JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GASTON JULIA

Sur la résolubilité des systèmes d'équations linéaires dans un espace hilbertien

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 425-437.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_425_0>

Sur la résolubilité des systèmes d'équations linéaires dans un espace hilbertien;

PAR GASTON JULIA.

Dans un beau Mémoire inséré au tome 25 (1908) du *Circolo mathematico di Palermo*, M. E. Schmidt a étudié la résolubilité dans un espace hilbertien des systèmes

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = y_i \qquad (i=1, 2, \ldots, \infty), \tag{1}$$

c'est-à-dire la recherche des x_k, tels que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ converge, lorsque sont donnés les y_i, tels (¹) que $\sum_{k=1}^{\infty} |y_i|^2$ converge. Il a donné, notamment, une condition nécessaire et suffisante pour que le système (1) soit résoluble quel que soit le vecteur $Y(y_1, y_2, \ldots)$ de l'espace hilbertien.

Dans le Mémoire cité se trouve une démonstration de la suffisance de cette condition, tandis que dans la *première édition* du traité de Kowalewski, *Determinantentheorie*, se trouve démontrée sa nécessité. Ces deux démonstrations sont toutes deux d'un caractère algébrique très net.

Elles laissaient désirer une démonstration nouvelle, d'un caractère géométrique qui la rende simple et intuitive, et surtout donnant à la fois la nécessité et la suffisance de la condition.

Le présent Mémoire contient l'exposé d'une telle démonstration.

(¹) Les y_i sont alors les coordonnées d'un vecteur Y de l'espace hilbertien.

On transforme le problème en un problème géométrique : recherche d'un vecteur X d'un espace hilbertien H, satisfaisant au système d'équations

$$(1) \qquad (A_i^*, X) = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Dans ce système (1), A_i^* désigne le vecteur donné $(\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{i2}, \bar{a}_{i3}, \ldots, \bar{a}_{ik}, \ldots)$, X désigne le vecteur inconnu $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$, en sorte que (A_i^*, X) est leur produit scalaire. Les y_i sont les coordonnées d'un vecteur Y donné.

Le problème posé est de déterminer *les coordonnées* de X connaissant celles de Y, le système de référence (φ_i) de H étant choisi à l'avance. Mais ce problème n'est autre que celui de la détermination du *vecteur* X lui-même, connaissant Y. Cette détermination peut se faire par celle des coordonnées de X dans un (*nouveau*) système de référence, à déterminer, différent de celui (ancien) qui sert à repérer Y, lié à celui-là par les données du problème (les A_i^*), de façon que les *nouvelles* coordonnées du vecteur inconnu X soient liées aux y_i par un système (2) d'équations, plus simple que (1) et *permettant le calcul effectif*. On n'aperçoit à priori qu'une manière simple de procéder, c'est de réaliser pour (2) un système *récurrent*.

C'est précisément ainsi qu'on va procéder, et l'on constatera que le problème posé se résout alors de la manière la plus aisée. Le système nouveau de référence qui s'introduit naturellement n'est autre que le système orthonormal classique que M. E. Schmidt a associé au système des A_i^* donnés.

Comme on le verra au n° **8**, les notations A_i^* ont été choisies pour rappeler la signification géométrique de ces vecteurs A_i^* lorsque les formules

$$(1) \qquad y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$$

définissent un opérateur borné A de l'espace hilbertien H.

* * *

1. Envisageons le système (1) $(A_i^*, X) = y_i$, où l'inconnue X est un vecteur de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots)$ telles que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ converge. Les A_i^* étant supposés indépendants, supposons d'abord que la variété fermée

$$V = [A_1^*, A_2^*, \ldots, A_i^*, \ldots] \quad \text{soit} \quad \equiv H,$$

c'est-à-dire à tout l'espace hilbertien. Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ la base des coordonnées

$$x_i = (\varphi_i, X),$$
$$y_i = (\varphi_i, Y).$$

Il est possible de trouver un changement de coordonnées $X = U\xi$ de l'espace H tel que, les coordonnées ξ_i du vecteur inconnu X dans la nouvelle base s'obtiennent à partir des y_i, coordonnées connues de Y dans l'ancienne base, par un système *récurrent*.

Dans ce changement de coordonnées, le même être géométrique (vecteur) sera désigné par deux lettres correspondantes romaine et grecque, suivant qu'on l'envisage dans l'ancienne base ou dans la nouvelle. On aura ainsi les relations symboliques

$$X = U\xi,$$
$$\xi = U^* X,$$

résumant les relations

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty),$$

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}^* x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_{ki} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty),$$

entre les coordonnées x_i et ξ_i d'un même vecteur, appelé X ou ξ selon qu'on l'envisage dans l'ancienne base ou dans la nouvelle.

U est une matrice unitaire d'associée U^*. $UU^* = U^*U = 1$.

Le système (1) devient en effet, par le changement $X = U\xi$,

$$(A_i^*, U\xi) = (U^* A_i^*, \xi) = y_i.$$

Le système (2) $(U^* A_i^*, \xi) = y_i$ sera *récurrent* si la nouvelle base orthonormale (ε_i) de coordonnées est choisie telle que $U^* A_i^*$ ait ses coordonnées nulles sur $(\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \ldots)$, c'est-à-dire

$$(\varepsilon_k, U^* A_i^*) = 0 \quad \text{pour} \quad k > i,$$
$$(\varepsilon_k, U^* A_i^*) \neq 0 \quad \text{pour} \quad k = i.$$

Il faut donc et il suffit que U, *unitaire, soit tel que*

$$(U\varepsilon_k, A_i^*) \begin{cases} = 0 & \text{pour} \quad k > i, \\ \neq 0 & \text{pour} \quad k = i. \end{cases}$$

Il est visible *que le système orthonormal complet* E_k, déduit des A_i^* par la méthode classique d'orthonormalisation de *Schmidt*, répond à la question. En effet, E_1 est porté par A_i^*; E_2 orthogonal à E_1, donc à A_1^*, est dans la variété $[A_1^*, A_2^*]$ et $(E_2, A_2^*) \neq 0$; E_3 orthogonal à E_1, E_2, donc à A_1^*, A_2^*, est dans la variété $[A_1^*, A_2^*, A_3^*]$ et $(E_3, A_3^*) \neq 0$, etc.

Choisissons donc pour les $E_k = U\varepsilon_k$ (¹) le système orthonormal complet de Schmidt déduit des A_k^*. La matrice

$$U = \| E_1, E_2, \ldots \| \quad (^2)$$

est unitaire, et, par le changement de coordonnées $X = U\xi$, le système (1) est ramené au système récurrent

$$(U^* A_i^*, \xi) = y_i. \tag{2}$$

Les solutions ξ du système (2) correspondent aux solutions X du

---

(¹) Cela revient à prendre pour nouvelle base (ε_k) de coordonnées les vecteurs désignés par E_k dans l'ancienne base.

Si E_k a pour coordonnées dans l'ancienne base

$$u_{ik} = (\varphi_i, E_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

on aura

$$(\varphi_i, X) = x_i = \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\xi_k, \qquad \text{où} \qquad \xi_k = (E_k, X) = (\varepsilon_k, \xi).$$

(²) Dans cette façon d'écrire la matrice U, chaque lettre E_k symbolise la $k^{\text{ième}}$ colonne, composée des coordonnées de E_k dans l'ancienne base

$$E_k(u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{ik}, \ldots).$$

système (1) par $\xi = U^{\star}X$, c'est-à-dire

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_{ki} x_k.$$

Réciproquement, à toute solution ξ du système (2) correspondra par $X = U\xi$ une solution du système (1), c'est-à-dire un vecteur X dont les coordonnées x_i, dans la base (φ_i), seront données par

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \xi_k.$$

2. Détaillons le système (2)

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 = y_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{p1}\xi_1 + \dots + \alpha_{pp}\xi_p = y_p \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad (\alpha_{pp} \neq 0 \text{ pour } p = 1, 2, \dots, \infty).$$

$(\bar{\alpha}_{p1}, \bar{\alpha}_{p2}, \dots, \bar{\alpha}_{pp}, 0, 0, \dots)$ sont les coordonnées, dans la nouvelle base, du vecteur connu $U^{\star}A_p^{\star}$ dénoté $A_p^{\star}$ dans l'ancienne base.

Nous désignerons par α la matrice récurrente

$$\alpha = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & . & . & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & . & . & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & . & . & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ii} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \end{Vmatrix}$$

et par α_p sa réduite d'ordre p. Nous désignerons par $\alpha^{\star}$ et $\alpha_p^{\star}$ les associées de α et α_p. Nous désignerons par $\xi^{(p)}$ le vecteur, réduit de ξ dans la nouvelle base, dont les composantes par rapport à la *nouvelle* base sont $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, 0, 0, \dots)$. Nous désignerons par $Y^{(p)}$ le vecteur, réduit de Y dans *l'ancienne* base, dont les composantes par rapport à *l'ancienne* base sont $(y_1, y_2, \dots, y_p, 0, 0, \dots)$.

On a alors

$$(3) \qquad Y^{(p)} = \alpha_p \xi^{(p)}.$$

La matrice récurrente α_p possède une inverse β_p, car tous les $\alpha_{ii} \neq 0$, et l'on a

$$\xi^{(p)} = \beta_p Y^{(p)} \tag{4}$$

avec

$$\alpha_p \beta_p = \beta_p \alpha_p = 1.$$

β_p est, comme α_p, une matrice récurrente d'ordre p.

Désignons suivant l'habitude par $n(\alpha_p \alpha_p^*)$ le *minimum* de la forme hermitienne positive

$$(\xi^{(p)}, \alpha_p \alpha_p^* \xi^{(p)}) = \alpha_p \alpha_p^* (\xi^{(p)}, \xi^{(p)}) = \| \alpha_p^* \xi^{(p)} \|^2$$

sur la sphère $\| \xi^{(p)} \|^2 = |\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_p|^2 = 1$. On sait, en outre, que le *maximum* de la forme hermitienne positive

$$\beta_p^* \beta_p (Y^{(p)}, Y^{(p)}) = (Y^{(p)}, \beta_p^* \beta_p Y^{(p)}),$$

sur

$$\| Y^{(p)} \|^2 = |y_1|^2 + \ldots + |y_p|^2 = 1,$$

n'est autre que le *carré de la borne supérieure* de l'opérateur β_p opérant dans l'espace de $Y^{(p)}$: c'est le *maximum* de $\| \beta_p Y^{(p)} \|^2$ pour $\| Y^{(p)} \|^2 = 1$. Nous le désignons par $M_{\beta_p^* \beta_p}$ suivant l'usage.

On sait que $n(\alpha_p \alpha_p^*) \geqq \frac{1}{M_{\beta_p^* \beta_p}}$ est une conséquence immédiate de $\alpha_p \beta_p = 1$; car l'on a pour $\| Z \|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_p|^2 = 1$,

$$1 = (Z, \alpha_p \beta_p Z)^2 = (\alpha_p^* Z, \beta_p Z)^2 \leqq \| \alpha_p^* Z \|^2 . \| \beta_p Z \|^2 \leqq \| \alpha_p^* Z \|^2 . M_{\beta_p^* \beta_p}.$$

3. *Supposons que le système* (1) *soit résoluble quel que soient les* y_i *d'une suite telle que* $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2$ *converge.* [Nous dirons que ce sont les y_i d'un vecteur Y, $y_i = (\varphi_i, Y)$]. La solution X de (1) est alors *unique*, car la variété $V = [A_1^*, A_2^*, \ldots, A_i^*, \ldots]$ étant identique à H, les équations homogènes, où $y_i = 0$, n'ont pas de solution $\neq 0$. Cette solution unique X, existant pour tout Y, a, dans la nouvelle base, des coordonnées ξ_i vérifiant le système (2) et telles que $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2$ converge.

Il en résulte que le système réduit (3), résoluble quel que soit $Y^{(p)}$, fournit pour $\xi^{(p)}$ une solution dont les coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_p$ sont telles que $\sum_{1}^{\infty} |\xi_p|^2$ converge lorsque $\sum_{1}^{\infty} |y_p|^2$ converge. Cette solution est d'ailleurs donnée par $\xi^{(p)} = \beta_p Y^{(p)}$. Il en résulte que la matrice récurrente β, dont β_p est la réduite d'ordre p, définit, pour chaque vecteur $Y(y_1, y_2, \ldots, y_p, \ldots)$ un vecteur $\xi = \beta Y$, solution de (2), par des formules linéaires

$$\xi_i = \beta_{i1} y_1 + \ldots + \beta_{ii} y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty),$$

telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_{i1} y_1 + \ldots + \beta_{ii} y_i|^2$$

converge *pour tout* Y. Le théorème d'Hellinger-Tœplitz montre donc que β *est une matrice bornée*. Soit μ sa borne, c'est une borne pour toutes les β_p et les β_p^*. Donc $M_{\beta_p^* \beta_p} \leqq \mu^2$. On aura donc $n(\alpha_p \alpha_p^*) \geqq \frac{1}{\mu^2}$ quel que soit p. Or on sait que les $n(\alpha_p \alpha_p^*)$ décroissent lorsque p croît. Ils ont donc une limite $\nu^2 > 0$, lorsque $p = \infty$,

$$\nu^2 = \lim_{p=\infty} n(\alpha_p \alpha_p^*) \geqq \frac{1}{\mu^2} > 0.$$

4. Pour exprimer cette condition avec les données du système (1), notons que $n(\alpha_p \alpha_p^*)$ est le minimum de la forme $\| \alpha_p^* \xi^{(p)} \|^2$ sur $\| \xi^{(p)} \|^2 = 1$; c'est la plus petite valeur propre de $\alpha_p \alpha_p^*$. Nous allons exprimer $\alpha_p^* \xi^{(p)}$ en fonction des vecteurs $U^* A_i^*$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$ qui figurent dans le système (2). Les coordonnées de $U^* A_i^*$ dans la nouvelle base sont

$$(\bar{\alpha}_{i1}, \bar{\alpha}_{i2}, \ldots, \bar{\alpha}_{ii}, 0, 0, \ldots).$$

D'autre part, les coordonnées de $\xi^{(p)}$ étant $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 0, 0, \ldots)$, α_p étant la réduite d'ordre p de la matrice α, il est clair que

$$\alpha_p^* = \begin{Vmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \bar{\alpha}_{22} & \ldots & \bar{\alpha}_{p1} \\ 0 & \bar{\alpha}_{22} & \ldots & \bar{\alpha}_{p2} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \bar{\alpha}_{pp} \end{Vmatrix}$$

donne, pour la k^e coordonnée de $\alpha_p^\star \xi^{(p)}$,

$$(\varepsilon_k, \alpha_p^\star \xi^{(p)}) = \bar{\alpha}_{kk}\xi_k + \bar{\alpha}_{k+1,k}\xi_{k+1} + \ldots + \bar{\alpha}_{pk}\xi_p \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Il en résulte aussitôt que

$$\alpha_p^\star \xi^{(p)} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i . \mathrm{U}^\star \mathrm{A}_i^\star = \mathrm{U}^\star \sum_{i=1}^{p} \xi_i \mathrm{A}_i^\star .$$

Mais $\mathrm{U}^\star$ étant unitaire, comme U, on a

$$\| \alpha_p^\star \xi^{(p)} \|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{p} \xi_i \mathrm{A}_i^\star \right\|^2 .$$

Donc $n(\alpha_p \alpha_p^\star)$ est aussi le minimum, sur $\sum_1^p |\xi_i|^2 = 1$, de la forme hermitienne

$$\mathrm{H}_p(\xi^{(p)}, \xi^{(p)}) = \left\| \sum_{i=1}^{p} \xi_i \mathrm{A}_i^\star \right\|^2 .$$

Or, $\mathrm{H}_p(\xi^{(p)}, \xi^p)$ *est précisément la forme considérée par E. Schmidt* dans son Mémoire. Il en résulte que ν^2, limite pour $p = \infty$ des $n(\alpha_p \alpha_p^\star)$, est identique à la *limite des minima successifs des formes* $\mathrm{H}_p(\xi^{(p)}, \xi^{(p)})$ considérées par Schmidt. Ces formes sont constituées à partir des seuls éléments $\mathrm{A}_i^\star$ du système initial (1). *Une condition nécessaire pour que* (1) *soit résoluble en* X, *quel que soit le vecteur donné* Y, *est donc que* ν^2, *limite pour* $p = \infty$ *des* $n(\mathrm{H}_p)$ *soit* > 0. Nous reviendrons plus loin sur le cas où $\mathrm{V} = [\mathrm{A}_1^\star, \mathrm{A}_2^\star, \ldots]$ ne remplit pas H.

5. La condition est *suffisante.*

Supposons $\nu^2 > 0$. Il en résulte que, pour tout p,

$$n(\alpha_p \alpha_p^\star) \geqq \nu^2 > 0.$$

Envisageons le système (2) ou bien (3) que l'on résoudra par (4) pour chaque p, quel que soit $\mathrm{Y}^{(p)}$. Il s'agit de voir si $\xi^{(p)}$ tend vers une limite ξ pour $p = \infty$, lorsque $\mathrm{Y}^{(p)}$ tend vers le vecteur Y correspondant. Tout revient à voir si $\sum_1^p |\xi_i|^2$ reste borné pour $p = \infty$, les ξ_i, fournis par (3), étant les p premières coordonnées de ξ. Il en résultera que, lorsque p deviendra infini, le vecteur ξ de coordonnées $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ sera la limite forte du vecteur $\xi^{(p)}$ et satisfera au système (2). Remarquons pour cela que, α_p étant une matrice d'ordre fini p,

$$n(\alpha_p \alpha_p^*) = n(\alpha_p^* \alpha_p);$$

car les deux matrices $\alpha_p \alpha_p^*$ et $\alpha_p^* \alpha_p$ ont même spectre et $n(\alpha_p \alpha_p^*)$ est la plus petite valeur propre. Il en résulte que $n(\alpha_p^* \alpha_p) \geqq \nu^2$. Donc $\alpha_y^* \alpha_p(\xi^{(p)}, \xi^{(p)}) \geqq \nu^2$ sur la sphère $\| \xi^{(p)} \|^2 = |\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_p|^2 = 1$. Or

$$\alpha_p^* \alpha_p(\xi^{(p)}, \xi^{(p)}) = (\xi^{(p)}, \alpha_p^* \alpha_p \xi^{(p)}) = \| \alpha_p \xi^{(p)} \|^2.$$

Donc on aura, pour tout $\xi^{(p)}$,

$$\| \alpha_p \xi^{(p)} \|^2 \geqq \nu^2 . \| \xi^{(p)} \|^2.$$

Il en résulte en particulier que le *déterminant de la matrice* α_p est $\neq 0$, car, dans le cas contraire, l'équation $\alpha_p \xi^{(p)} = 0$ aurait une solution $\xi^{(p)} \neq 0$ et l'on devrait avoir, pour cette solution,

$$0 = \| \alpha_p \xi^{(p)} \|^2 \geqq \nu^2 \| \xi^{(p)} \|^2,$$

ce qui est impossible, puisque $\| \xi^{(p)} \| \neq 0$. L'équation (3) $\alpha_p \xi^{(p)} = Y^{(p)}$ est donc résoluble en $\xi^{(p)}$ quel que soit $Y^{(p)}$, et la solution $\xi^{(p)}$ est unique. En outre, la solution $\xi^{(p)}$ de (3) est liée à la donnée $Y^{(p)}$ par l'inégalité

$$\| Y^{(p)} \|^2 \geqq \nu^2 \| \xi^{(p)} \|^2,$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^p |\xi_i|^2 \leqq \frac{1}{\nu^2} \sum_1^p |y_i|^2.$$

Il en résulte que, pour tout Y, la série $\sum_1^\infty |y_i|^2$ étant convergente, la série $\sum_1^\infty |\xi_i|^2$ sera convergente et

$$\leqq \frac{1}{\nu^2} \sum_1^\infty |y_i|^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour tout vecteur Y, le système (2) admet une solution unique ξ, lorsque $n(H_p) \geqq \nu^2 > 0$ pour tout p, et l'on a

$$\| \xi \| \leqq \frac{1}{\nu} \| Y \|.$$

Comme $X = U\xi$, $\|X\| = \|\xi\|$, le système (1) admet bien une solution unique X et l'on a

$$\|X\| \leqq \frac{1}{\nu}\|Y\|,$$

ce qui montre que la condition est suffisante.

6. Il reste à examiner le cas où $V = [A_1^\star, A_2^\star, \ldots]$ *ne remplit pas tout l'espace* H. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, le système orthonormal E_k, fourni par la méthode de Schmidt, à partir des $A_k^\star$, *n'est pas complet;* la méthode du n° **1** doit être modifiée.

Mais on sait qu'alors la variété fermée $V' = H - V$, formée des vecteurs X orthogonaux à tous les $A_i^\star$, et par suite vérifiant les équations homogènes

$$(A_i^\star, X) = 0 \tag{1'}$$

n'est pas vide.

Toute solution X du système (1) peut se mettre, et d'une seule manière, sous la forme $X = \mathfrak{X} + \mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}$ appartenant à V et $\mathfrak{X}'$ à V'. On aura

$$(A_i^\star, X') = (A_i^\star, \mathfrak{X}) + (A_i^\star, \mathfrak{X}').$$

Puisque $(A_i^\star, \mathfrak{X}') = 0$, $\mathfrak{X}$ vérifiera

$$(A_i^\star, \mathfrak{X}) = (A_i^\star, X) = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Toute solution de (1) est la somme *d'une solution de* (1) *située dans* V, et d'une solution de (1'). La résolution du système (1) revient à la recherche des solutions $\mathfrak{X}$ *situées dans* V. Et, lorsqu'elle est possible, elle est *unique*. Car deux solutions distinctes de (1) ne peuvent différer que par un vecteur solution de (1'), donc situé dans V' : ces deux solutions ont même composante $\mathfrak{X}$ dans V.

7. La variété V *est un espace hilbertien* $\mathcal{H}$ *identique à* $[A_1^\star, A_2^\star, \ldots]$; le problème est de trouver les solutions X de (1) *situées dans* $\mathcal{H}$. C'est *exactement* le problème que nous venons de résoudre, car on y notera que dans les n^{os} **1** à **5** *rien n'oblige à supposer que l'espace de* Y *est le même que l'espace de* X. On peut imaginer que les y_i sont les coordonnées d'un vecteur Y décrivant un espace hilbertien H et les x_i sont les coordonnées d'un vecteur X décrivant *un autre espace hilbertien* $\mathcal{H}$, *auquel appartiennent tous les vecteurs* A_i^* de manière que $\mathcal{H} = [A_1^*, A_2^*, \ldots]$. Cela étant, on appliquera le changement de base $X = U\xi$ seulement à l'espace $\mathcal{H}$ et non à l'espace H de Y (comme cela a déjà été fait dans les numéros précédents). Tous les raisonnements faits subsistent sans modifications et l'on a le théorème général.

La condition nécessaire et suffisante pour que le système (1) *soit résoluble par un vecteur de* $\mathcal{H} = V = [A_1^*, A_2^*, \ldots]$ *quel que soit le vecteur* Y *de* H $\left(\text{c'est-à-dire les } y_i \text{ tels que} \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \text{ converge}\right)$, *c'est que la suite des minima* $n(H_p)$ *ait une limite* $\nu^2 > 0$ *lorsque p devient infini.*

On peut remarquer qu'ici $H_p(\xi^{(p)}, \xi^{(p)}) = \left\| \sum_{i=1}^{p} \xi_i A_i^* \right\|^2$ est une forme hermitienne définie pour tout vecteur $\xi^{(p)}$ de la variété

$$V^{(p)} = [A_1^*, \ldots, A_p^*],$$

réduite $p^{\text{ième}}$ de $V = \mathcal{H}$, et $n(H_p)$ est le minimum de H_p sur

$$\|\xi^{(p)}\|^2 = \sum_1^p \|\xi_i\|^2 = 1.$$

Mais *dans le calcul des* $n(H_p)$, *à partir des données* A_i^*, *rien ne distingue le cas* $V < H$ *du cas* $V \equiv H$. Lorsque $V \equiv H$, la solution X de (1) est unique dans H et elle est toujours située dans $V \equiv H$. Lorsque $V = \mathcal{H} < H$, la solution X de (1) *n'est jamais unique* dans H; mais elle est unique dans $V = \mathcal{H}$. Soit $\mathfrak{X}$ cette solution particulière. On a toutes les solutions de (1) dans H en ajoutant à la solution $\mathfrak{X}$ un vecteur quelconque de $V' = H - V$, c'est-à-dire la solution générale du système homogène (1′) : $(A_i^*, X) = 0$.

On peut noter que $\mathfrak{X}$ est la *solution de plus petit module de* (1) *dans* H.

8. Lorsque la série $\sum_{i=1}^{\infty} |(A_i^*, X)|^2$ converge quel que soit X de H, les vecteurs $A_i^\star$ forment un système L et les formules $y_i = (A_i^\star, X)$, $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ définissent une transformation de l'espace H en lui-même, un opérateur linéaire A faisant correspondre Y de coordonnées $y_i = (\varphi_i, Y)$ à X de coordonnées $x_i = (\varphi_i, X)$. A *est alors borné* et sa matrice peut s'écrire en abrégé

$$A = \left\| \begin{array}{c} \overline{A_1^\star} \\ \vdots \\ \overline{A_2^\star} \\ \vdots \end{array} \right\|,$$

où $\overline{A_i^\star}$ *est mis pour une ligne de rang i formée des conjuguées des coordonnées du vecteur* $A_i^\star$.

L'opérateur A étant borné, son associé $A^\star$ est aussi borné et s'écrira

$$A^\star = \| A_1^\star A_2^\star \ldots A_k^\star \ldots \|,$$

où l'on a écrit en abrégé A_k à la place d'une $k^{\text{ième}}$ colonne formée des coordonnées du vecteur $A_k^\star$.

Cette notation explique pourquoi nous avons désigné par $A_i^\star$ les vecteurs figurant dans (1). La $k^{\text{ième}}$ colonne de $A^\star$ représente en effet les coordonnées du transformé $A^\star \varphi_k$ de φ_k($k^{\text{ième}}$ vecteur de base) par l'opérateur $A^\star$ et l'on a l'habitude d'écrire

$$A^\star \varphi_k = A_k^\star.$$

Les notations employées rappellent donc le *sens géométrique des* $A_k^\star$ lorsque les formules (1) définissent un opérateur borné A transformant $X(x_1, x_2, \ldots)$ en $Y(y_1, y_2, \ldots)$ par $Y = AX$, ce qui est un cas particulier du cas étudié aux nos **1** à **7**.

Lorsque A est borné, on verra immédiatement que $\nu^2 = \lim_{p=\infty} n(H_p)$ *n'est autre que la borne inférieure exacte* $n(AA^\star)$ *de la forme hermitienne* $AA^\star(X, X) = (X, AA^\star X) = \| A^\star X \|^2$ *sur la sphère*

$$\| X \|^2 = \sum_1^\infty |x_i|^2 = 1.$$

Cela résulte du fait que H_p n'est autre que la réduite d'ordre p de $AA^\star$, un calcul élémentaire le montre aussitôt; il en résulte que, pour tout X, $H_p(X, X)$ converge vers $AA^*(X, X)$, la matrice H_p convergeant fortement vers la matrice AA^*.

On en conclut que $n(AA^*) > 0$ est *la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un inverse borné à droite pour l'opérateur linéaire borné A.*

Toujours dans le cas où A est une matrice bornée, il est facile de voir le lien qui la relie à α. Le système (1) s'écrit en effet

$$AX = Y$$

et, par le changement des coordonnées $X = U\xi$,

$$AU\xi = Y.$$

Cette équation équivaut au système (2), par suite $\alpha = AU$; α est une matrice bornée comme A. En se reportant au n° **3** on voit que $\xi = \beta Y$, solution de $\alpha\xi = Y$, dans l'hypothèse où $\alpha\xi = Y$ est résoluble en ξ pour tout Y, définit une matrice β bornée qui n'est autre qu'une inverse bornée à droite pour α

$$\alpha\beta = 1 \quad (^1).$$

Un raisonnement direct, identique à celui fait pour α_p à la fin du n° **2**, montre alors que

$$n(\alpha\alpha^*) \geqq \frac{1}{M_{\beta^*\beta}} = \frac{1}{(M_\beta)^2} > 0.$$

Or $\alpha^* = U^* A^*$, et

$$\alpha\alpha^* = AUU^*A^* = AA^*, \qquad \text{à cause de} \quad UU^* = 1.$$

Donc

$$n(\alpha\alpha^*) = n(AA^*).$$

On retrouve ainsi *directement* la nécessité de $n(AA^*) > 0$ pour l'existence d'un inverse borné à droite de A ou pour la résolution en X, quel que soit Y, de $AX = Y$, *sans passer par l'intermédiaire des α_p considérées aux n^{os} **3** et **4**.*

(1) Alors $AU\beta = 1$ et A possède un inverse borné à droite, c'est $U\beta$.