l'intégrale d'ordre $m - 1$ dans (16) pour $x_m = 0$ est douteuse quand on ne suppose que la continuité de φ. D'après des raisonnements développés ailleurs [1], si x_m est nul et si X_t est le point qui a pour cordonnées $x_\alpha + o_\alpha\left(\frac{t}{\log t}\right)$ $(\alpha < m)$ et $x_m + t + o_m\left(\frac{t}{\log t}\right)$ $(t > 0)$, les $o_\beta(z)$ étant des fonctions dont le rapport à z tend vers zéro avec z, le rapport $\frac{u(X) - u(X_t)}{t}$ tend vers $\varphi(X)$ quand t tend vers zéro. On peut prendre cela comme définition de Θu.

4. Extension du problème préliminaire. — Considérons l'opération du type elliptique

$$(17) \quad \mathcal{F} u = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} - g^2 u \qquad (g > 0;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m;\ m \geqq 2),$$

où tous les coefficients $a_{\alpha,\beta}$ sont constants, et qui peut aussi être prise au sens généralisé, ainsi que nous supposions plus haut pour le laplacien [2]. La forme quadratique $\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} z_\alpha z_\beta$ est supposée définie et positive, mais rien n'est supposé sur les valeurs des différences $a_{\alpha,\beta} - a_{\beta,\alpha}$. On donne d'autre part une variété $\Sigma_\alpha c_\alpha x_\alpha = k$, où les c_α

---

(1) n, spécialement Chapitre II, paragraphe **17**. La propriété du texte (admise comme définition au début du chapitre) résulte de la limitation trouvée pour les dérivées de l'inconnue à l'endroit cité.

(2) Ce sens généralisé est indiqué dans g, Chapitre I. Le travail original où cette généralisation fut introduite à propos du laplacien est dû à Stanislas Zaremba.

et k sont des constantes, avec la condition $\Sigma_\alpha c_\alpha^2 = 1$. Soit X un point de cette variété; soit X_t le point qui a pour coordonnées les quantités $x_\alpha - t\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta} c_\beta + o_\alpha\left(\frac{t}{\log t}\right)$, où les o_α ont la même signification que plus haut; nous posons

$$\Theta u(X) = \lim_{t \to 0} \frac{u(X) - u(X_t)}{t}; \tag{18}$$

si les dérivées de u existent et sont continues en ce point, nous avons aussi $\Theta u = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} c_\beta \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$.

On donne enfin une fonction $f(X)$ d'un point de la région $\Sigma_\alpha c_\alpha x_\alpha \leq k$, et une fonction $\varphi(X)$ d'un point de la frontière $\Sigma_\alpha c_\alpha x_\alpha = k$; ces deux fonctions sont partout continues, et elles s'annulent à l'infini.

Le problème est : *construire une fonction $u(X)$, continue dans la région $\Sigma_\alpha c_\alpha x_\alpha \leq k$, nulle à l'infini, et qui remplisse les conditions*

$$\mathcal{F} u = f \quad \text{pour} \quad \Sigma_\alpha c_\alpha x_\alpha < k, \tag{19}$$

$$\Theta u = \varphi \quad \text{pour} \quad \Sigma_\alpha c_\alpha x_\alpha = k. \tag{20}$$

Cette question peut évidemment être ramenée, par changement de variables, à celle du paragraphe **1**; donc la fonction u existe et est unique. Mais nous avons besoin de mettre la solution sous une forme plus explicite.

Soit D le déterminant $\left|\frac{a_{\alpha,\beta} + a_{\beta,\alpha}}{2}\right|$. Soient $A_{\alpha,\beta}$ les constantes déterminées par les relations

$$(\beta - \alpha)\Sigma_\gamma A_{\alpha,\gamma}(a_{\beta,\gamma} + a_{\gamma,\beta}) = 0, \qquad \Sigma_\gamma A_{\alpha,\gamma}(a_{\alpha,\gamma} + a_{\gamma,\alpha}) = 2.$$

Dans tout changement linéaire de variables, avec des coefficients constants, nous transformerons les c_α comme des composantes tensorielles covariantes (ce qui ne conservera pas l'identité $\Sigma_\alpha c_\alpha^2 = 1$), et les $a_{\alpha,\beta}$ comme des composantes tensorielles doublement contravariantes; nous ne changerons ni g ni k. Alors les définitions (17) et (18) des opérations $\mathcal{F}$ et Θ sont invariantes. Les $A_{\alpha,\beta}$ sont des composantes tensorielles doublement covariantes et symétriques.

En désignant par $y_\alpha (\alpha = 1, \ldots, m)$ les nouvelles variables indépendantes, par μ un certain nombre positif, et par $A'_{\alpha,\beta}$ les composantes du tenseur $(A_{\alpha,\beta})$ dans le système $(y_1, \ldots, y_m)$, nous voulons avoir

$$\Sigma_\alpha c_\alpha x_\alpha - k = -\mu y_m \qquad (\mu > 0),$$
$$(\beta - \alpha) A'_{\alpha,\beta} = 0, \qquad A'_{\alpha,\alpha} = 1 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\Theta u = \mu \left(\operatorname{tang}\theta \frac{\partial u}{\partial y_1} - \frac{\partial u}{\partial y_m} \right) \qquad (\operatorname{tang}\theta > 0).$$

Nous allons calculer μ, y_m, $\operatorname{tang}\theta$ et dy_1. Nous avons d'abord

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta = \mu^2,$$
$$\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} a_{\alpha,\gamma} A_{\gamma,\delta} a_{\delta,\beta} c_\alpha c_\beta = \mu^2 (1 - \operatorname{tang}^2\theta),$$
$$\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma} c_\beta a_{\beta,\gamma} A_{\gamma,\alpha} dx_\alpha = -\mu (\operatorname{tang}\theta \, dy_1 + dy_m),$$

car les premiers membres sont invariants. Nous en déduisons

$$(21) \qquad \mu = \sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta},$$

$$(22) \qquad y_m = \frac{k - \Sigma_\alpha c_\alpha x_\alpha}{\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta}},$$

$$(23) \qquad \operatorname{tang}\theta = \sqrt{\frac{\Sigma_{\alpha,\beta}(a_{\alpha,\beta} - \Sigma_{\gamma,\delta} a_{\alpha,\gamma} A_{\gamma,\delta} a_{\delta,\beta}) c_\alpha c_\beta}{\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta}},$$

$$(24) \qquad dy_1 = \frac{\Sigma_\alpha (c_\alpha - \Sigma_{\beta,\gamma} c_\beta a_{\beta,\gamma} A_{\gamma,\alpha}) \, dx_\alpha}{\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}(a_{\alpha,\beta} - \Sigma_{\gamma,\delta} a_{\alpha,\gamma} A_{\gamma,\delta} a_{\delta,\beta}) c_\alpha c_\beta}}.$$

Il faut maintenant définir la nouvelle *fonction de Green* $H_2(X, \Xi)$. Soient Y et Υ ce que deviennent X et Ξ par la transformation que nous étudions. Nous posons, par définition,

$$\sqrt{D}\, H_2(X, \Xi) = H_1(Y, \Upsilon).$$

Pour mettre H_2 sous forme plus explicite, nous posons

$$(25) \qquad \Lambda_1 = \sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} (x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta)},$$

$$(26) \qquad \Lambda_2 = \sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} (x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta) + 4 \frac{(k - \Sigma_\alpha c_\alpha x_\alpha)(k - \Sigma_\beta c_\beta \xi_\beta)}{\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta}},$$

$$(27) \qquad \Lambda_3 = 2 \frac{\Sigma_\alpha (c_\alpha - \Sigma_{\beta,\gamma} c_\beta a_{\beta,\gamma} A_{\gamma,\alpha})(x_\alpha - \xi_\alpha) \cos^2\theta + [2k - \Sigma_\alpha c_\alpha (x_\alpha + \xi_\alpha)] \sin^2\theta}{\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}(2 a_{\alpha,\beta} - \Sigma_{\gamma,\delta} a_{\alpha,\gamma} A_{\gamma,\delta} a_{\delta,\beta}) c_\alpha c_\beta}},$$

$$(28) \qquad \Lambda_2 \cos\Omega = \frac{2k - \Sigma_\alpha c_\alpha (x_\alpha + \xi_\alpha) - \Sigma_\alpha (c_\alpha - \Sigma_{\beta,\gamma} c_\beta a_{\beta,\gamma} A_{\gamma,\alpha})(x_\alpha - \xi_\alpha)}{\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}(2 a_{\alpha,\beta} - \Sigma_{\gamma,\delta} a_{\alpha,\gamma} A_{\gamma,\delta} a_{\delta,\beta}) c_\alpha c_\beta}} \qquad (0 \leq \Omega \leq \pi).$$

Alors notre fonction de Green est

$$(29) \qquad H_2(X, \Xi) = \frac{1}{\sqrt{D}}\left[\Psi(\Lambda_1) + \Psi(\Lambda_2)\cos(2\theta) - \Lambda_3\int_{\cos\Omega}^{+\infty}\frac{\Psi'(\Lambda_2\sqrt{\sin^2\Omega + t^2})}{\sqrt{\sin^2\Omega + t^2}}\,dt\right].$$

Je dis maintenant que la seule solution du problème qui fait l'objet de ce paragraphe est

$$(30) \quad u(X) = -\int_{\Sigma_\alpha c_\alpha a_\alpha < k}^{(m)} H_2(X, A) f(A)\, dV_A + \int_{\Sigma_\alpha c_\alpha b_\alpha = k}^{(m-1)} H_2(X, B)\varphi(B)\, dS_B,$$

dV et dS désignant les éléments euclidiens, comme précédemment et comme dans la suite. En effet $\frac{dV}{\sqrt{D}}$ est invariant, et par suite nous avons

$$\int_{\Sigma_\alpha c_\alpha a_\alpha < k}^{(m)} H_2(X, A) f(A)\, dV_A = \int_{\upsilon_m > 0}^{(m)} H_1(X, \Upsilon) f(A)\, dV_\Upsilon,$$

Υ étant le point transformé de A. Soient maintenant dS_B et d_Υ des éléments correspondants, pris sur les variétés $\Sigma_\alpha c_\alpha b_\alpha = k$ et $\Upsilon_m = 0$. D'après (22), nous avons, en comparant deux expressions d'un certain élément cylindrique,

$$\mu\, dS_B = \sqrt{D}\, dS_\Upsilon;$$

cela entraîne

$$\mu\int_{\Sigma_\alpha c_\alpha b_\alpha = k}^{(m-1)} H_2(X, B)\varphi(B)\, dS_B = \int_{\upsilon_m = 0}^{(m-1)} H_1(X, \Upsilon)\varphi(B)\, dS_\Upsilon;$$

il en résulte que u remplit la condition à la frontière. D'autre part u est nul à l'infini. C'est donc l'unique solution du problème.

On remarquera que les expressions (23) et (25) à (28) sont positivement homogènes et d'ordre zéro par rapport aux c_α et à k. La relation $\Sigma_\alpha c_\alpha^2 = 1$ n'importe donc pas à l'expression (29) de H_2, mais elle est nécessaire pour la validité de la formule (30).

On vérifie au moyen de (29) que si l'on remplace chaque $a_{\alpha,\beta}$ par $a_{\beta,\alpha}$, ce qui change Θ mais non $\mathcal{F}$, la nouvelle fonction de Green est $H_2(\Xi, X)$.

CHAPITRE II.

PROBLÈME GÉNÉRAL, RELATIF A UNE RÉGION BORNÉE.

1. Énoncé général; caractères de la fonction auxiliaire. — Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné, situé dans l'espace euclidien à m dimensions ($m \geqq 2$). On suppose que l'ensemble fermé $\mathfrak{S}$, qui constitue la frontière de $\mathcal{D}$, est entièrement recouvert par un nombre fini de domaines, dans chacun desquels une certaine coordonnée cartésienne d'un point courant de $\mathfrak{S}$ peut s'exprimer au moyen des $m-1$ autres par une fonction dont les dérivées existent et remplissent une condition de Lipschitz avec un exposant $h \leqq 1$. Les coordonnées cartésiennes employées sont orthogonales. Les cosinus directeurs de la normale à $\mathfrak{S}$ en un point Y, dans le sens sortant de $\mathcal{D}$, seront désignés par $\varpi_\alpha(Y)(\alpha = 1, \ldots, m)$.

Soient maintenant $a_{\alpha,\beta}(X)(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ des fonctions données qui remplissent dans $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$ une condition de Lipschitz avec l'exposant h. On suppose que la forme quadratique $\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(X) z_\alpha z_\beta$ est définie et positive, où que soit X dans $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$. Rien n'est supposé sur les valeurs des différences $a_{\alpha,\beta} - a_{\beta,\alpha}$. Soient $b_\alpha(X)(\alpha = 1, \ldots, m)$, $c(X)$ et $f(X)$ d'autres fonctions données, continues dans $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$. Enfin soient $\varkappa(Y)$ et $\varphi(Y)$ deux fonctions continues données d'un point Y de $\mathfrak{S}$.

Pour toute fonction u deux fois continûment dérivable dans $\mathcal{D}$, et dont les dérivées premières sont uniformément continues, nous posons

$$(1) \qquad \mathcal{F}\, u(X) = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha(X) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(X)\, u(X),$$

$$(2) \qquad \Theta\, u(Y) = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(Y)\, \varpi_\beta(Y) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}(Y) + \varkappa(Y)\, u(Y),$$

où Y est un point de $\mathfrak{S}$. Pour d'autres fonctions u, nous adoptons les définitions généralisées connues [1]; on rappelle que, pour Θu, cette

[1] Pour l'opération $\mathcal{F}$, voir g, Chapitre I. Pour l'opération Θ, voir n, définition du Chapitre II, paragraphe 3, et limitation des dérivées, paragraphe 17, pour justifier cette définition.

définition est

$$\Theta\, u(Y) = \lim_{t \to 0} \frac{u(Y) - u(Y_t)}{t} + \varkappa(Y)\, u(Y),$$

où Y_t désigne le point qui a pour coordonnées les

$$y_\alpha - t \Sigma_\beta a_{\alpha,\beta}(Y)\, \varpi_\beta(Y) + o_\alpha(t \log^{-1} t)$$

($t > 0$, et les o_α ont la même signification qu'au Chapitre I, § 3).

Le problème à traiter est : *construire une fonction u, continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et qui remplisse les conditions*

$$\mathcal{F} u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}, \tag{3}$$

$$\Theta u = \varphi \quad \text{sur } \mathcal{S}. \tag{4}$$

En vue de traiter ce problème, nous construirons d'abord une *fonction auxiliaire* $H(X, \Xi)$, continue par rapport à l'ensemble des deux points quand ceux-ci appartiennent à $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et sont distincts, et qui doit jouir des propriétés suivantes : si X tend vers Ξ, ce dernier point étant fixe dans $\mathcal{D}$, la fonction H doit être infinie comme une fonction de Green, relative à $\mathcal{F}$ (ceci ne concerne pas les points Ξ situés sur $\mathcal{S}$); tant que X n'est pas en Ξ, la fonction H est deux fois continûment dérivable par rapport à X, et l'on a (en diminuant au besoin le nombre h positif, si l'on a $h = 1$),

$$\mathcal{F}\, H(X, \Xi) = O[L^{h-m}(X, \Xi)], \tag{5}$$

$$\Theta\, H(Y, \Xi) = O[L^{1+h-m}(Y, \Xi)]. \tag{6}$$

Ici et dans la suite, toutes les fois que les opérations $\mathcal{F}$ et Θ sont appliquées à une fonction de deux points, nous entendons qu'elles portent sur le premier point. Ces caractères sont loin de déterminer la fonction H, si du moins elle existe; les fonctions H que nous construirons dépendront d'un paramètre g, et elles jouiront de propriétés supplémentaires, utiles pour nos raisonnements.

2. Variété associée a un point. — Soit $w(\Xi)$ une fonction continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, négative en tout point de $\mathcal{D}$, et nulle en tout point de $\mathcal{S}$. Nous supposons que ses dérivées existent et remplissent une condition de Lipschitz avec l'exposant h, ou avec un exposant moindre, que, par un changement de notation, nous nommerons désormais h. De plus nous supposons qu'en tout point de $\mathfrak{S}$ la dérivée de w suivant la normale dirigée dans le sens sortant de $\mathcal{D}$ est positive et non nulle.

Il existe toujours une infinité de fonctions w. Un moyen d'en obtenir une est de construire la fonction w continue dans $\mathcal{D}+\mathfrak{S}$ et nulle sur $\mathfrak{S}$, qui remplit dans $\mathcal{D}$ la condition

$$\Delta w = 1 \qquad (\Delta = \text{laplacien}).$$

Si w est ainsi choisi, il ne peut être nécessaire de diminuer le nombre h du paragraphe **1** que s'il est égal à 1 (h, Chap. IV, § **2**). On peut aussi remplacer l'équation ci-dessus par beaucoup d'autres équations du type elliptique, ou employer d'autres procédés; peu importe, pourvu que les propriétés énoncées dans le premier alinéa aient lieu.

En tout point Ξ de $\mathcal{D}+\mathfrak{S}$, nous posons

$$(7) \qquad c_\alpha(\Xi) = \frac{\partial w}{\partial \xi_\alpha}, \qquad k(\Xi) = \Sigma_\alpha \xi_\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi_\alpha} - w(\Xi) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Si les c_α ne sont pas tous nuls au point donné Ξ, nous considérons la variété

$$(8) \qquad \Sigma_\alpha x_\alpha c_\alpha(\Xi) = k(\Xi)$$

comme *associée au point* Ξ. Si Ξ est assez voisin de $\mathfrak{S}$, les $c_\alpha(\Xi)$ ne sont certainement pas tous nuls, d'après nos hypothèses. Si Ξ est sur $\mathfrak{S}$, la variété (8) est tangente à $\mathfrak{S}$ en Ξ. Si Ξ n'est pas sur $\mathfrak{S}$, nous avons $\Sigma_\alpha \xi_\alpha c_\alpha(\Xi) - k(\Xi) = w(\Xi) < 0$.

Soit σ la plus courte distance entre Ξ et $\mathfrak{S}$. Je dis que *le rapport* $\frac{-w(\Xi)}{\sigma(\Xi)}$ *est compris entre deux nombres positifs fixes*. Il suffit de le prouver pour σ assez petit. Soit Υ le point de $\mathfrak{S}$ qui est le plus proche de Ξ; alors le segment de droite $\Upsilon\Xi$ est normal à $\mathfrak{S}$ en Υ, et tous ses points autres que Υ sont dans $\mathcal{D}$. Or nous avons

$$w(\Xi) = w(\Upsilon) + \Sigma_\alpha(\xi_\alpha - \upsilon_\alpha)\frac{\partial w}{\partial \xi_\alpha}(Z),$$

où Z est un point intérieur au segment $\Xi\Upsilon$. D'après nos hypothèses, cela s'écrit aussi

$$-w(\Xi) = \Sigma_\alpha(\upsilon_\alpha - \xi_\alpha)\frac{\partial w}{\partial \xi_\alpha}(\Upsilon) + O(\sigma^{1+h}).$$

Si maintenant nous remarquons que $\Sigma_\alpha(\upsilon_\alpha - \xi_\alpha)\frac{\partial w}{\partial \xi_\alpha}(\Upsilon)$ est le produit de σ par la dérivée de w suivant la normale dirigée dans le sens sortant de $\mathcal{D}$, et si nous observons que cette dernière dérivée oscille entre deux bornes positives, notre assertion en résulte.

Soit θ_1 un angle aigu donné $(0 < 2\theta_1 < \pi)$. Soit X un point de la variété (8); on suppose que l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{\Xi X}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, w(\Xi)$ est $\leqq \theta_1$. Je dis que *si* $\sigma(\Xi)$ *est assez petit, la plus courte distance entre* X *et* $\mathcal{S}$ *est* $O[\sigma^{1+h}(\Xi)]$. En effet nous avons, en supposant que tout le segment ΞX appartient à $\mathcal{D}$,

$$w(X) = w(\Xi) + \left[\overrightarrow{\Xi X}.\overrightarrow{\text{grad}}\, w(\Xi)\right] + O[L^{1+h}(X, \Xi)];$$

la somme des deux premiers termes est nulle, d'après (8). D'autre part, si $\sigma(\Xi)$ *est assez petit, pour que* $\Sigma_\alpha c_\alpha^2(\Xi)$ *soit compris entre deux bornes positives fixes, la relation*

$$\Sigma_\alpha \xi_\alpha c_\alpha(\Xi) - k(\Xi) = w(\Xi) = O(\sigma)$$

entraîne que la distance entre Ξ *et la variété* (8) *est* $O(\sigma)$. Comme $L(X, \Xi)$ est au plus égal au quotient de cette distance par $\cos\theta_1$, nous avons

$$w(X) = O[L^{1+h}(X, \Xi)] = O[\sigma^{1+h}(\Xi)],$$

et cela entraîne que notre énoncé se vérifie dans ce cas. Si maintenant le segment ΞX a au moins un point commun avec $\mathcal{S}$, soit Y celui de ces points qui est le plus proche de Ξ (Y existe, car l'ensemble de ces points communs est fermé). Comme $w(Y)$ est nul, et comme $L(Y, \Xi)$ est $\leqq L(X, \Xi) = O(\sigma)$, nous avons

$$\left[\overrightarrow{\Xi Y}.\overrightarrow{\text{grad}}\, w(\Xi)\right] + w(\Xi) = O[L^{1+h}(Y, \Xi)] = O(\sigma^{1+h});$$

cette relation signifie que la distance entre Y et la variété (8) est $O(\sigma^{1+h})$. Or $L(Y, X)$ est au plus égal au quotient de cette distance par $\cos\theta_1$; notre énoncé est donc entièrement démontré.

3. Point associé a un point donné. — Menons par Ξ la parallèle à la direction déterminée par les coefficients

$$\Sigma_\beta[a_{\alpha,\beta}(\Xi) + a_{\beta,\alpha}(\Xi)]c_\beta(\Xi) \; (\alpha = 1, \ldots, m);$$

l'angle entre cette direction et celle de $\overrightarrow{\operatorname{grad}} w$ est inférieur à un angle aigu indépendant de Ξ et que nous nommons θ_1. Donc cette droite menée par Ξ rencontre (8) en un point X; soit Ξ' le point tel qu'on ait $\overrightarrow{\Xi\Xi'} = 2\overrightarrow{\Xi X}$. Le point Ξ' sera ici nommé *point associé à* Ξ. Je dis que *si* $\sigma(\Xi)$ *est assez petit*, Ξ' *n'appartient pas à* $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$, sauf si Ξ est sur $\mathfrak{S}$.

Montrons d'abord que, si $\sigma(\Xi)$ est assez petit, il y a sur le segment $\Xi\Xi'$ un point distinct des extrémités et qui appartient à $\mathfrak{S}$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, nous aurions

$$\begin{aligned} w(\Xi') &= w(\Xi) + \left[\overrightarrow{\Xi\Xi'}.\overrightarrow{\operatorname{grad}} w(\Xi)\right] + O[L^{1+h}(\Xi, \Xi')] \\ &= w(\Xi) + 2\left[\overrightarrow{\Xi X}.\overrightarrow{\operatorname{grad}} w(\Xi)\right] + O[L^{1+h}(X, \Xi)] \\ &= -w(\Xi) + O[L^{1+h}(X, \Xi)]. \end{aligned}$$

D'après le paragraphe **2**, nous aurions donc, pour σ assez petit, en désignant par Q_1 et par Q_2 deux certaines constantes positives

$$w(\Xi') > Q_1\sigma - Q_2\sigma^{1+h};$$

mais ceci entraîne que, pour σ assez petit, $w(\Xi')$ serait positif, contrairement aux hypothèses relatives à w.

Donc il y a sur le segment $\Xi\Xi'$ un point Y, distinct des extrémités, et qui appartient à $\mathfrak{S}$. L'angle entre $\overrightarrow{\operatorname{grad}} w(\Xi)$ et la normale à $\mathfrak{S}$ en Y est $O(\sigma^h)$, car le carré de son sinus est inférieur au produit d'une constante positive par

$$\Sigma_{\alpha,\beta}[c_\alpha(\Xi)c_\beta(Y) - c_\beta(\Xi)c_\alpha(Y)]^2 = O(\sigma^{2h}).$$

Si donc θ_2 est un angle aigu donné, $> \theta_1$, l'angle entre la demi-droite $Y\Xi'$ et la normale à $\mathfrak{S}$ en Y est $< \theta_2$ dès que σ est assez petit. D'après nos hypothèses sur $\mathfrak{S}$, si cette demi-droite rencontre de nouveau $\mathfrak{S}$, ce ne sera pas avant une distance positive a de Y; a ne dépend que de $\mathfrak{S}$ et de θ_2. Si donc σ est assez petit, Ξ' sera entre Y et ce nouveau point de rencontre, si celui-ci existe. Donc Ξ' n'appartient pas à $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$, ce qu'il fallait démontrer.

Si a est assez petit, on voit de même que la distance entre Y ou Ξ d'une part, et, d'autre part, tout point commun à $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$ et à la demi-droite d'origine Ξ déterminée par les coefficients $\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta}(\Xi)c_\beta(\Xi)$, est toujours $> a$, si de tels points communs existent.

4. Formation de la fonction auxiliaire. — Reprenons la fonction $H_2(X, \Xi)$ définie au Chapitre I (§ **4**). Dans les expressions de D et des $A_{\alpha,\beta}$ au moyen des $a_{\alpha,\beta}$, ainsi que dans les expressions (23) et (25) à (28) du passage cité, remplaçons toutes les constantes $a_{\alpha,\beta}$, c_α et k par les fonctions $a_{\alpha,\beta}(\Xi)$, $c_\alpha(\Xi)$ et $k(\Xi)$ introduites dans le présent chapitre (§§ **1** et **2**). Les grandeurs D, $A_{\alpha,\beta}$ et θ deviennent ainsi des fonctions de Ξ, et les grandeurs Λ_1, Λ_2, Λ_3 et Ω deviennent de nouvelles fonctions de X et de Ξ. *Soit* $H_3(X, \Xi)$ *ce que devient la fonction* H_2 quand, dans son expression (29) (Chap. I, § **4**), nous entendons toutes ces grandeurs dans le nouveau sens.

Soit maintenant μ une constante positive assez petite pour que l'inégalité $w(\Xi) \geqq -2\mu$ entraîne les propriétés établies aux paragraphes **2** et **3**. Posons

$$(9)\quad H_4(X, \Xi) = \begin{cases} H_3(X, \Xi) & [w(\Xi) \geqq -\mu], \\ \dfrac{w(\Xi)+2\mu}{\mu} H_3(X, \Xi) - \dfrac{w(\Xi)+\mu}{\mu} \dfrac{\Psi(\Lambda_1)}{\sqrt{D(\Xi)}} & [-\mu \geqq w(\Xi) \geqq -2\mu], \\ \dfrac{\Psi(\Lambda_1)}{\sqrt{D(\Xi)}} & [w(\Xi) \leqq -2\mu]. \end{cases}$$

Enfin, reprenons la longueur positive a du paragraphe précédent : si $w(\Xi)$ est $\geqq -2\mu$, et si Ξ' est l'associé de Ξ, la distance entre Ξ et le plus proche point où la demi-droite mentionnée, d'origine Ξ', rencontre $\mathfrak{S}$, est $> a$, si cette rencontre a lieu. Posons enfin

$$(10)\quad H(X, \Xi) = \begin{cases} [1 - a^{-2}(L^2(X, \Xi)]^3 H_4(X, \Xi) & [L(X, \Xi) \leqq a], \\ 0 & [L(X, \Xi) \geqq a]. \end{cases}$$

Nous allons établir que $H(X, \Xi)$ possède tous les caractères dont nous voulions doter la *fonction auxiliaire* annoncée au paragraphe **1**. Nous établirons aussi d'autres propriétés de cette *fonction auxiliaire*.

Tout d'abord si Ξ appartient à $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}$, si X appartient à $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}-\Xi$ et si sont remplies les conditions $w(\Xi) \geqq -2\mu$ et $L(X, \Xi) \leqq a$, la fonction H_3 est continue et deux fois continûment dérivable par rapport à X, car cette fonction ne cesse d'avoir ces propriétés que lorsque X vient en Ξ ou sur la demi-droite mentionnée, d'origine Ξ', et tous ces points sont exclus par nos hypothèses. De plus si X et Ξ tendent vers un même point-limite situé dans la région $0 > w(\Xi) \geqq -2\mu$, la fonction H_3 devient infinie comme une fonction de Green.

Par suite, où que soit Ξ dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, si X appartient à $\mathcal{D}+\mathcal{S}-\Xi$ et si l'on a $L(X, \Xi) \leqq a$, $H_4(X, \Xi)$ est continu et deux fois continûment dérivable par rapport à X. Si X et Ξ tendent vers un même point-limite situé dans $\mathcal{D}$, $H_4(X, \Xi)$ devient infini comme une fonction de Green.

Donc, où que soit Ξ dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, si X appartient à $\mathcal{D}+\mathcal{S}-\Xi$, $H(X, \Xi)$ est continu et deux fois continûment dérivable par rapport à X. Si X et Ξ tendent vers un même point-limite situé dans $\mathcal{D}$, $H(X, \Xi)$ devient infini comme une fonction de Green.

Il reste à vérifier les conditions (5) et (6). Le nombre h qui va y figurer est celui qui a été défini au paragraphe **1**, sauf dans certains cas où ce nombre était égal à *un* et où nous avons déjà dû le diminuer au paragraphe **2**.

Occupons-nous d'abord de la condition (5). Il est certain, d'après la formation de H_4, qu'on a

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(\Xi)\frac{\partial^2 H_4(X, \Xi)}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} - g^2 H_4(X, \Xi) = 0,$$

pourvu que X et Ξ appartiennent à $\mathcal{D}$ et qu'on ait $0 < L(X, \Xi) \leqq a$. Cela entraîne

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(\Xi)\frac{\partial^2 H(X, \Xi)}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} - g^2 H(X, \Xi) = \begin{cases} O[L^{1-m}(X, \Xi)] & \text{(quel que soit L)}, \\ O(g^{m-1})e^{-\nu g L(X,\Xi)} & (gL \geqq 1), \end{cases}$$

pourvu seulement que X et Ξ appartiennent à $\mathcal{D}$ et soient distincts; la constante positive ν et les constantes sous-entendues dans les symboles O ne dépendent, ici et dans la suite, ni de Ξ ni de X ni de g; en effet cette limitation est évidente si $w(\Xi)$ est $\leqq -2\mu$, et, si $w(\Xi)$ est $\geqq -2\mu$, elle résulte de ce que $L(X, \Xi)L^{-1}(X, \Xi')$, étant toujours continu, est borné, et de ce que pour la même raison, la borne supérieure de Ω est $< \pi$ (Chap. I, § **2**). Nous en déduisons enfin

$$(11)\qquad \mathcal{F}\,\mathrm{H}(\mathrm{X}, \Xi) - g^2\,\mathrm{H}(\mathrm{X}, \Xi) = \begin{cases} \mathrm{O}[\mathrm{L}^{h-m}(\mathrm{X}, \Xi) & (\text{quel que soit L}), \\ \mathrm{O}(g^m)\mathrm{L}^h e^{-\nu g \mathrm{L}(\mathrm{X},\Xi)} & (g\mathrm{L} \geqq 1). \end{cases}$$

Nous avons ainsi établi la limitation (5) et même quelque chose de plus.

Passons à la condition (6). Soient Y un point de $\mathcal{S}$, et Ξ un point de $\mathcal{O} + \mathcal{S} - \mathrm{Y}$. Nous voulons limiter plusieurs fonctions de ces deux points. Tout d'abord, $\sigma(\Xi)$ étant $\leqq \mathrm{L}(\mathrm{Y}, \Xi)$, nous avons, d'après le paragraphe **2**,

$$k(\Xi) - \Sigma_\alpha \xi_\alpha c_\alpha(\Xi) = -w(\Xi) = \mathrm{O}(\sigma) = \mathrm{O}[\mathrm{L}(\mathrm{Y}, \Xi)].$$

Nous avons aussi

$$k(\mathrm{Y}) - \Sigma_\alpha \xi_\alpha c_\alpha(\mathrm{Y}) = \mathrm{O}[\mathrm{L}(\mathrm{Y}, \Xi)],$$

car le premier membre est égal au produit d'un facteur borné par la distance entre Ξ et une variété qui contient Y. Limitons maintenant

$$k(\Xi) - \Sigma_\alpha y_\alpha c_\alpha(\Xi) = \Sigma_\alpha(\xi_\alpha - y_\alpha)\,c_\alpha(\Xi) - w(\Xi);$$

si le segment $\Xi\mathrm{Y}$ est tout entier, sauf ses extrémités, dans $\mathcal{O}$, cette expression vaut $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{Y}, \Xi)]$, d'après le théorème des accroissements finis; si l'intérieur de $\mathrm{Y}\Xi$ n'est pas tout entier dans $\mathcal{O}$ et que Ξ soit dans $\mathcal{O}$, soit Υ le plus rapproché de Ξ parmi les points communs à $\mathrm{Y}\Xi$ et à $\mathcal{S}$; nous avons

$$k(\Xi) - \Sigma_\alpha \upsilon_\alpha c_\alpha(\Xi) = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\Upsilon, \Xi)] = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{Y}, \Xi)];$$

mais $\Sigma_\alpha(\upsilon_\alpha - y_\alpha)c_\alpha(\Xi)$ est le produit géométrique de deux vecteurs, dont les longueurs sont $\mathrm{O}[\mathrm{L}(\mathrm{Y}, \Xi)]$ et $\mathrm{O}(1)$, et dont l'angle est $\frac{\pi}{2} - \mathrm{O}[\mathrm{L}^h(\mathrm{Y}, \Xi)]$; ce produit géométrique vaut donc $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{Y}, \Xi)]$; donc nous avons toujours, même si Ξ est $\mathcal{S}$,

$$k(\Xi) - \Sigma_\alpha y_\alpha c_\alpha(\Xi) = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{Y}, \Xi)].$$

La quantité $k(\Xi) - k(\mathrm{Y}) - \Sigma_\alpha y_\alpha[c_\alpha(\Xi) - c_\alpha(\mathrm{Y})]$ vaut aussi $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{Y}, \Xi)]$, car elle est égale à la précédente. Par différence avec cette dernière quantité, nous trouvons enfin

$$k(\Xi) - k(\mathrm{Y}) - \Sigma_\alpha \xi_\alpha[c_\alpha(\Xi) - c_\alpha(\mathrm{Y})] = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{Y}, \Xi)].$$

Si maintenant nous appliquons le théorème des accroissements finis à la différence entre les deux valeurs de Λ_2 [Chap. I, § 4, formule (26)] obtenues en mettant X en Y et en remplaçant les lettres c_α et k d'une part par leurs valeurs en Ξ, d'autre part par leurs valeurs en Y, pendant que les fonctions $a_{\alpha,\beta}$ (et $A_{\alpha,\beta}$) sont toujours prises en Ξ, nous trouvons que cette différence est $O[L^{1+h}(Y, \Xi)]$; dans l'application du théorème des accroissements finis, on considère $k - \Sigma_\alpha c_\alpha y_\alpha$, $k - \Sigma_\alpha c_\alpha \xi_\alpha$ et tous les c_α comme autant de variables. Si nous prenons les différences des deux valeurs correspondantes de chacune des fonctions Λ_3 et $\Lambda_2 \cos\Omega$, nous trouvons encore $O(L^{1+h}(Y, \Xi)]$. La différence entre la dérivée par rapport à un des y_α d'une des fonctions $\Lambda_2(Y, \Xi)$, $\Lambda_3(Y, \Xi)$ et $\Lambda_2(Y, \Xi)\cos\Omega(Y, \Xi)$, définies au début de ce paragraphe, et ce que devient cette dérivée quand on y remplace $k(\Xi)$ par $k(Y)$ et chaque $c_\alpha(\Xi)$ par $c_\alpha(Y)$, est $O[L^h(Y, \Xi)$; cela se vérifie immédiatement.

Dans $H_3(X, \Xi)$, remplaçons toutes les fonctions $c_\alpha(\Xi)$ et $k(\Xi)$ par des constantes qui coïncident avec les valeurs prises par ces fonctions en un point donné Y de $\mathfrak{S}$; soit $H_3^*(X, \Xi)$ la fonction ainsi obtenue; nous avons, *pour le point* Y *donné*,

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(\Xi)\varpi_\beta(Y)\frac{\partial H_3^*}{\partial x_\alpha}(Y, \Xi) = 0;$$

nous en concluons, pour ce même point Y, sous la condition $L(Y, \Xi) \leqq a$,

$$\Theta H_3^*(Y, \Xi) = \begin{cases} O[L^{1+h-m}(Y, \Xi)] & (\text{quel que soit } L \leqq a), \\ O(g^{m-1})L^h(Y, \Xi)e^{-\nu g L(Y,\Xi)} & (\text{pour } gL \geqq 1). \end{cases}$$

Mais sous les conditions $w(\Xi) \geqq -2\mu$ et $L(Y, \Xi) \leqq a$, la dérivée de $H_3(X, \Xi) - H_3^*(X, \Xi)$ par rapport à $x_\lambda (\lambda = 1, \ldots, m)$ vaut, lorsque X est au point donné Y,

$$\begin{array}{ll} O[L^{1+h-m}(Y, \Xi)] & (\text{quel que soit } L \leqq a), \\ O(g^m) L^{1+h}(Y, \Xi)e^{-\nu g L(Y,\Xi)} & (\text{si } gL \text{ est } \geqq 1). \end{array}$$

Nous en déduisons que $\Theta H_3(Y, \Xi)$ admet, lui aussi, des limitations de ce type, quand on a $w(\Xi) \geqq -2\mu$ et $L(Y, \Xi) \leqq a$. Ce même type de limitation convient aussi pour $\Theta H_4(Y, \Xi)$, pourvu seulement qu'on ait $L(Y\Xi) \leqq a$. Enfin il convient aussi pour $\Theta H(Y, \Xi)$ dans tous les cas :

$$(12)\qquad \Theta\,\mathrm{H}(\mathrm{Y}, \Xi) = \begin{cases} \mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h-m}(\mathrm{Y}, \Xi)] & \text{(quel que soit L)}, \\ \mathrm{O}(g^m)\,\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{Y}, \Xi)\,e^{-\nu g \mathrm{L}(\mathrm{Y}, \Xi)} & (\text{pour } g\mathrm{L} \geqq 1). \end{cases}$$

C'est la condition (6) annoncée, et quelque chose de plus.

5. Premier système d'équations intégrales. — Dans le problème énoncé au début du chapitre, remplaçons $\mathcal{F}u$ par $\mathcal{F}u - g^2 u$; ce ne serait qu'un changement de notation, si nous nommions $c + g^2$ la fonction donnée, auparavant nommée c; mais tel n'est point notre dessein. La condition (3) est donc maintenant remplacée par

$$(13)\qquad \mathcal{F}u - g^2 u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}.$$

Ayant formé la fonction auxiliaire H, nous cherchons u parmi les fonctions

$$(14)\qquad u(\mathrm{X}) = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\rho(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{B})\,\sigma(\mathrm{B})\,d\mathrm{S}_\mathrm{B},$$

où ρ et σ sont deux fonctions inconnues; ρ doit être défini et continu en tout point de $\mathcal{D}$, σ doit l'être en tout point de $\mathcal{S}$. Posons

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathrm{K}_{1,1}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) = \mathcal{F}\,\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) - g^2\,\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}), & \mathrm{K}_{1,2}(\mathrm{X}, \mathrm{B}) = -\mathrm{K}_{1,1}(\mathrm{X}, \mathrm{B}), \\ \mathrm{K}_{2,1}(\mathrm{Y}, \mathrm{A}) = \Theta\,\mathrm{H}(\mathrm{Y}, \mathrm{A}), & \mathrm{K}_{2,2}(\mathrm{Y}, \mathrm{B}) = -\mathrm{K}_{2,1}(\mathrm{Y}, \mathrm{B}). \end{cases}$$

Nous allons établir que, *pour les fonctions exprimées par* (14), *les conditions* (13) *et* (4) *se traduisent par les équations*

$$(16)\qquad \rho(\mathrm{X}) - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathrm{K}_{1,1}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\rho(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{K}_{1,2}(\mathrm{X}, \mathrm{B})\,\sigma(\mathrm{B})\,d\mathrm{S}_\mathrm{B} = f(\mathrm{X}),$$

$$(17)\qquad \sigma(\mathrm{Y}) - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathrm{K}_{2,1}(\mathrm{Y}, \mathrm{A})\,\rho(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{K}_{2,2}(\mathrm{Y}, \mathrm{B})\,\sigma(\mathrm{B})\,d\mathrm{S}_\mathrm{B} = \varphi(\mathrm{Y}),$$

qui doivent être satisfaites où que soient X dans $\mathcal{D}$ et Y sur $\mathcal{S}$.

Il est tout d'abord certain, d'après des travaux antérieurs (g, Chap. I), que (16) traduit (13). D'après les limitations des dérivées de H, on a aussi

$$\Theta \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{Y}, \mathrm{A})\,\rho(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} = \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathrm{K}_{2,1}(\mathrm{Y}, \mathrm{A})\,\rho(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A},$$

à condition que ρ soit convenablement limité au voisinage de $\mathfrak{S}$: il suffit qu'on ait $\rho = O[(-w)^{h-1})]$, w étant la fonction du paragraphe **2** (*n*, Chap. I, § **7**); ajoutons cette hypothèse. Pour appliquer l'opération Θ à l'intégrale d'ordre $m-1$, considérons comme donné un point Y de $\mathfrak{S}$. Si $\mathfrak{S}_1$ est un domaine de $\mathfrak{S}$, et si Y est intérieur à $\mathfrak{S}_1$, nous avons évidemment

$$\Theta\int_{\mathfrak{S}-\mathfrak{S}_1}^{(m-1)} \mathrm{H}(\mathrm{Y},\mathrm{B})\,\sigma(\mathrm{B})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{B}} = \int_{\mathfrak{S}-\mathfrak{S}_1}^{(m-1)} \Theta\,\mathrm{H}(\mathrm{Y},\mathrm{B})\,\sigma(\mathrm{B})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{B}}.$$

Soit r une longueur positive, au plus égale à la longueur a du paragraphe **3**; de plus r est supposé assez petit pour que, parmi les points A communs à $\mathcal{D}+\mathfrak{S}-\mathrm{Y}$ et à la région $\mathrm{L}(\mathrm{Y},\mathrm{A})\leqq r$, il n'y en ait aucun sur la demi-droite issue de Y et dont les coefficients de direction sont les $\Sigma_\beta a_{\beta,\alpha}(\mathrm{Y})c_\beta(\mathrm{Y})$; enfin r est assez petit pour que l'angle entre les directions $[c_1(\mathrm{A}),\ \ldots,\ c_m(\mathrm{A})]$ qui correspondent à deux points variables dans cette région commune, soit inférieur à un angle aigu fixe. $\mathfrak{S}_1$ sera pris intérieur à cette région $\mathrm{L}(\mathrm{Y},\mathrm{A})\leqq r$. Soit $\mathrm{H}^\star(\mathrm{X},\Xi)$ ce que devient la fonction H_3 (§ **4**) quand on y remplace toutes les fonctions $a_{\alpha,\beta}(\Xi)$, $\mathrm{A}_{\alpha,\beta}(\Xi)$, $\mathrm{D}(\Xi)$, $c_\alpha(\Xi)$ et $k(\Xi)$ par des constantes égales aux valeurs prises par les mêmes fonctions au point donné Y. Si Y_t est un des points définis au paragraphe **1**, si t est assez petit, si B appartient à $\mathfrak{S}_1$ et si E est la projection orthogonale de B sur la variété $\Sigma_\alpha e_\alpha c_\alpha(\mathrm{Y}) = k(\mathrm{Y})$, on constate que les dérivées par rapport à x_α des différences $\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{B})-\mathrm{H}_4(\mathrm{X},\mathrm{B})$, $\mathrm{H}_3(\mathrm{X},\mathrm{B})-\mathrm{H}^\star(\mathrm{X},\mathrm{B})$ et $\mathrm{H}^\star(\mathrm{X},\mathrm{B})-\mathrm{H}^\star(\mathrm{X},\mathrm{E})$ valent $O[\mathrm{L}^{1+h-m}(\mathrm{Y},\mathrm{B})]$ quand X est en Y_t; d'autre part $\mathrm{H}_3(\mathrm{X},\mathrm{B})$ et $\mathrm{H}_4(\mathrm{X},\mathrm{B})$ sont identiques (§ **4**). Cela ramène notre question à celle du Chapitre I, paragraphe **4**. Il est donc démontré que (17) traduit la condition (4).

Nous allons montrer maintenant que le *système* [(16), (17)] *obéit à la théorie de Fredholm*. Pour cela nous utilisons uniquement celles des limitations (11) et (12) qui sont valables quel que soit L; ce sont en somme les conditions (5) et (6) pour le problème actuel; ces limitations entraînent

$$\mathrm{K}_{1,\alpha} = O(\mathrm{L}^{h-m}),\qquad \mathrm{K}_{2,\alpha} = O(\mathrm{L}^{1+h-m})\qquad (\alpha = 1 \text{ ou } 2).$$

Soient $\mathrm{K}_{\alpha,\beta}^{(n)}$ les noyaux qui remplacent les $\mathrm{K}_{\alpha,\beta}$ après itération de rang n; on a donc

$$K^{(1)}_{\alpha,\beta} = K_{\alpha,\beta}$$

et

$$K^{(n+1)}_{\alpha,\beta}(X, \Xi) = \int_{\mathcal{D}}^{(m)} K^{(n)}_{\alpha,1}(X, A)\, K_{1,\beta}(A, \Xi)\, dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} K^{(n)}_{\alpha,2}(X, B)\, K_{2,\beta}(B, \Xi)\, dS_B.$$

Pour limiter les $K^{(n)}_{\alpha,\beta}$, nous emploierons le lemme suivant, démontré ailleurs (n, Chap. I, § **2** à **4**), grâce auquel les intégrales étendues à $\mathfrak{S}$ se limitent par les mêmes raisonnements que les intégrales étendues à $\mathcal{D}$:

Soient α *une constante donnée*, X *un point qui varie dans l'espace à* m *dimensions*, l *et* R *des longueurs positives variables. En intégrant dans la région de* $\mathfrak{S}$ *déterminée par les inégalités* $l < L(X, A) < R$, *nous avons*

$$(18) \quad \int^{(m-1)} L^{\alpha+1-m}(X, A)\, dS_A = \begin{cases} O(R^\alpha) & (\alpha > 0), \\ O(l^\alpha) & (\alpha < 0), \\ O[\log(2R) - \log l] & (\alpha = 0,\ R \geqq l); \end{cases}$$

les constantes impliquées dans les symboles O ne dépendent que de $\mathfrak{S}$ et de α. La première limitation ($\alpha > 0$) est encore valable pour $l = 0$

Pour simplifier, nous utilisons la possibilité de diminuer h, de façon que ni mh^{-1}, ni $(m-1)h^{-1}$ ne soient entiers; en particulier h est maintenant supposé < 1.

Limitons d'abord les $K^{(2)}_{1,\beta}$. La partie de l'intégrale d'ordre $m-1$ qui provient de la région $2L(X, B) < L(X, \Xi)$ vaut, d'après le lemme, $O(s^{h-1})\, L^{1+h-m}(X, \Xi)$, en désignant par s la (plus courte) distance entre X et $\mathfrak{S}$. La partie qui provient du champ $2L(\Xi, B) < L(X, \Xi)$ vaut $O[L^{2h-m}(X, \Xi)]$, toujours d'après le lemme. Dans le champ restant, $3L(\Xi, B)$ est $\geqq L(X, B)$, et par suite l'intégrale est

$$O(1) \int^{(m-1)} L^{1+2h-2m}(X, B)\, dS_B = O[L^{2h-m}(X, \Xi)],$$

d'après le même lemme. La même division en régions permet de limiter l'intégrale d'ordre m, qui vaut $O(L^{2h-m})$. Nous avons donc $K^{(2)}_{1,\beta} = O(L^{2h-m} + s^{h-1} L^{1+h-m})$.

On trouve de même $K^{(2)}_{2,\beta} = O(L^{1+2h-m})$ si $2h$ est $< m-1$, et $= O(1)$ si $2h$ est $> m-1$; notre choix de h écarte le cas intermédiaire.

Plus généralement, si n est un entier > 1 et tel que nh soit $< m-1$, des raisonnements semblables aux précédents donnent, par récurrence, les résultats suivants :

$$K^{(n)}_{1,\beta} = O[L^{nh-m} + \Sigma_q s^{qh-1} L^{1+(n-q)h-m}] \qquad (0 < q \leqq n-1,\ qh < 1),$$
$$K^{(n)}_{2,\beta} = O(L^{1+nh-m});$$

la sommation est étendue à tous les entiers q qui remplissent les conditions indiquées. Pour $m-1 < nh < m$, nous avons

$$K^{(n)}_{1,\beta} = O[L^{nh-m} + \Sigma_q s^{qh-1} L^{1+(n-q)h-m} + s^{h-1}] \qquad (nh+1-m < qh < 1),$$
$$K^{(n)}_{2,\beta} = O(1);$$

la sommation est étendue à tous les entiers q qui remplissent les nouvelles conditions indiquées, et il peut arriver qu'elle soit nulle. Enfin pour $nh > m$, nous avons

$$(19) \qquad K^{(n)}_{1,\beta} = O(s^{h-1}), \qquad K^{(n)}_{2,\beta} = O(1).$$

Si donc nous ramenons à une seule équation intégrale le système itéré de rang assez grand (f, Chap. I), le noyau de celle-ci est le produit de deux facteurs dont l'un est borné et continu (la continuité se démontre aisément), et l'autre ne dépend que du premier point variable, et ce dernier facteur est sommable. Que sont les seconds membres ? Celui de l'équation qui correspond à (16) est

$$f(X) + \Sigma_{1 \leqq p < n} \left[\int_{\mathcal{D}}^{(m)} K^{(p)}_{1,1}(X, A) f(A)\, dV_A \right.$$
$$\left. + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} K^{(p)}_{1,2}(X, B)\, \varphi(B)\, dS_B \right] = O(s^{h-1}),$$

et il est continu en tout point de $\mathcal{D}$; celui de l'autre équation ne dépend que d'un point de $\mathfrak{S}$, et il est borné et continu; ils sont donc tous deux sommables, et il en est de même pour le second membre de l'équation unique en laquelle ce système est transformable. Donc on peut employer pour cette équation unique les séries de Fredholm; par suite la théorie de Fredholm est applicable au système itéré; cette théorie est donc applicable aussi au système [(16), (17)], comme nous voulions le démontrer.

On constate en outre que, si ce système d'équations est compatible, $\rho(X)$ est continu en tout point de $\mathcal{D}$, et vaut $O(s^{h-1})$, et σ est partout continu. La fonction u définie par (14) remplit donc bien les conditions exigées.

6. Cas d'équivalence. — Il est douteux que le système [(14), (16), (17)] équivaille aux conditions (13) et (4). Tout ce que nous savons, c'est qu'à tout système de fonctions ρ et σ qui remplissent les conditions (16) et (17), correspond par la relation (14) une fonction u qui remplit les conditions (13) et (4). Mais d'une part il est douteux que toute fonction u qui remplit ces conditions puisse se mettre sous la forme (14); d'autre part il est douteux que, dans certains cas, il n'existe pas deux systèmes de fonctions ρ et σ, auxquels correspond la même fonction u.

Cependant l'équivalence a lieu dans un cas fort important, que nous allons exposer. Si les fonctions $c - g^2$ et $-\varkappa$ sont négatives en tous les points où elles sont définies, des raisonnements bien connus [1] prouvent qu'il n'y a pas deux fonctions u distinctes qui remplissent les conditions (13) et (4). Montrons maintenant que, *les opérations $\mathcal{F}$ et Θ étant données, si g est assez grand, le système* [(16), (17)] *est compatible quels que soient f et φ*; il n'y a donc alors qu'un seul système de fonctions ρ et σ, puisque la théorie de Fredholm s'applique. Pour établir cela, prouvons d'abord que si g est assez grand,

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} |K_{1,1}(A, \Xi)|\, dV_A \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} |K_{2,1}(B, \Xi)|\, dS_B$$

sont aussi petits qu'on veut. Pour l'intégrale d'ordre m, cela résulte

(1) Ces raisonnements reposent sur ce que la solution du problème homogène ne peut atteindre ni maximum positif ni minimum négatif. Cela a lieu si $c - g^2$ et $-\varkappa$ sont $\leqq 0$, mais non simultanément identiquement nuls. Pour les références, *voir* Chapitre I, paragraphe **2**.

des limitations (11) : dans le champ $L\sqrt{g} < 1$, nous avons pour $K_{1,1}$ une limitation indépendante de g, donc l'intégrale étendue à ce champ tend uniformément vers zéro avec g^{-1}; dans le champ $L\sqrt{g} > 1$, nous voyons d'après (11) que $K_{1,1}$ vaut $O(g^m)\, e^{-\nu\sqrt{g}}$, résultat infiniment petit avec g^{-1}; l'intégrale étendue à ce champ est donc infiniment petite, elle aussi. Même raisonnement pour l'intégrale d'ordre $m-1$, en nous servant des limitations (12) et du lemme énoncé plus haut (§ 5). Si donc g est assez grand pour que ces deux intégrales soient inférieures à un nombre fixe inférieur à *un demi*, les séries $\Sigma_n s^{1-h} K_{1,\alpha}^{(n)}(X, \Xi)$ et $\Sigma_n K_{2,\alpha}^{(n)}(Y, \Xi)$ convergent uniformément à partir du plus petit rang n tel que nh soit $> m$. Donc alors le système [(16), (17)] est compatible, comme nous l'avions annoncé. *Si maintenant* χ *est partout positif* ([1]), *et si* g *est assez grand pour que* $c - g^2$ *soit partout négatif et pour que le système* [(16), (17)] *soit compatible quels que soient* f *et* φ, *il y a équivalence entre le système* [(14), (16), (17)] *et les conditions* (13) et (4).

On a dans ce cas des expressions

$$\rho(X) = f(X) - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathcal{K}_{1,1}(X, A)\, f(A)\, dV_A - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathcal{K}_{1,2}(X, B)\, \varphi(B)\, dS_B,$$

$$\sigma(Y) = \varphi(Y) - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathcal{K}_{2,1}(Y, A)\, f(A)\, dV_A - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathcal{K}_{2,2}(Y, B)\, \varphi(B)\, dS_B,$$

où les noyaux $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}$, qui résultent de ce qui précède, admettent les limitations

$$\mathcal{K}_{1,\alpha} = O(L^{h-m} + s^{h-1} L^{1+h-m}), \qquad \mathcal{K}_{2,\alpha} = O(L^{1+h-m}),$$

et satisfont aux identités

$$\mathcal{K}_{1,2}(X, B) = -\mathcal{K}_{1,1}(X, B), \qquad \mathcal{K}_{2,2}(Y, B) = -\mathcal{K}_{2,1}(Y, B).$$

Nous en déduisons

$$(20) \qquad u(X) = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\, f(A)\, dV_A + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, B)\, \varphi(B)\, dS_B,$$

([1]) Ou nul.

avec

$$(21) \qquad G(X, \Xi) = H(X, \Xi) - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} H(X, A)\,\mathcal{K}_{1,1}(A, \Xi)\,dV_A + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H(X, B)\,\mathcal{K}_{2,1}(B, \Xi)\,dS_B.$$

La fonction G ainsi définie se nomme la *fonction de Green* relative aux opérations $\mathcal{F} - g^2 \times (\ldots)$ et Θ. On peut vérifier les propriétés

$$(22) \qquad \mathcal{F}\,G(X, \Xi) - g^2\,G(X, \Xi) = 0 \qquad (\text{quand } X \text{ appartient à } \mathcal{D} - \Xi),$$

$$(23) \qquad \Theta\,G(Y, \Xi) = 0 \qquad (\text{quand } Y \text{ appartient à } \mathcal{S} - \Xi).$$

De plus, si X et Ξ tendent vers un même point de $\mathcal{D}$, G devient infini comme une solution fondamentale; enfin, en regardant g comme fixe, on a

$$(24) \qquad G \rightleftharpoons \begin{cases} O(L^{2-m}) & (m > 2), \\ O[\log(2\Lambda) - \log L] & (m = 2), \end{cases}$$

Λ étant la longueur de la plus grande corde de $\mathcal{S}$.

7. Deuxième système d'équations intégrales. — D'après le paragraphe précédent, quelles que soient les opérations données $\mathcal{F}$ et Θ (remplissant les conditions du paragraphe 1), nous savons trouver des fonctions continues $c_1(X)$ et $\varkappa_1(Y)$ telles que le problème relatif aux opérations $\mathcal{F} - c_1 \times (\ldots)$ et $\Theta - \varkappa_1 \times (\ldots)$ soit compatible quelles que soient les fonctions continues assignées comme résultats de ces opérations; en outre, ce dernier problème se résout par la formule (20), au moyen d'une fonction de Green G, que nous savons construire. Il n'en faut pas plus pour traiter le problème du paragraphe 1. En effet les conditions (3) et (4) peuvent s'écrire

$$\mathcal{F}u - c_1 u = f - c_1 u,$$
$$\Theta u - \varkappa_1 u = \varphi - \varkappa_1 u,$$

et, puisque u doit être continu dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, *elles équivalent à l'équation intégrale*

$$(25) \qquad u(X) = \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\,[c_1(A)\,u(A) - f(A)]\,dV_A + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, B)\,[\varphi(B) - \varkappa_1(B)\,u(B)]\,dS_B.$$

Posons $v(Y) = u(Y)$, quel que soit Y sur $\mathfrak{S}$; soit encore

$$F(X) = -\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} G(X, A) f(A)\, dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G(X, B)\, \varphi(B)\, dS_B.$$

L'équation (25) peut être remplacée par le système

$$u(X) - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} G(X, A)\, c_1(A)\, u(A)\, dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G(X, B)\, \varkappa_1(B)\, v(B)\, dS_B = F(X),$$

$$v(Y) - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} G(Y, A)\, c_1(A)\, u(A)\, dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G(Y, B)\, \varkappa_1(B)\, v(B)\, dS_B = F(Y),$$

auquel s'appliquent, si l'on veut, les raisonnements du paragraphe **5**; plus simplement, on peut ici raisonner comme dans un Mémoire antérieur (*f*, Chap. I, § **2** et **3**). Donc *cette équation* (25) *est une équation de Fredholm.*

Comme elle équivaut à notre problème, on voit qu'*ou bien le problème homogène n'admet que la solution zéro, et alors le problème non homogène est compatible quels que soient f et φ; ou bien le problème homogène admet des solutions non identiquement nulles, qui se déduisent d'un nombre fini p de solutions linéairement indépendantes, et alors le problème non homogène n'est compatible que moyennant p conditions nécessaires et suffisantes* dont le type est bien connu.

8. Compléments possibles de cette étude. — Ainsi, en employant uniquement des équations de Fredholm, nous avons résolu et discuté le problème du paragraphe **1**. La méthode suivie au paragraphe précédent permet d'étendre le résultat aux problèmes plus généraux traités dans les Mémoires cités (*j* et *n*; *voir* aussi les Notes citées dans l'Introduction); c'est d'ailleurs la méthode suivie dans l'un d'eux (*n*). Nos équations de Fredholm permettent aussi de retrouver des résultats antérieurs, relatifs aux dérivées des fonctions de Green et aux dérivées de l'inconnue (*n*, Chap. II, § **14** et suiv.).

Pour trouver des cas où la fonction de Green, $G(X, \Xi)$, est dérivable par rapport aux coordonnées de Ξ, ou bien possède certaines dérivées d'ordre supérieur à *un*, on peut remplacer dans l'expression de H_3 les $a_{\alpha,\beta}(\Xi)$ par les fonctions

$$a^{*}_{\alpha,\beta}(X, \Xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\lambda^{q}}{2\pi^{\frac{m}{2}} L^{\lambda}(X, \Xi)\Gamma(q)} \times \int^{(m)}_{L(\Xi, A) < L(X, \Xi)} a_{\alpha,\beta}(A) L^{\lambda-m}(\Xi, A) \log^{q-1} \frac{L(X, \Xi)}{L(\Xi, A)} dV_A,$$

où λ et q sont des constantes positives; on suppose que, si X et Ξ appartiennent à $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$, les $a_{\alpha,\beta}$ sont définis en tout point de la région $L(\Xi, A) \leqq L(X, \Xi)$. Cette fonction $a^{*}_{\alpha,\beta}$ sera dérivable, par rapport aux coordonnées des deux points, jusqu'à un ordre donné p si l'on prend $\lambda > p$ et $q \geqq p$ (car nous supposons toujours que les $a_{\alpha,\beta}$ sont partout continus). Si λ tend vers zéro, q étant positif et constant, $a^{*}_{\alpha,\beta}(X, \Xi)$ tend vers $a_{\alpha,\beta}(\Xi)$; nous avons donc employé ici une sorte de cas-limite de ce procédé.

Addition. — Travaux publiés depuis la rédaction de ce Mémoire :
C. R. Acad. Sc., t. **207**, 1938, p. 1351 à 1354; t. **208**, 1939, p. 1462 à 1465; Alfred Liénard, *J. Éc. Polytech.*, 3e série, 1938, p. 35 à 158 et 177 à 226; 1939, p. 55 à 84, avec suite non encore parue; Mauro Picone, *Rendiconti Accad. Lincei*, 6e série, t. **28**, 1938, p. 331 à 338.