JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANDRÉ WEIL

Généralisation des fonctions abéliennes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 47-87.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_47_0>

Généralisation des fonctions abéliennes,

PAR ANDRÉ WEIL.

Te sequor humani generis decus, inque tuis nunc
Ficta pedum pono pressis vestigia signis
Non ita certandi cupidus quod propter amorem
Quod te imitari aveo; quid enim contendat hirundo
Cycnis, aut quidnam tremulis facere artubus haedi
Consimile in cursu possint et fortis equi vis?

Quelques-uns des plus brillants progrès de la mathématique moderne ont été accomplis, comme on sait, en arithmétique, en théorie des variétés algébriques, et en topologie. Or, non seulement ces domaines sont unis l'un à l'autre par d'étroits liens de parenté, et par des analogies qu'on n'a pas fini d'explorer et d'exploiter, mais encore les progrès réalisés sont marqués pour la plupart d'une empreinte commune, à savoir un caractère essentiellement *abélien*. Qu'il s'agisse du corps de classes, d'intégrales multiples sur les variétés algébriques, ou des propriétés d'homologie d'un espace, ce sont partout des groupes commutatifs qu'on fait intervenir, et c'est le plus souvent cette restriction qui entraîne le succès. Peut-être est-ce dans la dualité qu'il faut en chercher la raison, de sorte qu'au centre de toutes ces recherches l'on devrait placer la théorie de Pontrjagin. Déjà l'œuvre de Riemann sur les fonctions algébriques est profondément marquée de ce caractère, et ce n'est pas un effet du hasard que les fonctions abéliennes portent le même nom que les groupes abéliens, puisque la division de ces fonctions conduit (comme l'ont aperçu Abel, Galois et Jacobi) à des équations abéliennes, et que leur principal usage algébrique est de servir à engendrer et étudier les extensions relativement abéliennes des corps de fonctions algébriques d'une variable. Sans vouloir donner d'autres exemples, qu'il me soit permis de rappeler la principale contribution apportée à la topologie moderne par l'illustre géomètre à qui est dédié ce volume, la célèbre « Note sur quelques applications de l'indice de Kronecker » (1); l'objet de cette Note, ce sont bien des propriétés d'homologie, donc abéliennes.

Cette « mathématique abélienne » n'est pas encore achevée, il s'en faut : il lui manque par exemple la notion générale d'intégrale multiple, qui, lorsqu'elle sera trouvée, sera peut-être son principal outil. Mais elle constitue dès maintenant un corps de doctrine imposant, auquel sont consacrés de considérables Traités. En revanche, dès qu'on veut, dans les domaines énumérés plus haut, aller au delà, on se trouve enveloppé de ténèbres; à la vérité on a déjà commencé l'étude de problèmes spéciaux, que je ne m'essayerai pas à énumérer; en topologie surtout, des questions relatives à l'homotopie ont été abordées, non sans succès. Mais il y a place encore pour bien des recherches avant qu'on puisse espérer atteindre une vue d'ensemble; et c'est pourquoi j'ai entrepris d'examiner, du point de vue « non abélien », la théorie des fonctions algébriques d'une variable, avec l'espoir aussi qu'une généralisation des fonctions thêta soit susceptible de fournir à l'arithmétique un instrument puissant (2); le mémoire que voici, respectueusement offert en hommage à mon maître Jacques Hadamard, se propose seulement d'exposer un premier

(1) Appendice à J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, 2e édition, tome II, Hermann, Paris (1910), p. 437-477. La dernière section en est reproduite dans *Selecta* (Jubilé scientifique de M. Jacques Hadamard), Gauthier-Villars, Paris (1935), p. 271-275; tous les admirateurs de J. Hadamard auront déploré qu'on n'ait pu insérer dans ce beau volume la Note tout entière.

(2) Que la théorie « abélienne » de ces fonctions soit loin d'être achevée, c'est ce qui est démontré par les importantes découvertes de Siegel sur les fonctions modulaires de genre quelconque [*Ueber die analytische Theorie der quadratischen Formen* (*Ann. of Maths.*, vol. 36, 1935, p. 527), en particulier chap. III]. Si Siegel, en apparence, sort du domaine abélien, c'est qu'il aborde l'étude du groupe des automorphismes du groupe de Betti d'une surface de Riemann de genre p; mais le groupe de Poincaré n'intervient pas.

résultat atteint dans cette voie. La première partie est préliminaire, la deuxième contient le résultat dont il s'agit; la troisième en esquisse une application et pose quelques problèmes nouveaux.

CHAPITRE I.

LA NOTION DE DIVISEUR ET LE THÉORÈME GÉNÉRAL DE RIEMANN-ROCH.

1. Il s'agira ici d'un corps k de fonctions algébriques d'une variable, au sens classique, c'est-à-dire que le corps des constantes est celui des nombres complexes; k peut être considéré comme le corps des fonctions rationnelles sur une courbe algébrique. On désignera par $\mathfrak{r}$ la surface de Riemann de k, et par p son genre; les cas $p = 0$ et $p = 1$ ne sont pas exclus.

P étant un point quelconque de $\mathfrak{r}$, on désignera toujours par t une uniformisante locale de $\mathfrak{r}$ au voisinage de P, c'est-à-dire une variable qui représente conformément un voisinage de P dans $\mathfrak{r}$ sur un voisinage de $t = 0$ dans le plan de la variable complexe t. Sur $\mathfrak{r}$, on se donne une fois pour toutes une *signature* (finie), c'est-à-dire qu'à tout point P de $\mathfrak{r}$ on fait correspondre un entier $n = n(\mathrm{P}) \geqq 1$, de telle sorte que n soit égal à 1 partout sauf au plus en un nombre fini de points $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_l$; on posera $n_\mu = n(\mathrm{P}_\mu)$. En un point P quelconque, on posera toujours $\tau = t^{1/n}$, de sorte qu'on aura $\tau = t$ partout sauf aux points P_μ, où l'on aura $\tau = t^{1/n_\mu}$. On n'aura à considérer que des fonctions, uniformes ou non sur $\mathfrak{r}$, mais qui puissent être prolongées analytiquement suivant tout chemin sur $\mathfrak{r}$ sans qu'on rencontre jamais d'autres singularités que des pôles et des points critiques algébriques, et telles de plus qu'au voisinage de tout point P chacune de leurs branches soit une fonction méromorphe de la variable τ correspondante: ces fonctions ne pourront donc avoir d'autres points critiques que les P_μ, et auront en P_μ un ordre de ramification égal à n_μ ou à un diviseur de n_μ; elles ne sont autres que les fonctions uniformes et méromorphes sur une surface de Riemann $\mathfrak{R}$ à une infinité de feuillets, portée par $\mathfrak{r}$, et qu'on définit de la manière suivante. Soit $\mathfrak{r}'$ la surface $\mathfrak{r}$ après qu'on en a enlevé (si $l > 0$) les points P_μ : son groupe de Poincaré (ou groupe fondamental) peut être engendré, comme on sait, par $2p$ éléments A_i, $B_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ correpondant aux rétrosections sur $\mathfrak{r}$, et l éléments correspondant aux points P_μ et que nous noterons C_μ, ces éléments étant liés par la seule relation

$$R(A, B, C,) = A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1} C_1 C_2 \ldots C_l = 1.$$

On sait qu'il y a une correspondance biunivoque entre les surfaces de recouvrement d'une surface donnée et les sous-groupes de son groupe de Poincaré : soit en particulier $\mathfrak{R}'$ la surface de recouvrement de $\mathfrak{r}'$ qui correspond au plus petit sous-groupe invariant contenant les l éléments $C_\mu^{n_\mu}$; à tout chemin fermé sur $\mathfrak{r}'$, tournant n_μ fois autour de P_μ dans un voisinage suffisamment petit de P_μ, correspondra alors un chemin fermé sur $\mathfrak{R}'$, de sorte que P_μ est pour $\mathfrak{R}'$ un point de ramification d'ordre n_μ, $\mathfrak{R}'$ se composant, au voisinage de P_μ, d'une infinité de cercles à n_μ feuillets, pointés en leur centre; on obtient alors la surface $\mathfrak{R}$ en adjoignant à chacun de ces cercles un point correspondant à P_μ, et cela pour $\mu = 1, 2, \ldots, l$. La surface $\mathfrak{R}$ ainsi définie est simplement connexe; si $l = 0$ elle n'est autre que la surface universelle de recouvrement de $\mathfrak{r}$; la variable ω qui la représente conformément sur le cercle unité est ce qu'on appelle, dans la théorie des fonctions automorphes, l'uniformisante principale de $\mathfrak{r}$ relative à la signature (P_μ, n_μ); quant à la variable τ définie plus haut, on peut la considérer comme une uniformisante locale de $\mathfrak{R}$ au voisinage d'un point P de $\mathfrak{r}$; en particulier, si ω_0 est l'une des valeurs prises par ω en un point P, on pourra prendre pour uniformisante locale $\tau = \omega - \omega_0$.

$\mathfrak{R}$ possède, comme on sait, un groupe $\mathfrak{G}$ de transformations en elle-même, chaque transformation de $\mathfrak{G}$ faisant correspondre à tout point de $\mathfrak{R}$ un point de $\mathfrak{R}$ porté par le même point de $\mathfrak{r}$; si l'on se sert de la représentation de $\mathfrak{R}$ sur le cercle unité au moyen de l'uniformisante ω, $\mathfrak{G}$ apparaît comme un groupe fuchsien; $\mathfrak{G}$ peut être considéré comme engendré par les $2p + l$ éléments A_i, B_i, C_μ, ceux-ci étant liés par les $l + 1$ relations :

$$R(A, B, C) = 1; \qquad C_\mu^{n_\mu} = 1 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, l).$$

Considéré comme groupe fuchsien sur ω, $\mathfrak{G}$ ne contient pas de substitution parabolique; il n'en aurait pas été de même si nous avions admis pour $\mathfrak{R}$ des ramifications d'ordre infini.

On désignera par K *le corps des fonctions uniformes et partout méromorphes sur* $\mathfrak{R}$: comme il a été dit, on aura principalement à considérer des fonctions de K; celles-ci peuvent être considérées aussi comme des fonctions de ω, méromorphes dans tout l'intérieur du cercle unité; parmi elles, les fonctions de k sont les fonctions fuchsiennes de ω, invariantes par le groupe $\mathfrak{G}$. On aura à considérer aussi des matrices sur k et sur K : ce seront les matrices dont les éléments appartiennent à k ou respectivement à K.

Soit de plus di une différentielle, supposée donnée une fois pour toutes, du corps k, c'est-à-dire une expression $dj = y\,dx$, x et y étant deux éléments de k, x non constant, y non identiquement nul; par une différentielle de k ou respectivement de K, on entendra toute expression $f.dj$, f appartenant à k ou à K; de même, si F est une matrice sur k ou sur K, $\mathrm{F}.dj$ sera appelée une matrice différentielle sur k ou sur K. Une différentielle $f.dj$ sera dite *finie* en un point de $\mathfrak{R}$ si $f.dj/d\tau$ y est finie (et par conséquent holomorphe), τ étant l'uniformisante locale correspondante; une matrice, ou une matrice différentielle, sera dite finie en un point de $\mathfrak{R}$, si chacun de ses éléments y est fini. Plus généralement, on peut avoir à considérer dans certains cas des expressions de la forme $f(dj)^a$ ou $\mathrm{F}(dj)^a$, a étant quelconque (mais généralement entier) : une expression $\mathrm{F}(dj)^a$ sera dite *finie* en un point de $\mathfrak{R}$ si $\mathrm{F}(dj/d\tau)^a$ y est holomorphe. $d\omega$ est une différentielle de K, car $d\omega/dj$ appartient à K; elle est évidemment partout finie.

Soit maintenant S un élément quelconque du groupe $\mathfrak{G}$; soit $\omega' = \mathrm{S}(\omega)$ la substitution fuchsienne correspondante. $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\omega)$ désignant une fonction, une matrice, une différentielle ou une matrice différentielle sur K, $\mathrm{F}[\mathrm{S}(\omega)]$ sera encore de même nature; nous poserons :

$$\mathrm{F}^{\mathrm{S}} = \mathrm{F}[\mathrm{S}(\omega)]$$

de sorte qu'on aura en particulier $\omega^{\mathrm{S}} = \mathrm{S}(\omega)$. On aura toujours :

$$(\mathrm{F}^{\mathrm{S}})^{\mathrm{T}} = \mathrm{F}^{\mathrm{ST}}.$$

Les transformations $(\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F}^{\mathrm{S}})$ forment évidemment un groupe d'automorphismes de K en lui-même, qui laisse invariants les éléments de k

et ceux-là seulement. Si l'on interprète les éléments S de $\mathfrak{G}$ comme des chemins fermés tracés sur $\mathfrak{r}'$ à partir d'une origine fixe O, F^S n'est pas autre chose que la fonction (ou la matrice) déduite de F par prolongement analytique le long du chemin S. Nous supposons les notations choisies de telle manière que C_μ corresponde, dans cette interprétation, à un lacet d'origine O, tournant autour de P_μ dans le sens positif.

2. Soient P un point de $\mathfrak{r}$, et $n = n(P)$; soient t et $\tau = t^{1/n}$ les uniformisantes locales de $\mathfrak{r}$ et de $\mathfrak{R}$. On désignera par k_P le corps des fonctions de t, méromorphes dans un voisinage de $t = 0$. Le corps K_P des fonctions de τ, méromorphes dans un voisinage de $\tau = 0$, est évidemment une extension algébrique de degré n de k_P, $K_P = k_P(t^{1/n})$. Une expression $f.dt$ sera appelée une différentielle de k_P, ou de K_P, suivant que f est dans k_P ou dans K_P; $d\tau = (\tau^{1-n}/n)\,dt$ est une différentielle de K_P. On aura à considérer aussi des matrices, et des matrices différentielles, sur k_P et sur K_P.

Nous poserons $\zeta = e^{2\pi i/n}$, et, si $F(\tau)$ appartient à K_P, $F(\zeta\tau) = F^C$ et plus généralement $F(\zeta^\nu\tau) = F^{C^\nu}$, donc en particulier $\tau^{C^\nu} = \zeta^\nu\tau$. Les n transformations $(F \rightarrow F^{C^\nu})$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ forment le groupe de Galois de K_P par rapport à k_P : elles laissent invariants les F qui appartiennent à k_P, et ceux-là seulement.

On dira qu'une matrice est de degré r si elle a r lignes et r colonnes; la matrice unité de degré r sera notée $1_r = \|\delta_{ij}\|$, en posant suivant l'usage $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$. Pour qu'une matrice M de degré r, sur un corps quelconque, possède une inverse M^{-1} dans ce même corps, il faut et il suffit, comme on sait, que son déterminant $|M|$ soit $\neq 0$: on dira alors qu'elle est *régulière;* les matrices régulières de degré r sur un corps forment un groupe multiplicatif. Soit maintenant F une matrice régulière de degré r sur le corps K_P : on appellera *indice* de F, et l'on notera $i(F)$, l'exposant ρ de t dans le premier terme du développement $|F| = at^\rho + \ldots$ du déterminant de F suivant les puissances (fractionnaires) croissantes de t; c'est évidemment un multiple entier de $1/n$; et l'on a, si F, F′ sont deux matrices régulières de degré r sur K_P, $i(FF') = i(F) + i(F')$. L'indice $i(F)$ peut aussi être défini comme le nombre ρ tel que

$\log|F| - \rho \log t$ soit holomorphe en τ, ou que $d(\log|F|) - \rho . dt/t$ soit fini pour $\tau = 0$. *Si nous convenons de noter par* $\oint_P$ *une intégrale prise le long d'un contour infiniment petit entourant le point $t = 0$ dans le plan de la variable t* (de sorte qu'on ait $\oint_P dt/t = 2\pi i$, et $\oint_P f(\tau)\,dt = 0$ si f est holomorphe en τ), on pourra donc écrire

$$i(F) = \frac{1}{2\pi i}\oint_P d(\log|F|).$$

Si de plus on note, suivant l'usage, par $Sp(M)$ la *trace* d'une matrice M (somme des éléments de la diagonale principale), on sait (et l'on vérifie facilement) que $d(\log|F|) = Sp(F^{-1}\,dF)$, et par conséquent :

$$i(F) = \frac{1}{2\pi i}\oint_P d(\log|F|) = \frac{1}{2\pi i}\oint_P Sp(F^{-1}\,dF).$$

Une matrice régulière de degré r sur K_p sera dite *unitaire* (¹) si cette matrice U et son inverse U^{-1} sont holomorphes en τ au voisinage de $\tau = 0$: il faut et il suffit pour cela que U soit finie en $\tau = 0$ et que $i(U) = 0$. On sait (²) que toute matrice F régulière de degré r sur K_P peut être mise sous la forme

$$F = U_1 \Delta U,$$

U_1 et U étant des matrices unitaires et Δ étant une matrice de la forme

$$\Delta = \|\delta_{ij}\tau^{d_i}\|.$$

D'autre part, on vérifie facilement que toute matrice F de degré r peut être mise sous la forme $F = UF_1$, où F_1 est une matrice qui n'a que des éléments nuls au-dessous de la diagonale principale.

Nous pouvons maintenant définir la notion de *diviseur local.* Supposons d'abord, pour simplifier, que $n(P) = 1$; et soit Θ une matrice

---

(¹) Aucune confusion n'est à craindre ici entre cette notion et celle de substitution unitaire en géométrie hermitienne.

(²) *Voir* par exemple B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, Vol. II, chap. XV, § 106, p. 124 (Springer, Berlin 1931).

régulière de degré r sur $k_{\mathrm{P}} = \mathrm{K}_{\mathrm{P}}$: alors, le *diviseur* (local) Θ sera par définition l'ensemble de toutes les matrices $\mathrm{U}\Theta$, si l'on prend pour U toutes les matrices unitaires de degré r sur K_{P}; autrement dit, un *diviseur local*, de degré r, sera une *classe* (*Nebengruppe*) à gauche dans le groupe des matrices régulières de degré r sur k_{P}, suivant le sous-groupe des matrices unitaires. Dans le cas général, $n(\mathrm{P})$ étant quelconque, nous entendrons encore par *diviseur local* de degré r une classe à gauche dans le groupe des matrices régulières de degré r sur K_{P} suivant le sous-groupe des matrices unitaires, *pourvu que cette classe soit invariante par l'automorphisme* C *de* K_{P}; autrement dit, Θ étant une matrice régulière de degré r sur K_{P}, l'ensemble des matrices $\mathrm{U}\Theta$, quand on prend pour U toutes les matrices unitaires de degré r sur K_{P}, sera appelé un diviseur local de degré r *pourvu que* Θ^{C} *appartienne à ce même ensemble*, qui sera appelé alors le diviseur Θ. Puisque $i(\mathrm{U}\Theta) = i(\Theta)$ quelle que soit la matrice unitaire U, toutes les matrices d'un diviseur local ont même indice : celui-ci sera appelé l'*indice du diviseur*. D'après ce qu'on a dit, on peut toujours, Θ étant donné, choisir U de manière que la matrice $\mathrm{U}\Theta$ n'ait que des éléments nuls au-dessous de la diagonale principale : on pourra donc toujours, quand ce sera utile, supposer que la matrice Θ qui définit un diviseur local est de cette forme. Si Θ définit un diviseur, et si F est une matrice régulière sur k_{P}, $\Theta\mathrm{F}$ définit aussi un diviseur, qui ne change pas si l'on remplace Θ par $\mathrm{U}\Theta$ et ne dépend donc que du diviseur Θ et de F : ce qu'on peut exprimer en disant que les diviseurs locaux admettent le groupe des matrices régulières sur k_{P} comme groupe d'opérateurs à droite.

Soit Θ de degré r définissant un diviseur local, c'est-à-dire que $\Theta^{\mathrm{C}} = \mathrm{V}\Theta$, $\mathrm{V} = \mathrm{V}(\tau)$ étant unitaire; si $\Theta' = \mathrm{U}\Theta$ est une autre matrice du même diviseur, on aura $\Theta'^{\mathrm{C}} = \mathrm{V}'\Theta'$ avec $\mathrm{V}' = \mathrm{U}^{\mathrm{C}}\mathrm{V}\mathrm{U}^{-1}$, d'où en particulier, en faisant $\tau = 0$ et en posant $\mathrm{V}(0) = \mathrm{A}$ et $\mathrm{V}'(0) = \mathrm{A}'$, $\mathrm{A}' = \mathrm{U}(0)\mathrm{A}\mathrm{U}(0)^{-1}$. D'autre part, on a, pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \Theta^{\mathrm{C}^\nu} = \mathrm{V}_\nu\Theta$ avec $\mathrm{V}_0 = 1_r$, $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}$ et en général $\mathrm{V}_{\nu+1} = \mathrm{V}^{\mathrm{C}^\nu}\mathrm{V}_\nu$, d'où $\mathrm{V}_\nu(0) = \mathrm{A}^\nu$, et, pour $\nu = n$, $\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_0 = 1_r$ et $\mathrm{V}_n(0) = \mathrm{A}^n = 1_r$; on sait que dans ces conditions la matrice A peut être ramenée à la forme diagonale par une substitution M, c'est-à-dire que l'on a $\mathrm{A} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{D}\mathrm{M}$, avec D de la forme

$$D = \| \delta_{ij} \zeta^{d_i} \| \qquad (0 \leqq d_1 \leqq d_2 \leqq \ldots \leqq d_r \leqq n-1);$$

les ζ^{d_i} sont les *racines caractéristiques* de la matrice A; puisque, pour toute autre matrice $\Theta' = U'\Theta$ du même diviseur, $A' = U(0)AU(0)^{-1}$, les ζ^{d_i} sont aussi les racines caractéristiques de A'; *elles ne dépendent donc que du diviseur considéré :* on les appellera *les racines caractéristiques du diviseur* Θ. On peut alors, en remplaçant au besoin Θ par $\Theta' = M\Theta$, supposer qu'on a déjà $A = D$, donc $V(0) = D$ et en général $V_\nu(0) = D^\nu$. Cela fait, posons maintenant

$$\overline{\Theta} = \sum_{\nu=0}^{n-1} D^{-\nu}\Theta^{C^\nu} = \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} D^{-\nu} V_\nu\right)\Theta;$$

la matrice $\sum_\nu D^{-\nu} V_\nu$ est holomorphe en τ, et prend pour $\tau = 0$ la valeur $n.1_r$; elle est donc unitaire, et $\overline{\Theta}$ définit le même diviseur que Θ. D'autre part, on a évidemment $\overline{\Theta}^C = D\overline{\Theta}$. En remplaçant Θ par $\overline{\Theta}$, on voit donc qu'*on peut supposer le diviseur considéré défini par une matrice* Θ *telle que* $\Theta^C = D\Theta$.

Nous conviendrons maintenant *une fois pour toutes*, chaque fois qu'on se sera donné r entiers (quelconques) $d_1, d_2, \ldots, d_r$, de leur faire correspondre les matrices

$$D = \| \delta_{ij} \zeta^{d_i} \| \qquad \Delta = \| \delta_{ij} \tau^{d_i} \|,$$

de degré r sur le corps des constantes et sur K_P respectivement. On a $\Delta^C = D\Delta$, et, par suite, si Θ est tel que $\Theta^C = D\Theta$ et si l'on pose $\Theta_0 = \Delta^{-1}\Theta$, $\Theta_0^C = \Theta_0$, c'est-à-dire que Θ_0 est une matrice sur k_P. Nous avons donc démontré que *si un diviseur de degré r possède les racines caractéristiques* $\zeta^{d_i}(i = 1, 2, \ldots, r)$, *il peut être défini au moyen d'une matrice* Θ *de la forme* $\Theta = \Delta\Theta_0$, $\Theta_0 = \Theta_0(t)$ *étant régulière de degré r sur* k_P; réciproquement, toute matrice de cette forme définit évidemment un diviseur. On peut même supposer, comme on a dit, que $0 \leqq d_1 \leqq d_2 \leqq \ldots \leqq d_r \leqq n-1$: le diviseur étant supposé donné, Δ est déterminé d'une manière unique par ces conditions.

Nous conviendrons de même, r' entiers d'_i étant donnés, de poser une fois pour toutes

$$D' = \| \delta_{ij} \zeta^{d'_i} \|, \qquad \Delta' = \| \delta_{ij} \tau^{d'_i} \|.$$

On rencontrera plusieurs fois, par la suite, des matrices $\Psi = \| \psi_{ij}(t) \|$, à r lignes et r' colonnes sur k_P, telles que $\Delta\Psi\Delta'^{-1}$ soit holomorphe en τ pour $\tau = 0$, et il importe de déterminer les matrices Ψ qui satisfont à cette condition. *Supposons* (comme il sera toujours permis de le faire) *que les entiers d_i, d'_j soient tous $\geqq 0$ et $\leqq n - 1$*. On a

$$\Delta\Psi\Delta'^{-1} = \| \psi_{ij}(t)\tau^{d_i - d'_j} \|,$$

et $-n + 1 \leqq d_i - d'_j \leqq n - 1$. On voit alors immédiatement que ψ_{ij} est assujetti à la seule condition d'être holomorphe en t, si $d_i \geqq d'_j$, et doit de plus contenir t en facteur, si $d_i < d'_j$. *La condition nécessaire et suffisante, pour que $\Delta\Psi\Delta'^{-1}$ soit holomorphe en τ, les d_i et d'_j étant $\geqq 0$ e $\leqq n - 1$, est que Ψ soit holomorphe en t, et que de plus $\psi_{ij}(0) = 0$ chaque fois que $d_i < d'_j$.*

3. Nous définirons maintenant les *diviseurs sur* $\mathfrak{r}$, *relatifs à la signature donnée* $n(P)$:

On dira qu'on a défini un *diviseur de degré r sur* $\mathfrak{r}$ (relatif à la signature donnée) si à tout point P de $\mathfrak{r}$ on a fait correspondre un diviseur local $\Theta = \Theta_P(\tau)$ de degré r, de telle sorte que $\Theta_P = 1_r$ partout sauf au plus pour un nombre fini de points P de $\mathfrak{r}$. Le nombre $\sum_P i(\Theta_P)$ sera appelé l'*indice total* du diviseur Θ, et se notera $I(\Theta)$.

Nous allons maintenant résoudre le problème suivant. Donnons-nous deux diviseurs Θ, Θ' sur $\mathfrak{r}$, de degrés respectifs r, r'; on se propose de rechercher les matrices Φ à r lignes et r' colonnes sur k, telles qu'en tout point P la matrice $\Theta\Phi\Theta'^{-1}$ soit finie (c'est-à-dire holomorphe par rapport à l'uniformisante τ correspondant à P); si $r = r' = 1$, le problème consiste à rechercher les fonctions de k qui admettent sur $\mathfrak{r}$ des pôles et des zéros donnés, et le nombre des fonctions linéairement indépendantes qui satisfont à ces conditions est donné par le théorème de Riemann-Roch; de même notre problème va nous amener à la généralisation de ce théorème dont nous avons besoin. D'après ce qu'on a vu au paragraphe 2, on peut, en chaque point P, supposer que Θ est de la forme $\Delta\Theta_0$, avec $\Delta = \|\delta_{ij}\tau^{d_i}\|$, $0 \leqq d_i \leqq n-1$, et $\Theta_0 = \|\theta_{ij}(t)\|$ étant régulière sur k_P; on posera de plus $\Theta_0^{-1} = \|\vartheta_{ij}(t)\|$; de même on peut supposer que

$$\Theta' = \Delta'\Theta'_0, \qquad \Delta' = \|\delta_{ij}\tau^{d'_i}\|, \qquad 0 \leqq d'_i \leqq n-1,$$
$$\Theta'_0 = \|\theta'_{ij}(t)\|, \qquad \Theta'^{-1}_0 = \|\vartheta'_{ij}(t)\|.$$

Soit alors $\Phi = \|\varphi_{ij}\|$; au point P, on aura

$$\Theta\Phi\Theta'^{-1} = \left\| \sum_{i,j} \theta_{hi}\varphi_{ij}\vartheta'_{jk}\tau^{d_h - d'_k} \right\| = \|\psi_{hk}\tau^{d_h - d'_k}\|$$

à condition de poser $\Psi = \Theta_0\Phi\Theta'^{-1}_0$, et $\Psi = \|\psi_{hk}\|$; $\Delta\Psi\Delta'^{-1}$ devra être holomorphe en τ pour $\tau = 0$, donc en tout cas Ψ devra être holomorphe en t, de sorte que les éléments φ_{ik} de $\Phi = \Theta_0^{-1}\Psi\Theta'_0$ ne devront avoir en P que des pôles d'ordre au plus égal à la somme des ordres de ceux des ϑ_{ij} et des θ'_{ij} qui ont en P un pôle de l'ordre le plus élevé. Faisons correspondre à tout point P un entier $b = b(\mathrm{P})$ qui soit au moins égal à cette dernière somme, en prenant $b = 0$ en tout point où $\Theta = 1_r$ et $\Theta' = 1_{r'}$, c'est-à-dire partout sauf en un nombre fini de points de $\mathfrak{r}$: alors, les fonctions φ_{ij} doivent être recherchées parmi les fonctions φ qui ont en tout point P un pôle d'ordre $b(\mathrm{P})$ au plus; si l'on a pris les $b(\mathrm{P})$ assez grands pour que $\sum_{\mathrm{P}} b(\mathrm{P}) > 2p - 2$ (la somme du premier membre étant étendue à tous les points de $\mathfrak{r}$), on sait, d'après le théorème ordinaire de Riemann-Roch, que ces fonctions dépendent linéairement de $(\Sigma b) - p + 1$ paramètres exactement (ce résultat restant valable encore pour $p = 0$ et $p = 1$). D'autre part, nous ferons correspondre à tout point P un entier $a = a(\mathrm{P})$ tel que les θ_{ij}, ϑ'_{ij} aient en $t = 0$ un pôle d'ordre a au plus, en prenant encore $a(\mathrm{P}) = 0$ partout où $\Theta = 1_r$, $\Theta' = 1_{r'}$.

Les φ_{ij} étant pris désormais parmi les fonctions φ, la matrice Φ dépend linéairement de $rr'[(\Sigma b) - p + 1]$ paramètres, assujettis à des relations qui expriment qu'en chaque point P les fonctions ψ_{hk} sont holomorphes, et même s'annulent si $d_h < d'_k$. Les fonctions ψ_{hk} ont en P, d'après les hypothèses faites, un pôle d'ordre au plus égal à $2a+b$; il suffit donc d'écrire que le résidu en P de $t^\rho \psi_{hk}(t)$ est nul pour $0 \leqq \rho \leqq 2a+b-1$, et aussi pour $\rho = -1$ si $d_h < d'_k$; en notant par Res_P le résidu en P, nous avons donc les équations

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{Res}_\mathrm{P}\, t^\rho \left[\sum_{i,j} \theta_{hi}\varphi_{ij}\mathfrak{S}'_{jk}\right] = 0$$

$(h = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, r';\ \rho = 0, 1, 2, \ldots, 2a+b-1$ et $= -1$ si $d_h < d'_k)$.

Si $m = m(\mathrm{P})$ désigne le nombre de couples d'indices (h, k) tels que $d_h < d'_k$, on a ainsi, en chaque point P, $rr'(2a+b)+m$ équations, donc en tout un système de $\sum_\mathrm{P} [rr'(2a+b)+m]$ équations linéaires et homogènes à $rr'[(\Sigma b)-p+1]$ inconnues. Reste à déterminer le nombre exact de ces équations qui sont linéairement indépendantes, ou, ce qui revient au même, le nombre de relations linéaires qui subsistent entre leurs premiers membres. Une telle relation est un système de constantes $C_{hk}^{(\mathrm{P},\rho)}$ telles qu'on ait identiquement, quelles que soient les fonctions φ_{ij} prises dans la famille φ

$$\sum_{i,j}\left[\sum_\mathrm{P} \mathrm{Res}_\mathrm{P}\left(\sum_{h,k,\rho} C_{hk}^{(\mathrm{P},\rho)} t^\rho \theta_{hi}\varphi_{ij}\mathfrak{S}'_{jk}\right)\right] = 0.$$

Posons alors

$$\mathrm{R}_{kh}^{(\mathrm{P})}(t) = \sum_\rho C_{hk}^{(\mathrm{P},\rho)} t^\rho,$$

ce sont des fractions rationnelles en t, ayant au plus (et seulement si $d_h < d'_k$) un pôle simple en $t = 0$. On devra alors avoir, identiquement, pour toute fonction φ qui a en tout point P un pôle d'ordre $b(\mathrm{P})$ au plus

$$\sum_\mathrm{P} \mathrm{Res}_\mathrm{P}\left(\sum_{k,h} \mathfrak{S}'_{jk}\mathrm{R}_{kh}^{(\mathrm{P})}\theta_{hi}\right)\varphi = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq r;\ 1 \leqq j \leqq r').$$

Nous pouvons maintenant faire usage d'un théorème très important de la théorie des fonctions algébriques, mais qui n'est pas toujours indiqué explicitement dans les traités classiques, et dont voici l'énoncé avec les notations introduites plus haut. Si à tout point P de $\mathfrak{r}$ on a fait correspondre une fonction $\mathrm{F} = \mathrm{F}_\mathrm{P}(t)$, méromorphe en t pour

$t = 0$, la condition nécessaire et suffisante pour que la relation

$$\sum_{P} \mathrm{Res}_P[F_P(t)\varphi] = 0$$

soit identiquement vérifiée par toutes les fonctions φ ayant en tout point P un pôle d'ordre $b = b(P)$ au plus, est qu'il existe une différentielle dI du corps k, satisfaisant en tout P à la congruence $dI/dt \equiv F_P(t)\,(\mathrm{mod.}\ t^b)$. La condition est évidemment suffisante, car on a, si ces congruences sont satisfaites :

$$\mathrm{Res}_P(F_P\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\oint_P \varphi\, dI,$$

et l'on sait que la somme des « périodes logarithmiques » $\oint_P dj$ d'une intégrale abélienne $\int dj$ est toujours nulle. Montrons qu'elle est nécessaire : en effet, si F a en P un pôle d'ordre $\leqq c = c(P)$, $\mathrm{Res}_P(F\varphi)$ est une forme linéaire par rapport aux coefficients de $t^{-b}, t^{-b+1}, \ldots, t^{c-1}$ dans le développement de φ en P, et la relation

$$\sum_{P} \mathrm{Res}_P(F\varphi) = 0$$

est une relation linéaire entre $\sum\limits_{P}(b+c)$ quantités qui sont des coefficients de développements de φ; parmi ces quantités, il y en a (puisque par hypothèse $\Sigma b > 2p-2$) exactement $(\Sigma b) - p + 1$ indépendantes, donc il y a entre elles exactement $(\Sigma c) - p + 1$ relations, qui peuvent évidemment toutes se mettre sous la forme ci-dessus. Or il y a précisément ce nombre de différentielles dI sur k telles que dI/dt ait en chaque P un pôle d'ordre $c(P)$ au plus : car dI sera de la forme $f.dj$, dj étant une différentielle fixe de k qui aura d pôles et par suite $2p-2+d$ zéros, et f étant une fonction de k qui devra avoir d zéros donnés et $(\Sigma c) + 2p - 2 + d$ pôles donnés, donc dépendra de $(\Sigma c) + p - 1$ paramètres d'après le théorème de Riemann-Roch. De plus on ne peut avoir $dI/dt \equiv 0\,(\mathrm{mod.}\ t^b)$ en tout P, car alors dI n'aurait pas de pôle et aurait $\Sigma b > 2p-2$ zéros sur r. Donc les relations $\sum \oint_P \varphi\, dI = 0$

sont au nombre de $(\Sigma c)+p-1$ et sont indépendantes, de sorte qu'on a bien là toutes les relations dont il s'agit.

Appliquant ce théorème à la question qui nous occupe, nous voyons qu'à tout système de constantes $C_{hk}^{(P,\rho)}$ ayant les propriétés indiquées correspondra une matrice différentielle dI et une seule, à r' lignes et r colonnes sur k, telle qu'on ait en tout point P

$$\frac{dI}{dt} \equiv \left\| \sum_{h,k} \mathfrak{I}'_{jk} R_{kh}^{(P)} \theta_{hi} \right\| \qquad (\text{mod.}\, t^b);$$

on a donc, en désignant par $R = R_P(t)$ la matrice $\|R_{kh}^{(P)}\|$, et par M une matrice holomorphe en P

$$\frac{dI}{dt} = \Theta_0'^{-1} R \Theta_0 + t^b M,$$

d'où, en multipliant par $dt/d\tau = n\tau^{n-1}$, puis à gauche par Θ' et à droite par Θ^{-1}

$$\Theta' \frac{dI}{d\tau} \Theta^{-1} = n\tau^{n-1} \Delta'(R + \Theta_0' M \Theta_0^{-1} t^b)\Delta^{-1};$$

mais, d'après la manière dont on a choisi b (au moins égal à la somme des ordres des pôles en P de tout élément de Θ_0' et de tout élément de Θ_0^{-1}), $N = \Theta_0' M \Theta_0^{-1} t^b$ est une matrice holomorphe en $t = 0$; posons $N = \|N_{kh}\|$, on aura donc

$$\Theta' \frac{dI}{d\tau} \Theta^{-1} = n \left\| (R_{kh}^{(P)} + N_{kh}) \tau^{d'_k - d_h + n - 1} \right\|.$$

Mais on a $d'_k - d_h + n - 1 \geqq 0$, et $d'_k - d_h + n - 1 \geqq n$ si $d_h < d'_k$; il en résulte d'après les conditions imposées aux $R_{kh}^{(P)}$, que le second membre est holomorphe; autrement dit, dI *est telle que* $\Theta' . dI/d\tau . \Theta^{-1}$ *soit holomorphe en* τ *quel que soit* P : soit σ le nombre des matrices différentielles dI (linéairement indépendantes) qui ont cette propriété. Réciproquement, si dI est l'une quelconque de ces σ matrices, et qu'on désigne par $R = \|R_{kh}\|$, en tout point P, l'ensemble des termes de degré $\leqq 2a+b-1$ dans le développement de $\Theta_0' . dI/dt . \Theta_0^{-1}$ suivant les puissances de t, on aura, S étant une matrice holomorphe,

$$\Theta_0' \frac{dI}{dt} \Theta_0^{-1} = R + t^{2a+b} S,$$

d'où

$$\frac{dI}{dt} = \Theta_0'^{-1} R\Theta_0 + t^{2a+b}\Theta_0'^{-1} S\Theta_0,$$
$$\equiv \Theta_0'^{-1} R\Theta_0 \qquad (\text{mod. } t^b),$$

d'après la définition de a; le même calcul que ci-dessus montre alors que $R_{kh}^{(P)}\tau^{d'_k-d_h+n-1}$ sera holomorphe en τ, donc que R_{kh} sera holomorphe en t si $d_h \geqq d'_k$ et aura en $t=0$ au plus un pôle simple si $d_h < d'_k$, de sorte que les $R_{kh}^{(P)}$ satisfont à toutes les conditions requises, et que leurs coefficients $C_{kh}^{(P,\rho)}$ définissent bien une relation linéaire entre les équations (A); nous avons ainsi σ relations, qui sont bien toutes indépendantes entre elles, car si dI n'est pas identiquement nulle la matrice R qu'on vient d'en déduire ne le sera pas non plus.

Toute autre relation entre les équations (A) est alors évidemment une combinaison de l'une des σ relations qu'on vient d'obtenir avec une relation correspondant à $dI = 0$; il nous reste donc à compter combien il y a de systèmes de constantes $C_{hk}^{(P,\rho)}$, ou d'expressions $R_{kh}^{(P)}$, satisfaisant aux congruences

$$\Theta_0'^{-1} R\Theta_0 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } t^b).$$

On aura $R = \Theta'_0 M\Theta_0^{-1} t^b$, M étant holomorphe; il en résulte d'abord comme plus haut que R est holomorphe, donc que les $R_{kh}^{(P)}$ sont des polynomes de degré $2a+b-1$; et aussi que réciproquement, en prenant pour M une matrice holomorphe quelconque, et pour R l'ensemble des termes de degré $\leqq 2a+b-1$ dans le développement de $\Theta'_0 M\Theta_0^{-1} t^b$, on obtiendra des polynomes $R_{kh}^{(P)}$ satisfaisant aux conditions voulues. Il ne reste donc plus qu'à déterminer en chaque point P, parmi les matrices de la forme $\Theta'_0 M\Theta_0^{-1} t^b$, le nombre n_P de celles qui sont incongrues entre elles modulo t^{2a+b} : à chacune d'elles correspondra une relation entre les équations (A), de sorte que le nombre total des relations entre ces équations sera $\sum_P n_P + \sigma$. Pour trouver n_P, mettons Θ_0 et Θ'_0 sous la forme canonique $\Theta_0 = U_1 E U$, $\Theta'_0 = U'_1 E' U'$, où U, U_1, U', U'_1 sont unitaires, et $E = \|\delta_{ij} t^{e_i}\|$, $E' = \|\delta_{ij} t^{e'_i}\|$ sont des matrices diagonales. Si l'on pose $M' = U'MU^{-1}$, M et M' seront holomorphes en même temps; de même les matrices $R = \Theta'_0 M\Theta_0^{-1} t^b$ et

$R' = U_1'^{-1} R U_1 = E' M' E^{-1} t^b$ seront en même temps, congrues à zéro modulo t^{2a+b}; n_P est donc aussi le nombre des matrices de la forme $E' M' E^{-1} t^b$ qui sont incongrues entre elles modulo t^{2a+b}, quand on prend pour M′ toutes les matrices holomorphes; or, si l'on pose $M' = \| f_{ij}(t) \|$, on aura

$$E' M' E^{-1} t^b = \| f_{ij}(t) t^{b+e'_i-e_j} \|,$$

de sorte qu'évidemment

$$\begin{aligned} n_P &= \sum_{i,j} (2a + e_j - e'_i) = 2arr' + r' \sum_j e_j - r \sum_i e'_i \\ &= 2arr' + r' i(\Theta_0) - ri(\Theta'_0). \end{aligned}$$

Le nombre de relations entre les équations (A) étant $\sum_P n_P + \sigma$, le nombre d'équations (A) indépendantes est

$$\sum_P [rr'b + m + ri(\Theta'_0) - r'i(\Theta_0)] - \sigma.$$

D'ailleurs, on a

$$i(\Theta_0) = i(\Theta) - i(\Delta), \qquad i(\Theta'_0) = i(\Theta') - i(\Delta').$$

Pour donner à nos résultats leur forme définitive, observons maintenant qu'on a $i(\Delta) = \sum_h d_h/n$, et de même pour Δ', d'où

$$\begin{aligned} m + r'i(\Delta) - ri(\Delta') &= m + \sum_{h,k} \left(\frac{d_h - d'_k}{n} \right) \\ &= \sum_{d_h < d'_k} \left(1 + \frac{d_h - d'_k}{n} \right) + \sum_{d_h \geqq d'_k} \left(\frac{d_h - d'_k}{n} \right) \\ &= \sum_{h,k} \left\langle \frac{d_h - d'_k}{n} \right\rangle, \end{aligned}$$

en désignant en général par $\langle x \rangle$ la partie fractionnaire de x (la différence entre x et le plus grand entier $\leqq x$).

Désignons cette dernière expression par ν_P; et remarquons qu'elle ne change pas si l'on remplace les d_h, d'_k par des nombres qui leur soient respectivement congrus modulo n, et ne dépend donc que des ζ^{d_h}, $\zeta^{d'_k}$. En écrivant d'autre part $I(\Theta)$ (indice total du diviseur Θ)

au lieu de $\sum_{\mathrm{P}} i(\Theta)$, et $\mathrm{I}(\Theta')$ au lieu de $\sum_{\mathrm{P}} i(\Theta')$, on voit que le nombre d'équations (A) indépendantes est

$$rr'\left(\sum_{\mathrm{P}} b\right) + r\,\mathrm{I}(\Theta') - r'\,\mathrm{I}(\Theta) + \sum_{\mathrm{P}} \nu_{\mathrm{P}} - \sigma;$$

ce sont des équations linéaires et homogènes à $rr'(\Sigma b) - rr'(p-1)$ inconnues, et par conséquent la solution Φ du problème posé dépend de

$$\mathrm{N} = r'\,\mathrm{I}(\Theta) - r\,\mathrm{I}(\Theta') - rr'(p-1) - \sum_{\mathrm{P}} \nu_{\mathrm{P}} + \sigma$$

paramètres. Nous avons ainsi démontré le *théorème de Riemann-Roch généralisé* (¹) :

Une signature $n(\mathrm{P})$ *étant donnée sur une surface de Riemann* $\mathfrak{r}$, *soient* Θ, Θ' *deux diviseurs sur* $\mathfrak{r}$, *de degré* r *et* r', *d'indice total* $\mathrm{I}(\Theta)$ *et* $\mathrm{I}(\Theta')$ *respectivement; soient, en chaque point* P *de* $\mathfrak{r}$, $\zeta^{d_i}(i = 1, 2, \ldots, r)$ *et* $\zeta^{d'_j}(j = 1, 2, \ldots, r')$, *respectivement, les racines caractéristiques des diviseurs* Θ *et* Θ'. *Alors le nombre de matrices* Φ (*à* r *lignes et* r' *colonnes sur le corps* k *des fonctions rationnelles sur* $\mathfrak{r}$) *linéairement indépendantes, telles qu'en tout point* $\Theta\Phi\Theta'^{-1}$ *soit fini, est*

$$\mathrm{N} = r'\,\mathrm{I}(\Theta) - r\,\mathrm{I}(\Theta') - rr'(p-1) - \sum_{\mathrm{P}} \sum_{i,j} \left\langle \frac{d_i - d'_j}{n} \right\rangle + \sigma,$$

σ *désignant le nombre de matrices différentielles* $d\mathrm{I}$ (*à* r' *lignes et* r *colonnes sur* k) *telles que* $\Theta' . d\mathrm{I}/d\tau . \Theta^{-1}$ *soit fini en tout point.*

Introduisons maintenant une nouvelle définition très importante, celle de *classe de diviseurs* sur $\mathfrak{r}$ (pour la signature donnée). Soit Θ un diviseur de degré r, d'indice total $\mathrm{I}(\Theta)$; si F est une matrice régulière de degré r sur k, ΘF sera encore un diviseur de degré r, et l'on aura

$$\mathrm{I}(\Theta\mathrm{F}) = \mathrm{I}(\Theta) + \sum_{\mathrm{P}} i(\mathrm{F}) = \mathrm{I}(\Theta),$$

(¹) *Cf.* dans ma Note des *Hamb. Abh.*, Bd. **11**, 1935, S. 110, un cas particulier de ce théorème [celui qui se rapporte au cas $n(\mathrm{P}) = 1$, $r' = 1$, $\Theta' = 1$].

car le déterminant $|F|$ est un élément de k et a donc autant de zéros que de pôles, chacun compté avec sa multiplicité, et par suite $\Sigma i(F) = 0$. Alors, *tous les diviseurs* ΘF *seront dits équivalents au diviseur* Θ; cette relation d'équivalence est évidemment symétrique et transitive; l'ensemble des diviseurs ΘF équivalents à un même diviseur Θ sera appelé une *classe* de diviseurs. Si $r = r' = 1$, et si $n(P) = 1$ quel que soit P, on retrouve une notion classique.

Il est facile de voir par exemple que le nombre N du théorème de Riemann-Roch ne dépend que de la *classe* des diviseurs Θ, Θ' : supposons, en effet, qu'on remplace ceux-ci par des diviseurs équivalents $\Theta_1 = \Theta F$, $\Theta'_1 = \Theta' F'$; alors il y aura une correspondance biunivoque entre les matrices Φ sur k, telles que $\Theta\Phi\Theta'^{-1}$ soit partout fini, et les matrices Φ_1 sur k, telles que $\Theta_1\Phi_1\Theta_1'^{-1}$ soit partout fini, correspondance exprimée par la relation $\Phi_1 = F^{-1}\Phi F'$, de sorte que les nombres de matrices Φ et Φ_1 linéairement indépendantes seront les mêmes.

4. Pour la suite, il est nécessaire aussi d'examiner le *problème de Riemann-Roch non homogène* : j'entends par là la recherche des matrices Φ à r lignes et r' colonnes sur k, telles qu'en tout point P la matrice $\Theta(\Phi - H)\Theta'^{-1}$ soit finie, Θ et Θ' étant comme plus haut des diviseurs donnés, et $H = H_P(t)$ étant une matrice à r lignes et r' colonnes sur k_P, donnée en chaque point P, de telle façon que l'on ait $H_P = 0$ partout sauf pour un nombre fini de points P. Si l'on a $r = r' = 1$, et si $n(P) = 1$ quel que soit P, ce problème n'est autre que la recherche, sur $\mathfrak{r}$, des fonctions de k dont on se donne les pôles, et de plus, en un nombre fini de points, un certain nombre de termes du développement suivant les puissances de t.

Posons, en chaque point P, $H = \|\eta_{ij}(t)\|$. La matrice cherchée $\Phi = \|\varphi_{ij}\|$ devra être telle que $\Theta(\Phi - H)\Theta'^{-1}$ soit holomorphe en τ en tout point P; si l'on suppose, comme au paragraphe **3**, Θ et Θ' ramenés à la forme $\Theta = \Delta\Theta_0$, $\Theta' = \Delta'\Theta'_0$, et qu'on pose $\Psi = \Theta_0(\Phi - H)\Theta_0'^{-1}$, cela revient à dire que $\Delta\Psi\Delta'^{-1}$ doit être holomorphe en τ, donc en particulier Ψ holomorphe en t; mais on a $\Phi = \Theta_0^{-1}\Psi\Theta'_0 + H$; si donc on fait correspondre à tout point P un entier $b = b(P)$, assujetti aux mêmes conditions qu'au paragraphe **3**, et de plus au moins égal à l'ordre de celui des η_{ij} qui a en $t = 0$ un pôle de l'ordre le plus élevé, on voit que les φ_{ij} devront être cherchées parmi les fonctions φ de k qui ont en tout P un pôle d'ordre $\leqq b(\mathrm{P})$; de plus, les notations restant les mêmes qu'au paragraphe **3**, nous aurons pour déterminer les φ_{ij}, les équations

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{Res}_{\mathrm{P}} t^{\rho}\left[\sum_{i,j} \theta_{hi}\varphi_{ij}\mathfrak{I}'_{jk}\right] = \operatorname{Res}_{\mathrm{P}} t^{\rho}\left[\sum_{i,j} \theta_{hi}\eta_{ij}\mathfrak{I}'_{jk}\right]$$

$(h=1, 2, \ldots, r;\ k=1, 2, \ldots, r';\ \rho=0, 1, 2, \ldots, 2a+b-1$, et $=-1$, si $d_h < d'_k$).

Pour que ces équations linéaires non homogènes soient compatibles, il faut et il suffit que toute relation linéaire à laquelle satisfassent identiquement les premiers membres, soit satisfaite par les seconds membres. Or toutes ces relations ont été déterminées au paragraphe **3**; on a vu qu'elles sont de deux sortes, σ d'entre elles correspondant biunivoquement aux σ matrices différentielles $d\mathrm{I}$ sur k, telles qu'en tout point $\Theta'.d\mathrm{I}/d\tau.\Theta^{-1}$ soit fini; on a vu en effet qu'à chacune de ces matrices $d\mathrm{I} = \| du_{ij} \|$ correspond une combinaison linéaire des premiers membres des équations (A), qui peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i,j}\sum_{\mathrm{P}}\oint_{\mathrm{P}} \varphi_{ij}\,du_{ji} = 0,$$

et est vérifiée identiquement. Pour obtenir les conditions correspondantes relatives aux η_{ij}, il suffit évidemment de remplacer les φ_{ij} par les η_{ij}, puisque cette substitution est celle qui fait passer des premiers aux seconds membres des équations (B). Nous obtenons ainsi σ conditions, qui peuvent s'écrire

$$\sum_{\mathrm{P}}\oint_{\mathrm{P}} Sp(\mathrm{H}\,d\mathrm{I}) = 0.$$

D'autre part, en plus de ces σ relations entre les équations (A), on en a trouvé d'autres (au nombre de Σn_{P}), qu'on obtient toutes de la manière suivante : P étant quelconque sur $\mathfrak{r}$, et M étant une matrice holomorphe quelconque, à r lignes et r' colonnes sur k_{P}, on prend $\mathrm{R} = \Theta'_0 \mathrm{M} \Theta_0'^{-1} t^b$, et, en posant $\mathrm{R} = \| \mathrm{R}_{kh} \|$, il y a une combinaison linéaire des équations (A), qui s'écrit

$$\sum_{i,j} \operatorname{Res}_{\mathrm{P}}\left(\sum_{h,k} \mathfrak{I}'_{jk}\mathrm{R}_{kh}\theta_{hi}\right)\varphi_{ij} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Res}_P Sp(M\Phi t^b) = 0,$$

et qui est identiquement vérifiée par Φ. La condition correspondante pour H s'obtient en remplaçant Φ par H; c'est donc

$$\operatorname{Res}_P Sp(MH t^b) = 0.$$

Mais celle-ci aussi est identiquement satisfaite, d'après la manière dont on a choisi b. On a donc le théorème suivant :

Soient Θ, Θ' *deux diviseurs sur* $\mathfrak{r}$, *de degrés respectifs* r *et* r' *; et soit, en chaque point* P *de* $\mathfrak{r}$, $H = H_P(t)$ *une matrice à* r *lignes et* r' *colonnes sur* k_P, *nulle sauf pour un nombre fini de points* P. *Alors, pour qu'il existe une matrice* Φ, *à* r *lignes et* r' *colonnes sur* k, *telle qu'en tout point* P *la matrice* $\Theta(\Phi - H)\Theta'^{-1}$ *soit finie, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\sum_P \oint_P Sp(H\, d\mathfrak{l}) = 0,$$

chaque fois que la matrice différentielle $d\mathfrak{l}$, *à* r' *lignes et* r *colonnes sur* k, *est telle que* $\Theta' . d\mathfrak{l}/d\tau . \Theta^{-1}$ *soit fini partout.*

Il est évident, d'ailleurs, que ces conditions sont nécessaires; mais il ne l'était pas qu'elles fussent suffisantes.

CHAPITRE II.

CLASSES DE DIVISEURS ET CLASSES DE REPRÉSENTATIONS.

5. On dit, comme on sait, qu'on a défini une *représentation de degré* r d'un groupe $\mathfrak{G}$ dans un corps si, à tout élément S de $\mathfrak{G}$, on a fait correspondre une matrice $\mathfrak{M}_S$ régulière de degré r sur ce corps, de telle façon que l'on ait toujours

$$\mathfrak{M}_{ST} = \mathfrak{M}_S \mathfrak{M}_T.$$

Il s'ensuit, en prenant pour S l'élément unité de $\mathfrak{G}$, qu'à celui-ci correspond la matrice unité 1_r, puis en prenant de nouveau S quelconque et $T = S^{-1}$, qu'à S^{-1} correspond la matrice inverse de $\mathfrak{M}_S$.

Nous aurons affaire uniquement aux représentations du groupe $\mathfrak{G}$, défini au paragraphe **1**, dans le corps des constantes, c'est-à-dire dans le corps de tous les nombres complexes : c'est toujours de celles-là qu'il s'agira quand nous parlerons de représentations. Il est essentiel pour nous qu'à toute représentation de degré r on puisse faire correspondre au moins une matrice Θ régulière de degré r sur le corps K, telle que l'on ait

$$\Theta^S = \mathfrak{M}_S \Theta.$$

La recherche d'une matrice Θ satisfaisant à ces conditions est un cas particulier de ce qu'on nomme, dans la théorie des équations différentielles linéaires, le problème de Riemann. Dans le cas qui nous occupe, on le résout, d'après Poincaré, au moyen des séries zêtafuchsiennes. ω étant l'uniformisante définie au paragraphe **1**, posons

$$\Theta_*(\omega) = \sum_S \mathfrak{M}_S^{-1} F(\omega^S)\left(\frac{d\omega^S}{d\omega}\right)^m,$$

$$\theta_*(\omega) = \sum_S f(\omega^S)\left(\frac{d\omega^S}{d\omega}\right)^m,$$

$F(\omega)$ étant une matrice régulière de degré r sur K, et f une fonction de K. La première série est une série « zêtafuchsienne », la deuxième une série « thêtafuchsienne » : Poincaré a démontré que si $\mathfrak{G}$ ne contient pas de substitution parabolique (ce qui est bien le cas ici) et si F, f satisfont à des conditions très larges (on peut prendre par exemple pour F, f des fonctions rationnelles en ω sans pôle sur le cercle unité), les deux séries sont absolument convergentes pour m, assez grand ; on vérifie alors immédiatement que l'on a

$$\Theta_*^S = \Theta_*(\omega^S) = \mathfrak{M}_S \Theta_*(\omega)\left(\frac{d\omega^S}{d\omega}\right)^{-m},$$

$$\theta_*^S = \theta_*(\omega^S) = \theta_*(\omega)\left(\frac{d\omega^S}{d\omega}\right)^{-m}.$$

Si de plus f et F sont choisies convenablement, $|\Theta_*|$ et θ_* ne s'annuleront pas identiquement; il suffit par exemple de donner à f et à F un seul pôle simple, par exemple en $\omega = 0$, dans l'intérieur du cercle unité, de façon qu'en $\omega = 0$, le déterminant $\omega^{r}|F|$ de ωF ne s'annule pas. Dans ces conditions, $\Theta = \Theta_{*}/\theta_{*}$ satisfera aux conditions imposées; il est clair qu'alors la matrice ΘF y satisfera également, si l'on prend pour F n'importe quelle matrice régulière de degré r sur k; réciproquement, si Θ_1 est une matrice quelconque satisfaisant à ces conditions, la matrice $F = \Theta^{-1}\Theta_1$ sera régulière de degré r sur K et invariante par le groupe $\mathfrak{G}$, ce sera donc une matrice régulière de degré r sur k, et l'on aura $\Theta_1 = \Theta F$.

Θ étant une matrice régulière sur K telle que $\Theta^{S} = \mathfrak{M}_{S}\Theta$, soit P un point de $\mathfrak{r}$: en un voisinage de ce point, la matrice Θ prend une infinité de valeurs qui se déduisent toutes de l'une quelconque Θ d'entre elles par multiplication à gauche par les matrices régulières $\mathfrak{M}_{S}$; si d'ailleurs $n(P) > 1$, c'est-à-dire si P est l'un des points P_{μ}, on a

$$\Theta^{C_{\mu}} = \mathfrak{M}_{C_{\mu}}\Theta;$$

par conséquent, d'après les définitions du paragraphe **2**, Θ définit en P un diviseur local, *indépendant de la valeur de Θ choisie en* P *pour le définir*. Puisque Θ permet ainsi de définir en tout point P de $\mathfrak{r}$ un diviseur local bien déterminé, Θ définit, au sens du paragraphe **3**, un diviseur sur $\mathfrak{r}$ (relatif à la signature donnée), qui sera appelé le *diviseur* Θ. Si l'on remplace Θ par une autre matrice $\Theta_1 = \Theta F$ jouissant des mêmes propriétés, F étant une matrice régulière de degré r sur k, on obtient, d'après nos définitions, un diviseur Θ_1 équivalent à Θ, et même on obtient ainsi tous les diviseurs équivalents à Θ en choisissant F convenablement. De plus, le déterminant $|\Theta|$ est une fonction de K, multiplicative sur $\mathfrak{r}$ (c'est-à-dire qui se reproduit à un facteur constant près par toute substitution S de $\mathfrak{r}$), ou, ce qui revient au même, $\log|\Theta|$ est une intégrale abélienne sur $\mathfrak{r}$, dont la somme des périodes logarithmiques est donc nulle, c'est-à-dire que l'on a

$$\sum_{P} \frac{1}{2\pi i} \oint_{P} d(\log|\Theta|) = \sum_{P} i(\Theta) = I(\Theta) = 0.$$

Soient maintenant $\mathfrak{M}_{S}$, $\mathfrak{M}'_{S}$ deux représentations, de degrés respectifs r, r'; soient Θ, Θ' deux matrices régulières de degrés r, r' sur K, telles que $\Theta^{S} = \mathfrak{M}_{S}\Theta$, $\Theta'^{S} = \mathfrak{M}'_{S}\Theta'$. On dira qu'une matrice, ou une matrice différentielle, M, à r lignes et r' colonnes sur K, appartient au *module* $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}'_S)$, si l'on a, quel que soit S,

$$M^S = \mathfrak{M}_S M \mathfrak{M}'^{-1}_S.$$

Il est clair qu'alors la matrice $\Theta^{-1} M \Theta'$ est invariante par $\mathfrak{G}$, et appartient donc à k, de sorte que la matrice la plus générale du module $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}'_S)$ est de la forme $\Theta\Phi\Theta'^{-1}$, Φ étant une matrice à r lignes et r' colonnes sur k. Si $\mathfrak{M}_S = \mathfrak{M}'_S$, le module $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}'_S)$ s'appellera aussi l'*anneau* $(\mathfrak{M}_S)$: le produit de deux matrices de l'anneau $(\mathfrak{M}_S)$ est évidemment une matrice du même anneau, d'où ce nom. Plus généralement, le produit d'une matrice du module $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}'_S)$ par une matrice du module $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}''_S)$ appartient au module $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}''_S)$; en particulier, le module $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}'_S)$ admet l'anneau $(\mathfrak{M}_S)$ comme anneau d'opérateurs à gauche, et l'anneau $(\mathfrak{M}'_S)$ comme anneau d'opérateurs à droite.

Les matrices, et les matrices différentielles, partout finies d'un module ou d'un anneau jouent dans la présente théorie un rôle très important. Les matrices Λ partout finies d'un anneau $(\mathfrak{M}_S)$ forment évidemment elles-mêmes un anneau, qu'on appellera le *noyau* de l'anneau $(\mathfrak{M}_S)$, ou plus brièvement le noyau $(\mathfrak{M}_S)$: d'après le théorème de Riemann-Roch, c'est une algèbre de rang fini sur le corps des constantes, qui contient d'ailleurs évidemment la matrice unité 1_r et tous ses multiples. Soient maintenant $\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}'_S$ deux représentations *de même degré* $r = r'$: elles seront dites *semblables* (¹) s'il existe une matrice C régulière de degré r sur le corps des constantes, telle que $\mathfrak{M}'_S = C^{-1} \mathfrak{M}_S C$; alors la matrice constante C appartient au module $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}'_S)$, car on a

$$C = \mathfrak{M}_S C \mathfrak{M}'^{-1}_S.$$

On dira que deux représentations $\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}'_S$ *de même degré* $r = r'$ sont *équivalentes* s'il y a dans le module $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}'_S)$ une matrice M *régulière, partout finie*, c'est-à-dire une matrice M régulière de degré r sur K,

(¹) On dit ordinairement, dans ce cas, qu'elles sont équivalentes; mais nous avons besoin de ce mot pour désigner une autre notion, comme on va le voir immédiatement.

partout finie, telle que

$$M^S = \mathfrak{M}_S M \mathfrak{M}_S'^{-1};$$

on voit, comme plus haut pour $|\Theta|$, que le déterminant $|M|$ est une fonction multiplicative et que $d(\log|M|)$ est une différentielle sur k, d'où il résulte que

$$\sum_P i(M) = \frac{1}{2\pi i}\sum_P \oint_P d(\log|M|) = 0;$$

mais, M étant partout holomorphe, on a $i(M) \geqq 0$, et par conséquent $i(M) = 0$ partout, c'est-à-dire que $|M|$ ne s'annule en aucun point de $\mathfrak{R}$, ou encore que $\log|M|$ est une intégrale abélienne de première espèce. Il en résulte que la matrice M^{-1}, qui appartient évidemment au module $(\mathfrak{M}_S', \mathfrak{M}_S)$, est partout finie elle aussi, donc que notre relation d'équivalence est bien symétrique; elle est évidemment transitive. De plus, toute représentation *semblable* à $\mathfrak{M}_S$ est aussi *équivalente* à $\mathfrak{M}_S$, d'après les remarques faites. L'ensemble des représentations équivalentes à $\mathfrak{M}_S$ sera appelé une *classe* de représentations.

Soit Θ, régulière de degré r sur K, telle que $\Theta^S = \mathfrak{M}_S\,\Theta$; ou, autrement dit, soit Θ une matrice régulière du module $(\mathfrak{M}_S, 1_r)$; soit $\mathfrak{M}_S'$ équivalente à $\mathfrak{M}_S$, c'est-à-dire qu'il y a une matrice M régulière, partout finie, dans le module $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}_S')$; alors

$$\Theta' = M^{-1}\Theta$$

est une matrice régulière du module $(\mathfrak{M}_S', 1_r)$; puisque d'ailleurs $|M|$ ne s'annule en aucun point, les diviseurs Θ et Θ' sont identiques. *Si donc à toute représentation* $\mathfrak{M}_S$ *nous faisons correspondre la classe de diviseurs* (bien déterminée d'après ce qui précède) *qui contient le diviseur* Θ, on voit qu'*à deux représentations équivalentes correspond même classe de diviseurs.* Supposons, réciproquement, qu'il en soit ainsi pour deux représentations $\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}_S'$ de degré r arbitrairement données; autrement dit, supposons qu'il y ait Θ et Θ' régulières, appartenant respectivement aux modules $(\mathfrak{M}_S, 1_r)$ et $(\mathfrak{M}_S', 1_r)$, et F régulière de degré r sur k, telles que les diviseurs ΘF et Θ' soient identiques : cela signifie, par définition, qu'en tout point P la matrice $M = \Theta F \Theta'^{-1}$ est unitaire; M est donc régulière et partout holomorphe, et appartient évidemment au module $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}'_S)$, c'est-à-dire que les deux représentations sont bien équivalentes.

A toute classe de représentations correspond ainsi une classe de diviseurs bien déterminée, et à deux classes de représentations distinctes correspondent des classes de diviseurs distinctes; il y a donc correspondance biunivoque entre les classes de représentations et certaines classes de diviseurs. Reste à déterminer ces dernières; cette détermination sera effectuée au paragraphe **7** et constituera le principal résultat de ce travail; elle se fera par l'application de nos résultats concernant le problème de Riemann-Roch non homogène. Mais auparavant, et bien que ce ne soit pas indispensable pour notre objet, nous allons appliquer le théorème de Riemann-Roch du paragraphe **3** à la détermination du nombre de paramètres qui figurent dans certains des éléments dont nous avons à parler; en dehors de son intérêt propre, cette application nous servira aussi à nous familiariser avec les méthodes de calcul dont il est fait usage dans cette théorie.

6. Proposons-nous d'abord de déterminer *le nombre des matrices différentielles* Ω *partout finies d'un module* $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}'_S)$. En désignant toujours par dj une différentielle fixe k, par Θ et Θ' des matrices régulières appartenant aux modules $(\mathfrak{M}_S, 1_r)$ et $(\mathfrak{M}'_S, 1_{r'})$, toute matrice Ω sera de la forme

$$\Omega = \Theta\Phi\Theta'^{-1}\,dj,$$

Φ étant une matrice à r lignes et r' colonnes sur k; et il faudra choisir Φ de telle sorte qu'en tout point $\Omega/d\tau$ soit fini. On a donc à appliquer le théorème de Riemann-Roch aux deux diviseurs $\Theta.dj/d\tau$ et Θ'. L'indice total du premier est

$$\mathrm{I}\left(\Theta\frac{dj}{d\tau}\right) = \mathrm{I}(\Theta) + r\sum_{\mathrm{P}} i\left(\frac{dj}{dt}\right) + r\sum_{\mathrm{P}} i\left(\frac{dt}{d\tau}\right);$$

mais $\mathrm{I}(\Theta) = 0$; $\Sigma i(dj/dt)$ est la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles de dj sur r, donc $2p-2$; et $i(dt/d\tau)$ est égal à $i(\tau^{n-1}) = (n-1)/n$; donc

$$\mathrm{I}\left(\Theta \frac{dj}{d\tau}\right) = r(2p-2) + r\sum_{\mathrm{P}}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

et naturellement $\mathrm{I}(\Theta') = 0$. Soit maintenant P l'un des points P_μ où $n(\mathrm{P}) > 1$; $\mathfrak{M}_{\mathrm{S}}$ étant une représentation du groupe $\mathfrak{G}$, on aura, puisque $\mathrm{C}_\mu^{n_\mu} = 1$:

$$(\mathfrak{M}_{\mathrm{C}_\mu})^{n_\mu} = 1_r,$$

et les racines caractéristiques de $\mathfrak{M}_{\mathrm{C}_\mu}$ seront des racines $n_\mu{}^{\text{ièmes}}$ de l'unité; soient donc ζ^{d_i} ces racines, et de même $\zeta^{d'_j}$ celles de $\mathfrak{M}'_{\mathrm{C}_\mu}$. Puisque $\Theta^{\mathrm{C}_\mu} = \mathfrak{M}_{\mathrm{C}_\mu}\Theta$, les ζ^{d_i} seront aussi (d'après les définitions du paragraphe 3) les racines caractéristiques du diviseur local Θ au point P, et les $\zeta^{d'_j}$ seront celles du diviseur Θ'. On a de plus

$$\left(\Theta \frac{dj}{d\tau}\right)^{\mathrm{C}_\mu} = \mathfrak{M}_{\mathrm{C}_\mu}\zeta^{-1}\Theta \frac{dj}{d\tau},$$

donc les racines caractéristiques du diviseur $\Theta\, dj/d\tau$ sont celles de la matrice $\mathfrak{M}_{\mathrm{C}_\mu}\zeta^{-1}$, c'est-à-dire les nombres ζ^{d_i-1}. L'application du théorème de Riemann-Roch donne alors le nombre N des matrices Ω sous la forme

$$\mathrm{N} = rr'(p-1) + \sum_{\mathrm{P}}\left[rr'\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_{i,j}\left\langle \frac{d_i - 1 - d'_j}{n}\right\rangle\right] + \sigma.$$

Mais on a, quels que soient α, β entiers,

$$1 - \frac{1}{n} - \left\langle \frac{\alpha - 1 - \beta}{n}\right\rangle = \left\langle \frac{\beta - \alpha}{n}\right\rangle$$

et, par suite,

$$rr'\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_{i,j}\left\langle \frac{d_i - 1 - d'_j}{n}\right\rangle = \sum_{i,j}\left\langle \frac{d'_j - d_i}{n}\right\rangle.$$

Si de plus on désigne par $\mathrm{N}_{\mu\alpha}$ le nombre de racines caractéristiques de $\mathfrak{M}_{\mathrm{C}_\mu}$ qui sont égales à ζ^α (pour $0 \leqq \alpha \leqq n-1$), et par $\mathrm{N}'_{\mu\alpha}$ le nombre analogue pour $\mathfrak{M}'_{\mathrm{C}_\mu}$, on aura

$$\sum_{i,j}\left\langle \frac{d'_j - d_i}{n}\right\rangle = \sum_{\alpha,\beta}\mathrm{N}_{\mu\alpha}\mathrm{N}'_{\mu\beta}\left\langle \frac{\beta - \alpha}{n}\right\rangle.$$

D'autre part, σ désigne ici le nombre de matrices différentielles $d\mathrm{I}$ sur k telles que $\Theta'.d\mathrm{I}/d\tau(\Theta^{-1}d\tau/dj) = \Theta'.d\mathrm{I}/dj.\Theta^{-1} = \mathrm{M}$ soit partout fini; M sera alors une matrice partout finie du module $(\mathfrak{M}'_{\mathrm{S}}, \mathfrak{M}_{\mathrm{S}})$ et réciproquement, si M est une telle matrice, la matrice $d\mathrm{I} = \Theta'^{-1}\mathrm{M}\Theta\, dj$ est une matrice différentielle sur k de l'espèce voulue. Par conséquent :

Le nombre de matrices différentielles Ω partout finies du module $(\mathfrak{M}_{\mathrm{S}}, \mathfrak{M}'_{\mathrm{S}})$ est égal à

$$\mathrm{N} = rr'(p-1) + \nu + \sigma,$$

σ désignant le nombre de matrices partout finies du module $(\mathfrak{M}'_{\mathrm{S}}, \mathfrak{M}_{\mathrm{S}})$, et ν ayant la valeur

$$\nu = \sum_{\mu} \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{N}_{\mu\alpha}\mathrm{N}'_{\mu\beta}\left\langle\frac{\beta-\alpha}{n_{\mu}}\right\rangle,$$

si l'on suppose que $e^{2\pi i\alpha/n_{\mu}}$ figure $\mathrm{N}_{\mu\alpha}$ fois parmi les racines caractéristiques de $\mathfrak{M}_{\mathrm{C}_{\mu}}$ et $\mathrm{N}'_{\mu\alpha}$ fois parmi celles de $\mathfrak{M}'_{\mathrm{C}_{\mu}}$.

En particulier, si $\mathfrak{M}'_{\mathrm{S}} = \mathfrak{M}_{\mathrm{S}}$, on obtient le nombre de matrices différentielles Ω partout finies de l'*anneau* $(\mathfrak{M}_{\mathrm{S}})$. Dans ce cas, on peut encore écrire, comme le montre un calcul facile,

$$\nu = \sum_{\mu} \sum_{\alpha<\beta} \mathrm{N}_{\mu\alpha}\mathrm{N}_{\mu\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\mu}\left(r^2 - \sum_{\alpha}\mathrm{N}^2_{\mu\alpha}\right).$$

Si au lieu des matrices Ω on avait recherché les expressions Ω_f de la la forme $\Omega_f = \Theta\Phi\Theta'^{-1}(dj)^f$, telles qu'en tout point P la matrice $\Omega_f/(d\tau)^f$ soit finie, on aurait trouvé, tout aussi facilement, un résultat qui généraliserait ceux de deux Notes que j'ai publiées (l'une d'elles en commun avec C. Chevalley) dans les *Hamburger Abhandlungen* (¹). Des cas particuliers du résultat ci-dessus jouent dans divers travaux de Hecke et de son école un rôle fort important : ils se rapportent à des problèmes où les représentations $\mathfrak{M}_{\mathrm{S}}$, $\mathfrak{M}'_{\mathrm{S}}$ se composent d'un nombre fini de matrices, et où par conséquent les matrices du module $(\mathfrak{M}_{\mathrm{S}}, \mathfrak{M}'_{\mathrm{S}})$ sont dans une extension algébrique finie du corps k, ramifiée aux seuls points P_{μ}.

(¹) C. Chevalley et A. Weil, *Hamb. Abh.*, Bd. 10, 1934, S. 358; A. Weil, *ibid.*, Bd. 11, 1935, S. 110.

Proposons-nous maintenant de déterminer le nombre de paramètres dont dépendent les représentations équivalentes à une représentation $\mathfrak{M}_S$ donnée. A une telle représentation $\mathfrak{M}'_S$ correspond au moins une matrice M régulière et partout finie du module $(\mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}'_S)$; dM sera alors une matrice différentielle partout finie du même module, et $dM.M^{-1} = \Omega$ sera une matrice différentielle partout finie de l'anneau $(\mathfrak{M}_S)$. Réciproquement, soit Ω une matrice différentielle partout finie de l'anneau $(\mathfrak{M}_S)$; d'après la théorie des équations différentielles linéaires, on sait qu'il existe une matrice M de degré r sur K et une seule, satisfaisant à l'équation

$$dM.M^{-1} = \Omega,$$

et prenant en un point donné de $\mathfrak{R}$, par exemple au point $\omega = 0$, une valeur donnée M_0; en effet, si l'on développe l'équation ci-dessus, on voit que les r coefficients de chaque colonne de la matrice M ont à satisfaire dans l'intérieur du cercle $|\omega| < 1$ à un système de r équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients partout holomorphes dans ce cercle, et par conséquent sont bien définis par leurs valeurs initiales et sont holomorphes dans le même cercle; si, de plus, l'on a pris M_0 telle que $|M_0| \neq 0$, le déterminant $|M|$ sera partout $\neq 0$. De plus, on aura, en appliquant à l'équation différentielle ci-dessus la transformation S de $\mathfrak{G}$:

$$dM^S.(M^S)^{-1} = \Omega^S = \mathfrak{M}_S \Omega \mathfrak{M}_S^{-1},$$

ou bien

$$d(\mathfrak{M}_S^{-1} M^S).(\mathfrak{M}_S^{-1} M^S)^{-1} = \Omega,$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{M}_S^{-1} M^S$ est solution de la même équation que M. Comme d'après les mêmes théorèmes élémentaires sur les systèmes d'équations différentielles linéaires toutes les matrices solutions de cette équation se déduisent de M par multiplication à droite par une matrice constante, il correspond à tout S de $\mathfrak{G}$ une matrice constante $\mathfrak{M}'_S$ telle que l'on ait

$$\mathfrak{M}_S^{-1} M^S = M \mathfrak{M}'^{-1}_S,$$

et en appliquant à cette équation la transformation T de $\mathfrak{G}$ on voit que $\mathfrak{M}'_S$ est une représentation de $\mathfrak{G}$, équivalente à $\mathfrak{M}_S$ à cause des propriétés de M.

On voit donc qu'à toute matrice différentielle Ω partout finie de l'anneau ($\mathfrak{M}_S$) et à toute matrice M_0 régulière sur le corps des constantes correspond une représentation $\mathfrak{M}'_S$ équivalente à $\mathfrak{M}_S$. Le nombre $N = r^2(p-1) + \nu + \sigma$ de paramètres dont dépend (linéairement) Ω a été déterminé plus haut, σ étant le nombre de matrices Λ partout finies de l'anneau ($\mathfrak{M}_S$) et ν ayant la valeur donnée précédemment. M_0 dépend de r^2 paramètres, et M dépend donc de $N + r^2 = pr^2 + \nu + \sigma$ paramètres. Soit M l'une de ces matrices, appartenant au module ($\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}'_S$); si M' est une matrice analogue du même module, $M'M^{-1} = \Lambda$ sera une matrice régulière partout finie de l'anneau ($\mathfrak{M}_S$), ou, suivant le terme introduit plus haut, une matrice régulière du *noyau* ($\mathfrak{M}_S$); réciproquement, si Λ est une telle matrice, $M' = \Lambda M$ est une matrice régulière partout finie du module ($\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}'_S$). Les matrices du noyau ($\mathfrak{M}_S$) dépendent linéairement de σ paramètres; parmi elles se trouve la matrice unité 1_r, donc le déterminant d'une telle matrice n'est pas identiquement nul, et pour que ce déterminant soit nul il faut que les σ paramètres qui la définissent satisfassent à une certaine condition; il en résulte que les matrices *régulières* du noyau ($\mathfrak{M}_S$) dépendent encore de σ paramètres (ou, pour mieux dire, forment une multiplicité à σ dimensions). En résumé, les matrices M qui permettent de définir les représentations $\mathfrak{M}'_S$ équivalentes à $\mathfrak{M}_S$ dépendent de $pr^2 + \nu + \sigma$ paramètres; parmi elles, celles qui définissent la même représentation $\mathfrak{M}'_S$ dépendent de σ paramètres. Par conséquent :

Les représentations $\mathfrak{M}'_S$ équivalentes à $\mathfrak{M}_S$ dépendent de

$$pr^2 + \nu = pr^2 + \sum_{\mu} \sum_{\alpha<\beta} N_{\mu\alpha} N_{\mu\beta}$$

paramètres, $N_{\mu\alpha}$ ayant le même sens que plus haut.

D'ailleurs, les représentations de $\mathfrak{G}$ pour lesquelles les entiers $N_{\mu\alpha}$ prennent des valeurs données forment une multiplicité dont le nombre de dimensions est égal à

$$r^2(2p-1) + 2\sum_{\mu} \sum_{\alpha<\beta} N_{\mu\alpha} N_{\mu\beta} + 1.$$

Ce résultat apparaît comme vraisemblable si l'on examine les équations auxquelles doivent satisfaire les matrices $\mathfrak{M}_{A_i}$, $\mathfrak{M}_{B_i}$, $\mathfrak{M}_{C_k}$ qui permettent de définir une telle réprésentation, et j'en ai obtenu une démonstration rigoureuse que ce n'est pas le lieu de donner ici. On en conclut que les *classes* de représentations pour lesquelles les $N_{\mu\alpha}$ prennent des valeurs données forment une multiplicité à

$$r^2(p-1)+1-\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta} N_{\mu\alpha}N_{\mu\beta}$$

dimensions.

7. Venons-en au problème posé à la fin du paragraphe **5** : un diviseur étant donné sur $\mathfrak{r}$, il s'agit de savoir s'il correspond à une représentation $\mathfrak{M}_S$; d'après ce que nous savons, il faut d'abord, pour qu'il puisse en être ainsi, qu'il soit d'indice total o. Mais l'analyse que nous allons faire de ce problème nous permettra de retrouver cette condition.

Soit donc Θ un diviseur de degré r sur $\mathfrak{r}$, défini en chaque point P par un diviseur local $\Theta = \Theta_P(\tau)$: il s'agit de savoir s'il existe une matrice H, régulière de degré r sur K, qui au voisinage de chaque point de $\mathfrak{R}$ soit de la forme $H = U\Theta$, U étant unitaire, et qui soit telle que l'on ait

$$H^S = \mathfrak{M}_S H,$$

$\mathfrak{M}_S$ étant une représentation. Si cette dernière condition est vérifiée, $H^{-1}\,dH = dI$ sera une matrice différentielle de degré r sur k; réciproquement, si H est régulière de degré r sur K et telle que $H^{-1}\,dH = dI$ soit une matrice différentielle sur k, on voit comme dans un cas analogue au paragraphe **6**, par application de théorèmes élémentaires sur les systèmes de r équations différentielles linéaires du premier ordre, que H^S, étant solution de la même équation $(H^S)^{-1}\,d(H^S) = dI$, est de la forme $\mathfrak{M}_S H$, la matrice $\mathfrak{M}_S$ étant constante, puisque $\mathfrak{M}_S$ est régulière, et enfin que $\mathfrak{M}_S$ est une représentation de $\mathfrak{G}$.

Nous sommes donc ramenés à examiner si l'on peut trouver dI et faire correspondre à tout point P une matrice unitaire $U(\tau)$ sur K_P, de telle sorte qu'on ait en tout point P

$$(U\Theta)^{-1}\,d(U\Theta) = dI,$$

c'est-à-dire

$$U^{-1}\,dU = \Theta.dI.\Theta^{-1} - d\Theta.\Theta^{-1}.$$

Le second membre de cette dernière égalité doit donc être une matrice différentielle finie sur K_P. Réciproquement, s'il en est ainsi, cette égalité constitue pour les coefficients de chaque ligne de U un système de r équations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients holomorphes en τ dans un voisinage de $\tau = 0$, et possède donc une solution U_0 et une seule prenant en $\tau = 0$ la valeur 1_r, toutes les autres étant de la forme CU_0 avec C constant; dans ces conditions, l'équation

$$H^{-1}dH = dI$$

(considérée à nouveau comme système d'équations différentielles linéaires sur les coefficients de H), qui en apparence possède comme points singuliers tous les points où dI n'est pas fini, peut, au voisinage de chaque point P, se ramener à une équation régulière en U par la substitution $H = U\Theta$, et possède la solution générale $H = CU_0\Theta$, de sorte que toute solution H de $H^{-1}dH = dI$ est partout méromorphe en τ, c'est-à-dire appartient à K; si l'on définit une telle solution par sa valeur initiale H_0 en un point où $\Theta = 1_r$, en prenant par exemple $H_0 = 1_r$ en ce point, H sera une matrice *régulière* sur K et satisfera à toutes les conditions voulues.

On saura donc résoudre le problème posé, et définir une représentation $\mathfrak{M}_S$ correspondant au diviseur Θ, chaque fois qu'on pourra trouver une matrice différentielle dI de degré r sur k, telle que $\Theta.dI.\Theta^{-1} - d\Theta.\Theta^{-1}$ soit finie en tout point P; le calcul fait montre d'ailleurs qu'on peut, sans modifier cette condition, y remplacer Θ par toute matrice $\Theta' = U\Theta$ définissant le même diviseur local, ce qu'on vérifie aisément aussi par les formules

$$d\Theta'.\Theta'^{-1} = U\,d\Theta.\Theta^{-1}U^{-1} + dU.U^{-1},$$

d'où

$$\Theta' dI.\Theta'^{-1} - d\Theta'.\Theta'^{-1} = U(\Theta.dI.\Theta^{-1} - d\Theta.\Theta^{-1})U^{-1} - dU.U^{-1}.$$

Mais le problème de la recherche de dI est un problème de Riemann-Roch non homogène au sens du paragraphe 4; en effet, dj désignant toujours une différentielle fixe de k, on aura $dI = \Phi.dj$, Φ étant de degré r sur k, et le problème consiste à trouver Φ de façon que

$$\Theta\Phi\frac{dj}{d\tau}\Theta^{-1} - \frac{d\Theta}{d\tau}\Theta^{-1} = \Theta\frac{dj}{d\tau}\left(\Phi - \Theta^{-1}\frac{d\Theta}{dj}\right)\Theta^{-1}$$

soit fini partout; et si l'on suppose que Θ ait été ramené à la forme

$\Theta = \Delta\Theta_0(t)$, de sorte qu'on ait $\Theta^C = D\Theta$, on aura, en posant

$$H = \Theta^{-1} d\Theta/dj,$$

$H^C = H$, c'est-à-dire que H sera bien une matrice de degré r sur k_P.

Alors, d'après le paragraphe **4**, la condition nécessaire et suffisante pour que le problème admette une solution est que l'on ait

$$\sum_P \oint_P Sp\left(\Theta^{-1}\frac{d\Theta}{dj}\, dJ\right) = 0,$$

chaque fois que dJ est une matrice différentielle, de degré r sur k, telle que $\Theta . dJ/d\tau . \Theta^{-1}\, d\tau/dj$ soit partout fini; ou plus simplement, en posant $dJ = \Psi\, dj$, c'est que l'on ait

$$\sum_P \oint_P Sp(\Psi\Theta^{-1} d\Theta) = 0,$$

chaque fois que Ψ est une matrice de degré r sur k, telle que $\Theta\Psi\Theta^{-1}$ soit finie partout. On peut d'ailleurs, sans modifier cette condition, y remplacer Θ par $\Theta' = U\Theta$ quelle que soit la matrice unitaire U, car on a

$$\Theta'^{-1} d\Theta' = \Theta^{-1} d\Theta + \Theta^{-1} U^{-1} dU . \Theta,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\oint_P Sp(\Psi\Theta'^{-1} d\Theta') &= \oint_P Sp(\Psi\Theta^{-1} d\Theta) + \oint_P Sp(\Psi\Theta^{-1} U^{-1} dU . \Theta) \\ &= \oint_P Sp(\Psi\Theta^{-2} d\Theta) + \oint_P Sp(\Theta\Psi\Theta^{-1} U^{-1} dU),\end{aligned}$$

et ce dernier terme s'annule puisque $\Theta\Psi\Theta^{-1}$ et $U^{-1} dU$ sont finis en P. *Nous pouvons donc, en particulier, supposer qu'en chaque point* P *la matrice* Θ *n'a que des éléments nuls au-dessous de la diagonale principale.*

Observons maintenant que parmi les matrices Ψ de degré r sur k, telles que $\Theta\Psi\Theta^{-1}$ soit finie partout, se trouve en tout cas, la matrice 1_r, de sorte qu'on doit avoir

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\sum_P \oint_P Sp(\Theta^{-1} d\Theta) = \sum_P i(\Theta) = I(\Theta),$$

ce que nous savions déjà. Supposons maintenant qu'il existe une autre matrice Ψ : les coefficients de son équation caractéristique, $P(\lambda) = |\Psi - \lambda . 1_r| = 0$, sont des éléments de k; mais, d'autre part, dans le voisinage d'un point P, Ψ a même équation caractéristique que la matrice holomorphe $\Theta\Psi\Theta^{-1}$, c'est-à-dire que les coefficients de $P(\lambda)$ sont partout finis : ce sont donc des constantes, les racines caractéristiques de Ψ sont aussi des constantes λ_i, et les diviseurs élémentaires de la matrice Ψ dans le corps k sont de la forme $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$. On sait alors [1] qu'on peut réduire Ψ à la forme canonique par une substitution dans k, ou, en d'autres termes, qu'on peut écrire Ψ sous la forme

$$\Psi = FCF^{-1},$$

F étant une matrice régulière de degré r sur k, et C la matrice canonique correspondant aux diviseurs élémentaires $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$: celle-ci, comme on sait, a tous ses éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui sont respectivement égaux aux racines caractéristiques λ_i, et certains de ceux qui sont placés immédiatement au-dessus de la diagonale principale et qui peuvent être égaux à 1. En tout cas, C est constante. Remplaçons maintenant le diviseur Θ par le diviseur $\Theta_1 = \Theta F$: si le problème était possible pour Θ nous savons qu'il l'est encore pour Θ_1 et réciproquement, sa nature n'a donc pas changé par cette substitution; les matrices Ψ_1 telles que $\Theta_1 \Psi_1 \Theta_1^{-1}$ soit partout fini correspondent biunivoquement aux matrices Ψ par la relation $\Psi_1 = F^{-1}\Psi F$, et parmi elles se trouve la matrice $\Psi_1 = C$. Écrivons maintenant de nouveau Θ au lieu de Θ_1 : nous voyons que nous sommes ramenés au cas où il existe une matrice constante canonique C telle que $\Theta C \Theta^{-1}$ soit partout fini. On va maintenant distinguer deux cas, suivant que C a toutes ses racines caractéristiques égales ou non.

Dans le premier cas, tous les éléments de la diagonale principale de C ont même valeur λ_1; C n'a d'ailleurs que des éléments nuls au-dessous de la diagonale principale : et il en est de même, par hypothèse, de Θ, donc aussi de Θ^{-1} et de $d\Theta$. Dans ces conditions, on a $Sp(C\Theta^{-1}\, d\Theta) = \lambda_1 Sp(\Theta^{-1}\, d\Theta)$, et par conséquent

$$\sum_P \oint_P Sp(C\Theta^{-1}\, d\Theta) = 2\pi i \lambda_1 I(\Theta),$$

[1] *Voir* par exemple B. L. VAN DER WAERDEN, *op. cit.* § 109, S. 138, et § 110.

de sorte que la condition relative à C est vérifiée d'elle-même si $I(\Theta) = 0$. Nous pouvons donc déjà énoncer le résultat suivant :

Soit Θ *un diviseur, d'indice total* $I(\Theta) = 0$; *si toute matrice* Ψ, *telle que* $\Theta\Psi\Theta^{-1}$ *soit partout fini, a toutes ses racines caractéristiques égales, le diviseur* Θ *correspond à une représentation de* $\mathfrak{G}$.

Considérons maintenant le cas où C a au moins deux racines caractéristiques distinctes, et peut par suite s'écrire sous la forme

$$C = \begin{Vmatrix} C' & 0 \\ 0 & C'' \end{Vmatrix}$$

où C', C'' sont des matrices canoniques de degrés respectifs r', r'' ($r' + r''$ étant égal à r) qui n'ont *aucune racine caractéristique commune* l'une avec l'autre. Adoptons maintenant la notation suivante, pour la commodité de l'écriture : chaque fois qu'une matrice M de degré r sera de la forme

$$M = \begin{Vmatrix} M' & M_1 \\ 0 & M'' \end{Vmatrix}$$

M' étant de degré r', M'' de degré r'', et M_1, par conséquent, une matrice à r' lignes et r'' colonnes, nous écrirons

$$M = (M', M'', M_1).$$

Le produit de M et de $N = (N', N'', N_1)$ est alors

$$MN = (M'N', M''N'', M'N_1 + M_1N''),$$

et l'inverse de M est

$$M^{-1} = (M'^{-1}, M''^{-1}, -M'^{-1}M_1M''^{-1}),$$

M étant régulière si M', M'' le sont et alors seulement.

En particulier, puisque la matrice Θ n'a que des éléments nuls au-dessous de la diagonale principale, on pourra l'écrire sous la forme $\Theta = (\Theta', \Theta'', \Theta_1)$, et l'on aura alors

$$\Theta C\Theta^{-1} = (\Theta'C'\Theta'^{-1},\quad \Theta''C''\Theta''^{-1},\quad -\Theta'C'\Theta'^{-1}\Theta_1\Theta''^{-1} + \Theta_1C''\Theta''^{-1}).$$

Par hypothèse, cette matrice, que nous noterons $M = (M', M'', M_1)$, est holomorphe en τ; on voit d'ailleurs que l'on a

$$M' = \Theta'C'\Theta'^{-1}, \qquad M'' = \Theta''C''\Theta''^{-1}, \qquad M_1 = -M'\Theta_1\Theta''^{-1} + \Theta_1\Theta''^{-1}M''.$$

Posons $\Theta_1 \Theta''^{-1} = X$, de sorte que l'on aura

$$- M'X + XM'' = M_1.$$

Par rapport aux $r'r''$ éléments de la matrice X, cette relation constitue un système de $r'r''$ équations linéaires, non homogènes, à coefficients holomorphes en τ; *le déterminant de ce système ne s'annule pas en* $\tau = 0$, car sinon le système d'équations *homogènes* $M'(0)X = XM''(0)$ aurait une solution non nulle; or, l'équation caractéristique de M' est

$$|M' - \lambda . 1_{r'}| = |C' - \lambda . 1_{r'}| = 0,$$

de sorte qu'en faisant $\tau = 0$ dans cette équation on voit que $M'(0)$ a mêmes racines caractéristiques que C', et de même $M''(0)$ a mêmes racines caractéristiques que C''; $M'(0)$ et $M''(0)$ n'ont donc aucune racine caractéristique en commun, et l'équation $M'(0)X = XM''(0)$ n'a d'autre solution que $X = 0$ (¹). Par conséquent la matrice $X = \Theta_1 \Theta''^{-1}$, satisfaisant à l'équation $- M'X + XM'' = M_1$, est holomorphe en τ, et par suite la matrice $U = (1_{r'}, 1_{r''}, - X)$ est unitaire. Or, on a

$$U\Theta = (\Theta', \Theta'', 0),$$

c'est-à-dire que le diviseur local Θ n'est autre que le diviseur local $(\Theta', \Theta'', 0)$. On vérifie d'ailleurs immédiatement, en se reportant aux définitions, que Θ', Θ'' sont nécessairement eux-mêmes des diviseurs locaux, de degrés r', r'' respectivement.

Les raisonnements ci-dessus étant valables en tout point P, on voit que *si* C *a au moins deux racines caractéristiques distinctes*, il y a deux

(¹) Rappelons brièvement la démonstration de ce résultat connu. Soient A, B deux matrices de degrés respectifs p, q; supposons qu'il existe $X \neq 0$, à p lignes et q colonnes, telle que $AX = XB$. Alors, quel que soit le polynome $P(x)$, on aura évidemment $P(A)X = XP(B)$. Prenons en particulier pour $P(x)$ le polynome caractéristique de A, $P(x) = |A - x . 1_p|$; on aura, comme on sait, $P(A) = 0$, donc $XP(B) = 0$, et par suite $|P(B)| = 0$, c'est-à-dire que $P(B)$ a au moins une racine caractéristique nulle; or, si l'on désigne par β_i les racines caractéristiques de B, celles de $P(B)$ sont $P(\beta_i)$: l'un des β_i est donc racine de $P(x) = 0$, c'est-à-dire que A et B ont bien une racine caractéristique commune.

diviseurs Θ', Θ'' sur $\mathfrak{r}$, de degrés respectifs r', r'', de manière qu'en tout point Θ puisse s'écrire sous la forme

$$\Theta = \begin{Vmatrix} \Theta' & 0 \\ 0 & \Theta'' \end{Vmatrix}.$$

On dira, dans ce cas, que Θ *est complètement décomposable et qu'il est la somme des deux diviseurs* Θ', Θ''.

On voit donc déjà que *si un diviseur, d'indice total* o, *n'est pas équivalent à un diviseur complètement décomposable, il correspond certainement à une représentation de* $\mathfrak{G}$.

Considérons maintenant de nouveau le diviseur Θ, somme de Θ' et de Θ''. Les matrices

$$\Psi_1 = \begin{Vmatrix} 1_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \Psi_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{r''} \end{Vmatrix}$$

étant évidemment telles que $\Theta\Psi_1\Theta^{-1}$, $\Theta\Psi_2\Theta^{-1}$ soient finis partout, écrivons les conditions correspondantes auxquelles doit satisfaire Θ. Ce sont

$$\sum_{\mathrm{P}} \oint_{\mathrm{P}} Sp(\Psi_1 \Theta^{-1} d\Theta) = \sum_{\mathrm{P}} \oint_{\mathrm{P}} Sp(\Theta'^{-1} d\Theta') = 2\pi i \, \mathrm{I}(\Theta') = 0,$$

et de même $\mathrm{I}(\Theta'') = 0$: *les deux diviseurs* Θ', Θ'' *dont* Θ *est la somme doivent être eux-mêmes d'indice total* o. Si Θ' ni Θ'' n'est équivalent à un diviseur complètement réductible, ils correspondront alors respectivement à des représentations $\mathfrak{M}'_{\mathrm{S}}$, $\mathfrak{M}''_{\mathrm{S}}$ de degrés r', r'', et Θ correspondra à la représentation

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{S}} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{M}'_{\mathrm{S}} & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}''_{\mathrm{S}} \end{Vmatrix}.$$

Sinon, on recommencera sur Θ', Θ'', ce qui fournit évidemment le résultat complet suivant :

Soit Θ *un diviseur de degré* r *sur* $\mathfrak{r}$, *équivalent à la somme de diviseurs* $\Theta_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, m)$ *de degrés respectifs* r_ν, *dont aucun ne soit équivalent à un diviseur complètement décomposable. Alors la condition nécessaire est suffisante, pour que* Θ *corresponde à une représentation* $\mathfrak{M}_{\mathrm{S}}$ *de* $\mathfrak{G}$, *est que chacun des diviseurs* Θ_ν *soit d'indice* *total* $I(\Theta_\nu) = 0$; *dans ce cas, chaque diviseur* Θ_ν *correspondra à une représentation* $\mathfrak{M}_S^{(\nu)}$ *de* $\mathfrak{G}$, *et* Θ *correspondra à la somme de ces représentations.*

Il résulte également de l'analyse ci-dessus que, si Θ est un diviseur sur $\mathfrak{r}$, *correspondant à une représentation* et par suite à une classe de représentations, et s'il y a une matrice Ψ, *ayant au moins deux racines caractéristiques distinctes*, telle que $\Theta\Psi\Theta^{-1}$ soit partout fini, alors l'une des représentations auxquelles correspond Θ est complètement réductible. Si, $\mathfrak{M}_S$ étant donnée, on prend pour Θ une matrice régulière du module $(\mathfrak{M}_S, 1_r)$, les matrices $\Lambda = \Theta\Psi\Theta^{-1}$ ne sont pas autre chose que celles du *noyau* $(\mathfrak{M}_S)$. On a donc le théorème suivant :

Pour qu'une représentation $\mathfrak{M}_S$ *soit équivalente à une représentation complètement réductible, il faut et il suffit que son noyau contienne des matrices ayant au moins deux racines caractéristiques distinctes.*

Une classe de représentations sera dite *complètement réductible* si elle contient une représentation complètement réductible. *Si donc une représentation appartient à une classe non complètement réductible, toutes les matrices de son noyau ont toutes leurs racines caractéristiques égales;* ce noyau est une *algèbre nilpotente avec élément unité*; on sait qu'on ne sait rien sur cette sorte d'algèbre (1).

CHAPITRE III.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES.

Nous avons obtenu ainsi une correspondance biunivoque entre des êtres transcendants, les *classes de représentations de* $\mathfrak{G}$, et des êtres algébriques, les *classes de diviseurs sur* $\mathfrak{r}$ (relatives à la signature donnée) qui satisfont à certaines conditions que nous avons énoncées. Si l'on

(1) « *We shun the somewhat unpleasant radicals* », dit dans un Mémoire récent (*Ann. of Maths.*, vol. 37, 1936, p. 711) H. Weyl, de la part de qui, moins que de tout autre, on aurait attendu cette profession de foi réactionnaire.

prend $r=1$, $n(\mathrm{P})=1$ partout, on retombe sur la correspondance entre les classes de diviseurs *au sens classique* et les classes de représentations de degré 1 du *groupe de Betti* de la surface de Riemann $\mathfrak{r}$, qui est à la base de la théorie des fonctions abéliennes.

De nos résultats on conclut facilement que les fonctions méromorphes $f(\mathfrak{M}_\mathrm{S})$ des représentations $\mathfrak{M}_\mathrm{S}$ (c'est-à-dire les fonctions analytiques, partout méromorphes, des coefficients des matrices $\mathfrak{M}_{\mathrm{A}_i}$, $\mathfrak{M}_{\mathrm{B}_i}$, $\mathfrak{M}_{\mathrm{C}_\mu}$), *constantes sur chaque classe de représentations équivalentes*, forment un *corps de fonctions algébriques*, dont la dimension a été trouvée plus haut et est égale à

$$r^2(p-1)+1+\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta}\mathrm{N}_{\mu\alpha}\mathrm{N}_{\mu\beta}.$$

Ce corps, pour $r=1$, $n(\mathrm{P})=1$, n'est autre que le corps des fonctions abéliennes. Dans le cas général, je propose de l'appeler *le corps des fonctions hyperabéliennes* relatif au degré r et à la signature $n(\mathrm{P})$.

On sait que dans le cas classique, les classes de diviseurs (c'est-à-dire les classes de diviseurs de degré 1 au sens de notre théorie) forment un groupe abélien; d'où l'on conclut aisément que les fonctions abéliennes possèdent un théorème d'addition. Ici nous disposons, sur les représentations d'une part, sur les diviseurs de l'autre, de *deux* opérations : la *somme* d'abord, qui a été définie, et qui fait passer de deux représentations (ou de deux diviseurs) de degrés respectifs r, r' à une représentation (ou à un diviseur) de degré $r+r'$; ensuite le *produit kroneckérien*, dans le sens où on l'entend dans la théorie des représentations, et qui fait passer, de même, de deux éléments de degrés r, r' à un élément de degré rr'. On démontre sans aucune peine que si, dans une somme ou un produit, on remplace les deux éléments qui y figurent par des éléments équivalents au sens de notre théorie, la somme ou le produit est remplacé par un élément équivalent; de sorte que l'on a ainsi la définition de la somme et du produit pour les *classes* de représentations (ou de diviseurs); enfin la correspondance entre classes de représentations et classes de diviseurs n'est pas altérée par ces opérations.

On a obtenu ainsi un équivalent algébrique de l'algèbre des classes de représentations du groupe $\mathfrak{G}$. Par exemple, notre théorie permet de trouver *algébriquement* les extensions algébriques de k données par leur ramification et par leur groupe de Galois. Ce problème se ramène, en effet, à la détermination d'une matrice Θ du module $(\mathfrak{M}_S, 1_r)$ lorsque $\mathfrak{M}_S$ est une représentation du quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ de $\mathfrak{G}$ par un sous-groupe invariant donné $\mathfrak{G}_0$, *d'indice fini dans* $\mathfrak{G}$. Or, j'ai démontré [1] que les représentations $\mathfrak{M}_S$ d'un groupe $\mathfrak{G}$ qui se composent d'un nombre fini de matrices distinctes sont entièrement caractérisées par le fait qu'elles satisfont, au sens de l'algèbre des représentations, à une équation algébrique à coefficients entiers rationnels. Reprenant les notations de la Note des *Comptes rendus* que je viens de citer, désignons par $f(x) - g(x) = 0$ l'équation à laquelle satisfait, dans l'algèbre des représentations, une représentation donnée de $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, $f(x)$ et $g(x)$ étant deux polynomes à coefficients entiers rationnels positifs; comme dans cette Note, M étant une matrice quelconque de degré r, je désigne par $f\langle M \rangle$ la matrice de degré $f(r)$ qui lui correspond au moyen de f dans l'algèbre des représentations du groupe linéaire; en d'autres termes, si $\mathfrak{D}$ est la représentation du groupe linéaire de degré r qui fait correspondre à toute matrice M cette matrice elle-même, $\mathfrak{D}^p$ sera la représentation de degré r^p qui à toute M fait correspondre le produit kroneckérien de M p fois par elle-même, $\mathfrak{D}^0 = 1$ sera la représentation de degré 1 qui à toute M fait correspondre 1, $a_p\,\mathfrak{D}^p$ sera la somme de a_p représentations $\mathfrak{D}^p$ et sera de degré $a_p r^p$, et, si $f(x) = \sum_p a_p x^p$, $f(\mathfrak{D})$ sera la somme des représentations $a_p\,\mathfrak{D}^p$ et sera de degré $f(r)$; $f\langle M \rangle$ sera alors la matrice de degré $f(r)$ qui correspond à M dans cette représentation $f(\mathfrak{D})$. Soit donc $\mathfrak{M}_S$ une représentation de degré r de $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, satisfaisant à l'équation $f(x) - g(x) = 0$, c'est-à-dire que les représentations $f\langle \mathfrak{M}_S \rangle$ et $g\langle \mathfrak{M}_S \rangle$ sont semblables, et *a fortiori* équivalentes au sens de notre théorie; soit Θ une matrice régulière du module $(\mathfrak{M}_S, 1_r)$: les diviseurs $f\langle \Theta \rangle$ et $g\langle \Theta \rangle$ sont donc équivalents. Puisqu'on peut considérer comme connue, par des opérations purement algébriques à partir du corps k, l'algèbre des diviseurs, on pourra déterminer d'une manière *algébrique* les diviseurs Θ, tels

[1] *Comptes rendus*, **199**, 1934, p. 180.

que $f<\Theta_1>$, $g<\Theta_1>$ soient équivalents; un tel diviseur étant supposé trouvé, il y aura donc une matrice F régulière de degré $f(r)=g(r)$ sur k, telle que les diviseurs $f<\Theta_1>$ F et $g<\Theta_1>$ soient identiques. Reste à déterminer la matrice Θ elle-même : or, on montre facilement qu'elle satisfait à une équation

$$f<\Theta>\mathrm{F}=\mathrm{A}g<\Theta>,$$

A étant une matrice constante, et que réciproquement cette équation permet de déterminer la matrice constante A et la matrice Θ cherchée. Le problème est donc résolu. Si l'on suppose qu'il s'agisse d'une extension relativement cyclique de k (cas auquel peuvent se ramener toutes les extensions relativement abéliennes), et qu'on fasse en conséquence $r=1$, la méthode que nous venons d'esquisser n'est autre que la méthode classique, par division des périodes des fonctions abéliennes et extraction d'une racine $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de k.

Je n'en dirai pas plus sur les directions dans lesquelles on peut songer à prolonger et appliquer la théorie exposée dans ce mémoire : pour mieux dire, je n'ai fait que démontrer, par le théorème de la deuxième Partie, la possibilité d'une théorie nouvelle qui reste à édifier. Pour une partie au moins de celle-ci, il est vraisemblable que la théorie classique des fonctions abéliennes pourra servir de modèle; il faudra en particulier rechercher si nos fonctions sont susceptibles de s'exprimer au moyen de fonctions transcendantes qui généralisent les fonctions thêta et puissent rendre les mêmes services. Il sera peut-être intéressant, d'autre part, d'étudier les intégrales des différentielles partout finies des modules ($\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}'_S$) et leurs périodes : on trouve par exemple que celles-ci satisfont à des relations bilinéaires qui généralisent celles de Riemann. Les représentations des groupes $\mathfrak{G}$ par des matrices $\mathfrak{M}_S$ *unitaires-orthogonales* (c'est-à-dire qui laissent invariantes la forme $\Sigma x_i\bar{x}_i$) ont des propriétés spéciales, et jouent certainement un grand rôle : en particulier, deux représentations de cette espèce ne peuvent être équivalentes sans être semblables; on serait tenté de conjecturer que toute classe de représentations contient une représentation unitaire-orthogonale, mais ce résultat n'est certainement pas vrai sans restriction. Enfin il est vraisemblable que la loi de réciprocité d'Artin, qu'il est possible d'énoncer pour les extensions relativement abéliennes d'un corps k de fonctions algébriques et qui est alors l'expression de la dualité entre éléments du groupe de Betti sur la surface de Riemann, possède un analogue non abélien qui trouvera sa place dans la nouvelle théorie. Je me borne, ici, à cette brève énumération de quelques problèmes, sur certains desquels je compte revenir en une autre occasion. En tout cas, le champ est assez vaste qui s'offre là aux investigations des chercheurs de bonne volonté.