JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES VALIRON

Sur une équation fonctionnelle et certaines suites de facteurs

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 405-423.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_405_0>

Sur une équation fonctionnelle et certaines suites de facteurs;

PAR GEORGES VALIRON.

Si l'on considère une fonction entière

$$f(z) = 1 + \Sigma c_n z^n,$$

à coefficients positifs et de l'espèce la plus simple : exponentielle, fonctions de Mittag-Leffler ou de Lindelöf, fonctions à croissance très lente qui s'introduisent dans la théorie des fonctions invariantes par une substitution $(z, \sigma z)$, σ réel, fonctions d'ordre infini tendant vers zéro lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans un angle d'ouverture voisine de 2π, les arguments des points où $f(z) = a$ arbitraire se condensent autour d'une ou deux valeurs. Il n'y a qu'une ou deux directions de Borel. Mais on sait que la multiplication des c_n par des nombres de module 1 pris au hasard dans certaines suites disperse en général les directions de Borel dans tout le plan. Je me suis proposé de trouver des suites qui jouissent de la propriété de disperser les directions de Borel lorsqu'on multiplie des c_n par les nombres de la suite pris dans leur ordre naturel. Si l'on multiplie chaque c_n par

$$\sigma^{n^\lambda}, \qquad |\sigma| = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où λ est un entier positif et où *l'argument de σ est incommensurable à π*, on disperse les arguments des coefficients. Le cas $\lambda = 1$ n'apprend rien puisque $f(z)$ est transformée en $f(z\sigma)$; le cas le plus simple est donc celui de $\lambda = 2$. Il se prête à une étude assez précise dans certains cas grâce au fait que l'équation différentielle fonctionnelle

$$f'(z) = f(z\sigma)$$

admet pour solution la fonction

$$1+\sum_{1}^{\infty}\sigma^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{z^n}{n!},$$

qui apparaît ainsi, à un certain point de vue, comme la fonction entière la plus simple après e^z. Cette circonstance permet de mettre la transformée de $f(z)$ par la substitution $(c_n, c_n\sigma^{n^2})$ sous une forme assez commode lorsque l'argument β de σ est commensurable à π. Lorsque $\frac{\beta}{\pi}$ est irrationnel, on l'approche par des nombres rationnels.

Je me suis borné à considérer le cas des fonctions d'ordre fini positif. Dans le cas des fonctions d'ordre nul à croissance très lente et très régulière, on obtient des valeurs approchées des zéros en prenant le rapport $-c_n : c_{n+1}$, toutes les suites σ^{n^λ} dispersent les arguments des zéros. Dans le cas de l'ordre infini la dispersion dans les diverses directions des points z' où le module est voisin de son maximum sur $|z|=|z'|$ assure la dispersion des directions de Borel; les résultats qui seront obtenus avec certaines suites σ^{n^2} s'étendront à certaines classes de fonctions d'ordre infini.

Dans une première partie, je donne des propriétés du module des solutions d'équations différentielles fonctionnelles généralisant celle envisagée ci-dessus. $M(r, f)$ désignant le module maximum de $f(z)$ pour $|z|=r$, je détermine incidemment toutes les fonctions pour lesquelles $M(r, f^{(s)}) = M(r, f)$ quel que soit l'indice de dérivation s. Je montre que l'indicatrice de Lindelöf des solutions des équations en question est constante, ce qui entraîne des propriétés des modules des zéros et aussi le fait que les séries entières associées par les méthodes de Borel Mittag-Leffler admettent la circonférence de leur cercle de convergence comme coupure, c'est notamment le cas pour

$$\Sigma\sigma^{n^2}z^n.$$

J'indique aussi une conséquence relative au domaine de convergence de séries du type de Dirichlet construites à partir de ces solutions.

Dans la seconde partie, j'étudie les directions de Borel. Je montre que, si l'argument β de σ appartient à certaines classes de nombres, les transformées $(c_n, c_n\sigma^{n^2})$ des fonctions de Mittag-Leffler et des fonctions voisines possèdent toute direction pour direction de Borel du type maximum sans valeurs exceptionnelles et que leur module $|f(z)|$ reste de l'ordre de $M(|z|, f)$ sur une suite de cercles dont le rayon croît indéfiniment.

Il convient de signaler que les séries

$$\sum \sigma^{n^2} z^n, \qquad \sum \frac{1}{n!} \sigma^{n^2} z^n$$

ont été données respectivement par MM. Hardy et Littlewood (¹) et par M. P. Lévy (²) comme des exemples de cas où il y a abaissement du module maximum. Ces auteurs supposent que $\beta : \pi$ jouit de certaines propriétés portant sur le développement en fraction continue.

I.

1. Je désignerai par $E(z, \sigma)$ la fonction entière égale à 1 pour $z = 0$ et qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$f'(z) = \sigma f(z\sigma^2) \qquad (|\sigma| = 1). \tag{1}$$

On a

$$E(z, \sigma) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \sigma^{n^2} z^n.$$

Une transformation immédiate ramène cette fonction à celle considérée dans l'Introduction. Comme on déduit de (1) que

$$f^{(p)}(z) = \sigma^{p^2} f(z\sigma^{2p}),$$

on a

$$M(r, f^{(p)}) = M(r, f) \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Cherchons toutes les fonctions entières telles que $f(0) = 1$ et qui vérifient (2). Posons

$$f(z) = 1 + \sum_1^{\infty} C_n e^{i\alpha_n} z^n \qquad (C_n \geqq 0). \tag{3}$$

(¹) *Acta mathematica*, t. **37**, 1914, p. 155-239.

(²) *Bulletin de la Soc. math.*, t. **58**, 1930, p. 39-59, 127-149.

Faisant tendre r vers o dans (2) nous voyons que

$$(4) \qquad C_n = \frac{1}{n\,!} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si l'on écrit

$$\begin{aligned}\Theta(r, \varphi) &= [1 + C_1 r \cos(\alpha_1 + \varphi) + C_2 r^2 \cos(\alpha_2 + 2\varphi) + \ldots]^2 \\ &\quad + [C_1 r \sin(\alpha_1 + \varphi) + C_2 r^2 \cos(\alpha_2 + 2\varphi) + \ldots]^2 \\ &= 1 + 2C_1 r \cos(\alpha_1 + \varphi) + [C_1^2 + 2C_2 \cos(\alpha_2 + 2\varphi)] r^2 \\ &\quad + [2C_1 C_2 \cos(\alpha_2 + \varphi - \alpha_1) + 2C_3 \cos(\alpha_3 + 3\varphi)] r^3 + \ldots,\end{aligned}$$

on a

$$M(r, f)^2 = \Theta[r, \varphi(r)] = \nu(r, f),$$

$\varphi = \varphi(r)$ désignant la solution, bien définie pour r assez petit (à un terme additif en $2h\pi$ près) de l'équation

$$-\frac{1}{2r}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} \equiv C_1 \sin(\varphi + \alpha_1) + 2C_2 r \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + \ldots = 0,$$

pour laquelle

$$C_1 \cos(\varphi + \alpha_1) + \ldots > 0.$$

$\varphi(r)$ est holomorphe pour r assez petit et est égal à $-\alpha_1$ lorsque $r = 0$. On a

$$\varphi'(0) = -2\frac{C_2}{C_1}\sin(\alpha_2 - 2\alpha_1);$$

$\nu(r, f)$ est holomorphe pour r assez petit et l'on a

$$\begin{aligned}\nu'(0, f) &= \left[\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\varphi'\right]_0 = 2C_1, \\ \nu''(0, f) &= \left[\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\,\partial\varphi}\varphi' + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2}\varphi'^2 + \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\varphi''\right]_0 = 2C_1^2 + 4C_2\cos(\alpha_2 - 2\alpha_1), \\ \nu'''(0, f) &= \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\varphi'\right)^{(3)} + 3\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\,\partial\varphi}\varphi'' + 3\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2}\varphi'\varphi'' + \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\varphi'''\right]_0 \\ &= \left[\frac{\partial^3\Theta}{\partial r^3} + 3\frac{\partial^3\Theta}{\partial r^2\,\partial\varphi}\varphi' + 3\frac{\partial^3\Theta}{\partial r\,\partial\varphi^2}\varphi'^2\right]_0 \\ &= 12[C_1 C_2 \cos(\alpha_2 - 2\alpha_1) + C_3 \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1)] + 24\frac{C_2^2}{C_1}\sin^2(\alpha_2 - 2\alpha_1).\end{aligned}$$

Comme on doit avoir

$$(p\,!\,C_p)^2\,\nu\left[r, \frac{e^{-i\alpha_p}}{C_p\,p\,!}f^{(p)}\right] = \nu(r, f) \qquad (q = 1, 2, \ldots),$$

on obtient, compte tenu de (4),

$$\cos(\alpha_{p+2} - 2\alpha_{p+1} + \alpha_p) = \cos(\alpha_2 - 2\alpha_1), \tag{5}$$

$$\cos(\alpha_{p+3} - 3\alpha_{p+1} + 2\alpha_p) = \cos(\alpha_3 - 3\alpha_1). \tag{6}$$

Il est loisible de supposer $\alpha_1 = 0$ puisqu'on peut remplacer z par $e^{-i\alpha_1}z$. L'égalité (5) donne alors

$$\alpha_3 = 3\alpha_2 \tag{7}$$

ou

$$\alpha_3 = \alpha_2. \tag{7'}$$

On a ensuite

$$\alpha_4 - 2\alpha_3 + \alpha_2 = \pm\,\alpha_2, \qquad \alpha_4 - 3\alpha_2 = \pm\,\alpha_3,$$

de sorte que (7) et (7′) conduisent respectivement à

$$\alpha_4 = 6\alpha_2 \tag{8}$$

ou

$$\alpha_4 = 2\alpha_2. \tag{8'}$$

On voit alors par récurrence que (7) entraîne

$$\alpha_n = \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_2 \qquad (n = 3, 4, \ldots),$$

tandis que (7′) donne

$$\alpha_{2q} = q\,\alpha_2, \qquad \alpha_{2q+1} = q\,\alpha_2 \qquad (q = 2, 3, \ldots).$$

Il s'ensuit que :

I. *Les seules fonctions $f(z)$ holomorphes autour de l'origine et pour lesquelles $f(0) = 1$, $M(r, f^{(s)}) = M(r, f)$, $s = 1, 2, \ldots$ sont les fonctions entières $E(az, \sigma)$, $|a| = 1$, $|\sigma| = 1$ et les fonctions $ch(bz) + B\,sh(bz)$, $|b| = |B| = 1$.*

La vérification de la propriété pour la seconde classe de fonctions se fait sans difficultés.

2. L'équation fonctionnelle

$$f'(z) = A f(z\sigma^2) + Q(z) \qquad (|\sigma| = 1),$$

où A désigne une constante et $Q(z)$ un polynome, admet pour solution générale

$$\gamma \, E\left(\frac{1}{\sigma} A z, \sigma\right) + Q_1(z),$$

$Q_1(z)$ étant un polynome et γ une constante arbitraire.

D'une façon générale, considérons l'équation

$$(9) \qquad f'(z) = P(z) f(\sigma z) + Q(z) \qquad (|\sigma| = 1),$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynomes donnés. Les solutions sont des fonctions entières dépendant linéairement d'un paramètre ([3]). Si $f(z)$ est une solution non polynomiale (la solution polynomiale, s'il y en a une, est unique) et si A est le module du coefficient du terme de plus haut degré s de $P(z)$, on a

$$M(r, f') \sim A r^s M(r, f).$$

Mais on sait que, si r est une valeur ordinaire ([4]), si $N(r)$ est le rang du terme de module maximum de la série $f(z)$, on a

$$M(r, f') \sim \frac{N(r)}{r} M(r, f), \qquad \log M(r, f) \sim \int_1^r N(x) \frac{dx}{x},$$

et que, r étant une valeur ordinaire, il en existe une autre plus grande r' dont le rapport à r tend vers 1 lorsque r croît indéfiniment. On a donc ici

$$N(r) \sim A r^{s+1},$$

et

$$(10) \qquad \log M(r, f) \sim A \int_0^r x^s \, dx = A \frac{r^{s+1}}{s+1}.$$

Ce résultat général peut être précisé dans le cas de la fonction

---

([3]) Les théorèmes généraux d'existence des solutions (qui dans le cas envisagé ici, $|\sigma| = 1$, sont des conséquences immédiates de ceux relatifs aux équations différentielles) sont dus à M. Leau (*Comptes rendus*, t. **119**, 1894, p. 901-902). Voir aussi Flamant, *Rendiconti Circolo mat. Palermo*, t. **48**, 1924, p. 135-208.

([4]) Voir *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. **37**, 1920, p. 220-253, et *Lectures on the general theory of integral functions*, chap. IV.

$E(z, \sigma)$; l'inégalité

$$M(r, E)^2 > \sum \frac{r^{2n}}{(n\,!)^2}$$

montre que

$$\log M(r, E) = r - h(r) \log r,$$

$h(r)$ étant positif et

$$\overline{\lim_{r=\infty}} h(r) \leqq \frac{1}{4}.$$

3. Nous désignerons par $F(z, \sigma)$ une solution non polynomiale de (9). Lorsque $\sigma = e^{i\beta}$, β étant commensurable à π, l'élimination de $F(z\sigma^m, \sigma)$ entre les équations déduites de (9) par dérivation montre que $F(z, \sigma)$ vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. Les solutions de telles équations ont été étudiées par Poincaré et ses successeurs.

Nous supposerons que l'argument β de σ est incommensurable à π. Partons d'un point z' du cercle $|z| = r$, en lequel on ait

$$|F(z', \sigma)| = M(r, F).$$

Appliquons (9) au point $z'\sigma^{-1}$, puis dans l'égalité

$$\begin{aligned} F''(z) &= \sigma P(z) F'(\sigma z) + P'(z) F(\sigma z) + Q'(z) \\ &= \sigma P(z) P(z\sigma) F(\sigma^2 z) + P'(z) F(\sigma z) + \sigma P(z) Q(\sigma z) + Q'(z), \end{aligned}$$

faisons $z = z'\sigma^{-2}$, etc. Nous obtenons pour chaque p inférieur à un nombre fixe, pourvu que r soit assez grand,

$$|F^{(p)}(z'\sigma^{-p}, \sigma)| > M(r, F),$$

lorsque $P(z)$ est effectivement un polynome et une inégalité analogue dans laquelle on multipliera le second membre par une constante moindre que 1 lorsque $P(z)$ est une constante. A chaque nombre η donné positif et arbitrairement petit correspond un nombre $p(\eta)$ tel que tout arc de longueur ηr du cercle $|z| = r$ contienne l'un des points $z'\sigma^{-p}$ avec $p < p(\eta)$. Appliquant le théorème de Cauchy sur le module des dérivées aux cercles $|z - z'\sigma^{-p}| = \eta r$, on obtient l'inégalité

$$|F^{(p)}(z'\sigma^{-p}, \sigma)|\,(\eta r)^p < \max p\,!\,|F| \quad \text{sur la circonférence.}$$

Prenant alors $\varepsilon = 2\eta$, on est conduit à cette proposition :

II. *ε étant donné positif arbitrairement petit et* $M(\zeta, \varepsilon, F)$ *désignant le maximum de* $|F(z, \sigma)|$ *pour* $|z - \zeta| \leqq \varepsilon |\zeta|$, *on a, pourvu que* $|\zeta|$ *soit assez grand*,

$$M(\zeta, \varepsilon, F) > M(|\zeta|, F). \tag{11}$$

Autrement dit, si l'on considère une couronne de centre origine et dont l'épaisseur est arbitrairement petite par rapport à la distance à l'origine, les points de cette couronne en lesquels le module de F est de l'ordre du maximum du module dans la couronne ont des arguments voisins de tout nombre donné; il y a dispersion des points de grand module.

Compte tenu de (10), l'inégalité (11) entraîne que l'indicatrice de croissance de Lindelöf est constante : on a

$$h(\varphi, F) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log |F(re^{i\varphi}, \sigma)|}{A\dfrac{r^{s+1}}{s+1}} = 1. \tag{12}$$

D'abord, $h(\varphi, F)$ est au plus égal à 1. D'autre part, si sur un rayon φ_0, $h(\varphi_0, F) < 1$, les théorèmes de Lindelöf ([5]) montreraient qu'on aurait dans un angle $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon'$,

$$\log |F(re^{i\varphi}, \sigma)| < \gamma \log M(r', F), \qquad \gamma < 1, \qquad \frac{r}{r'} = \gamma' > 1,$$

ce qui serait en contradiction avec (11).

Comme application de (12) et d'un théorème classique de Borel et Servant généralisé par Mittag-Leffler, on voit que :

III. *Si l'on pose*

$$F(z, \sigma) = \sum_0^\infty c_n z^n;$$

la fonction définie par la série entière

$$\sum_0^\infty c_n \Gamma\left(1 + \frac{n}{s+1}\right) z^n,$$

([5]) LINDELÖF et PHRAGMÉN, *Acta math.*, t. **31**, 1908, p. 381-406.

où $\Gamma(x)$ est la fonction eulérienne, admet comme coupure la frontière du cercle de convergence

$$|z| < \sqrt[s+1]{\frac{s+1}{A}}.$$

En particulier, la fonction définie par

$$\sum_{0}^{\infty} \sigma^{n^2} z^n$$

n'est pas prolongeable au delà du cercle $|z| = 1$.

Observons à ce sujet que la théorie des équations différentielles fonctionnelles fournit des exemples immédiats de fonctions non prolongeables. La fonction

$$1 + \sum_{1}^{\infty} (1+\sigma)(2+\sigma^2)\ldots(n-1+\sigma^{n-1})\frac{z^n}{n!}$$

est solution de l'équation

$$(1-z)f'(z) = f(\sigma z),$$

et ne peut donc pas être prolongée au delà du cercle $|z| = 1$ puisque l'argument de σ est supposé incommensurable à π. Le module du coefficient de z^n est compris entre $\frac{|1-\sigma|}{n^2}$ et 1 [6].

4. On peut faire les remarques suivantes au sujet de l'indicatrice de Lindelöf.

Supposons que la série

$$\sum_{0}^{\infty} a_n z^n \tag{13}$$

admette le cercle $|z| = 1$ comme cercle de convergence et coupure et

---

[6] Les exemples de M. L.-B. Robinson, qui nécessitent la démonstration préalable de l'existence des solutions, sont un peu moins simples (Voir *Bulletin Soc. math.*, t. 64. 1936, p. 66-70, 213-215).

que la fonction définie par

$$\sum_0^\infty g_n z^n,$$

où l'on suppose

$$(14) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|g_n|} = 1,$$

n'admette que le point $z = 1$ comme singularité sur le cercle de convergence. La série

$$\sum_0^\infty \frac{a_n}{g_n} z^n$$

définit une fonction qui n'est pas prolongeable au delà de $|z| = 1$. Car, si cette fonction était régulière en un point z_0 de module 1, d'après le théorème d'Hadamard sur la multiplication des singularités, la fonction (13) serait aussi régulière en ce point ($z_0 \neq 1$).

Passant aux fonctions entières associées, on obtient cet énoncé :

IV. *Supposons que la série* (13) *admette pour cercle de convergence et coupure le cercle* $|z| = 1$ *et que, les* g_n *vérifiant la condition* (14), *l'indicatrice de Lindelöf de la fonction*

$$\sum_0^\infty \frac{g_n z^n}{\Gamma(1 + \gamma n)},$$

où γ *est donné positif, n'atteigne son maximum qu'en un seul point.*

Dans ces conditions, l'indicatrice de Lindelöf de toutes les fonctions

$$\sum_0^\infty \frac{a_n z^n}{g_n \Gamma(1 + \delta n)} \qquad (\delta > 0)$$

est constante.

On peut partir de e^z; on voit que l'indicatrice de Lindelöf des fonctions

$$\sum_0^\infty \frac{a_n z^n}{\Gamma(1 + \delta n)}$$

est constante; on pourra prendre notamment $a_n = \sigma^{n^\beta}$ (β incommensurable). On peut aussi partir d'une série entière dont $z = 1$ est le seul point singulier; par exemple, d'après un théorème de Le Roy, Faber, Wiggert, on peut prendre pour g_n une fonction entière de n, à coefficients positifs et du type minimum de l'ordre 1.

La constance de l'indicatrice implique que, dans le cas de l'ordre entier, il n'y a pas de valeurs exceptionnelles de Borel. Car si une fonction entière $f(z)$ est du type moyen de l'ordre entier ρ et si $r(n, a)$ étant le module du $n^{ième}$ zéro de $f(z) - a$, la série

$$\Sigma r(n, a)^{-\rho}$$

converge, on peut écrire

$$f(z) - a = e^{H(z)} \Pi(z),$$

$H(z)$ polynome de degré ρ et $\Pi(z)$ produit canonique de genre $\rho - 1$; en vertu du théorème de Poincaré,

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r, \Pi)}{r^\rho} = 0,$$

l'indicatrice de $f(z)$ ne peut être positive dans les angles où la partie réelle de $H(z)$ finit par être négative.

5. Voici une autre conséquence de la proposition II. Soit $\Phi(z)$ une fonction entière vérifiant la propriété II et pour laquelle

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r, \Phi)}{B r^\rho} = 1, \tag{15}$$

B et ρ étant donnés positifs. Considérons une série de Dirichlet généralisée,

$$\sum_1^\infty b_n \Phi(z\lambda_n), \tag{16}$$

où les λ_n sont des nombres complexes ou réels donnés, rangés par ordre de modules non décroissants et tels que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0. \tag{17}$$

Le seul domaine de convergence d'une série (16) *est le cercle* $|z| < R$, R *étant donné par*

$$-R^\rho = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |b_n|}{B|\lambda_n|^\rho},$$

et la convergence est absolue et uniforme dans tout cercle $|z| \leqq R' < R$.

La seconde partie se démontre de suite; il suffit donc de prouver que la série ne peut pas converger dans tout un cercle $|z - z_0| < \varepsilon$ si $|z_0| > R + \varepsilon > R$. Supposons qu'il en soit ainsi. D'après un théorème de M. Montel ([7]) un tel cercle ne contiendrait un autre $|z - z_1| < \varepsilon_1 |z_1|$ dans lequel la convergence serait uniforme. Or, il existe une suite infinie de n pour lesquels

$$|b_n| e^{B|z_1\lambda_n|^\rho} > 1,$$

donc, d'après (11) et (15), pour chaque n assez grand de cette suite le cercle

$$\left| z - z_1\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\right| < \frac{\varepsilon_1}{4} |z_1|$$

contiendrait un point z_n pour lequel

$$|b_n \Phi(z_n \lambda_n)| > 1;$$

la convergence ne peut pas être uniforme dans $|z - z_1| < \varepsilon_1 |z_1|$.

Les séries (16) sont donc analogues aux séries entières en ce qui concerne la forme et la détermination du domaine de convergence, mais elles possèdent toujours les propriétés bien connues des séries de Dirichlet; si aucune condition n'est vérifiée par l'écart des λ_n consécutifs la circonférence du cercle de convergence peut ne contenir aucune singularité de la somme de la série.

Les séries en question s'introduisent dans l'étude des solutions des équations différentielles fonctionnelles d'ordre infini de la forme

$$f(z) + a_1 f'(\sigma z) + a_2 f''(\sigma^2 z) + \ldots = 0,$$

où les a_j sont des constantes et où la fonction $1 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots$ est entière; les fonctions Φ sont alors des fonctions E et les λ_n les

([7]) Voir *Leçons sur les familles normales*, Paris, 1927, p. 200.

zéros d'une fonction entière. La question est liée à la question analogue correspondant à $\sigma = 1$ ([8]).

II.

6. On sait que la connaissance de l'indicatrice de Lindelöf ne renseigne que d'une façon imparfaite sur les propriétés générales des arguments des zéros de $f(z) - a$. Pour obtenir des résultats sur la dispersion des directions de Borel, nous emploierons une méthode d'approximation.

Supposons que l'argument de σ soit commensurable à π; soit

$$\sigma = \omega^{P}, \qquad \omega = e^{\frac{2i\pi}{Q}},$$

P et Q étant des entiers premiers entre eux et Q impair. On a

$$\sigma(n) = \sigma^{n^2} = \omega^{\frac{2i\pi P n^2}{Q}},$$

donc

$$\sigma(n + Q) = \sigma(n).$$

On peut écrire

$$(18) \qquad E(z, \omega^{P}) = \sum_{q=0}^{Q-1} A_q e^{z\omega^q}, \qquad A_q = \frac{1}{Q} \sum_{p=0}^{Q-1} \omega^{Pp^2 - pq}.$$

Les nombres A_q ont tous le même module. On a, en effet,

$$E^{(s)}(z, \omega^{P}) = \sigma^{s^2} E(z\omega^{2Ps}, \omega^{P}),$$

donc

$$\sum_{q=0}^{q=Q-1} A_q \omega^{qs} e^{z\omega^q} \equiv \sum_{q'=0}^{q'=Q-1} A_{q'} \sigma^{s^2} e^{z\omega^{q'+2sP}},$$

ce qui entraîne

$$|A_{q'}| = |A_0| \qquad \text{si} \quad q' + 2sP \equiv 0 \qquad (\text{mod. } Q).$$

Or, ce q' prend toutes les valeurs $1, 2, \ldots, Q-1$ puisque P et Q sont premiers et Q impair.

([8]) *Voir* VALIRON, *Annales École Normale*, 3e série, 1929, t. 46, p. 25-53.

QA_0 est une somme de Gauss dont le module est $\sqrt{Q}$. On a donc

$$A_q = \frac{\theta_q}{\sqrt{Q}} \qquad (|\theta_q| = 1).$$

L'étude du module de la somme d'exponentielles

$$\Psi(z) = \sum_{q=0}^{Q-1} \theta_q e^{z\omega_q} \qquad (|\theta_q| = 1),$$

où $\omega_0 = 1$, ω_1, ..., ω_q, ..., ω_{Q-1} sont les racines de $\omega^Q = 1$ rangées par ordre d'argumeuts croissants, est la même dans les Q angles

$$(19) \qquad \left|\varphi + \frac{1}{2}\arg(\omega_q \omega_{q+1})\right| \leqq \frac{\pi}{Q} \qquad (\varphi = \arg z).$$

On sépare les deux termes correspondant à ω_q, ω_{q+1} et l'on remplace les autres par leurs modules. Dans la somme

$$(20) \qquad \theta_q e^{z\omega_q} + \theta_{q+1} e^{z\omega_{q+1}}$$

l'un des deux termes a son module supérieur au double de celui de l'autre, sauf dans le voisinage de la bissectrice de l'angle (19). Si l'on pose

$$\frac{1}{2}\arg(\omega_q \omega_{q+1}) + \varphi = \psi, \qquad r = |z|,$$

ceci aura lieu si $r|\psi| > \frac{Q}{2\pi}$ pourvu que Q soit assez grand. Dans l'angle restant, on considérera les arcs de cercle $r = \text{const.}$ sur lesquels la différence des arguments réduits des deux termes de (20) restera supérieure à $\frac{\pi}{6}$; *si* $\frac{r}{Q}$ *est assez grand, il existe de tels arcs sur tout segment* $R < r < R + Q$. Il s'ensuit que *sur ces arcs que nous appellerons* Δ *et dans la portion de l'angle* (19) *pour laquelle* $|\psi| > \frac{Q}{2\pi r}$, *portion qui existe dès que* $r > Q^2 K$, (K *fixe*), *le logarithme du module de* (20) *sera au moins égal à*

$$r \cos\frac{\pi}{Q} - \log 2.$$

Le rapport du module de l'un des autres termes de $\Psi(z)$ au module de (20) sera moindre que

$$\left(\cos\frac{2\pi\nu}{Q} - \cos\frac{\pi}{Q}\right) r = -2r\left(\sin\frac{(2\nu-1)\pi}{2Q}\right)\sin\left(\frac{(2\nu+1)\pi}{2Q}\right),$$

ν prenant les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{Q-1}{2}$. Il découle de là que, *dans les portions indiquées de l'angle* (19), *on aura encore*

$$\log|\Psi(z)| > r\cos\frac{\pi}{Q} - \log 3. \tag{21}$$

On voit en outre aisément que, dans un intervalle R, R + Q, où $R > Q^2 K$, il existe un cercle complet $|z| = r$ sur lequel

$$\log|\Psi(z)| > r\cos\frac{\pi}{Q} - 10 - \log Q.$$

Les zéros de la fonction (20) s'obtiennent de suite; ceux appartenant à l'angle (19) sont près de sa bissectrice, le nombre de ceux dont le module est compris entre R et R′ est

$$\frac{1}{\pi}(R' - R + h)\sin\frac{\pi}{2Q} \qquad (|h| < 1).$$

D'après le théorème de Rouché, $\Psi(z)$ s'annule donc $\frac{(1+\eta)(k-1)r}{2Q}$ fois dans le secteur formé par la partie de (19) comprise entre deux arcs de cercle Δ de rayons r et kr, $k > 1$, $|\eta|$ étant aussi petit que l'on veut pourvu que Q soit assez grand et $r > KQ^2$.

7. Revenons alors à une fonction $E(z, \sigma)$, l'argument de σ que nous appellerons $2\pi\beta$ étant incommensurable à π. β est un nombre irrationnel $0 < \beta < 1$. Soient P et Q deux entiers premiers entre eux, Q étant impair, et supposons que

$$\left|\beta - \frac{P}{Q}\right| < k. \tag{22}$$

Nous allons chercher une borne de la quantité

$$|E(z, \sigma) - \omega' E(z, \omega^P)| \qquad \left(\omega = e^{\frac{2i\pi}{Q}}\right), \tag{23}$$

ω' étant un nombre de module 1 convenablement choisi et

$$KQ^2 < |z| = r < 4KQ^2.$$

D'après une propriété bien connue concernant la détermination du module maximum d'une fonction entière par un groupe de termes environnant le terme de module maximum, on a

$$\sum_0^{n_1} \frac{r^p}{p\,!} < \frac{e^r}{Q^2}, \qquad \sum_{n_2}^{\infty} \frac{r^p}{p\,!} < \frac{e^r}{Q^2},$$

pourvu que Q soit assez grand et que n_1 et n_2 soient respectivement la partie entière de

$$r - K_1\sqrt{r \log Q}, \qquad r + K_1\sqrt{r \log Q},$$

K_1 étant une constante. L'expression (23) est donc inférieure à

$$\frac{4e^r}{Q^2} + \sum_{n_1}^{n_2} |1 - \mu_q| \frac{r^p}{p\,!} < e^r \left[\frac{4}{Q^2} + \max.|1 - \mu_p|\right],$$

où

$$\mu_p = e^{\nu_p}, \qquad \nu_p = 2i\pi p^2\left(\frac{P}{Q} - \beta\right) + i \arg\omega'.$$

Nous prendrons $r_0 = p_0$ entier, $|r - r_0| < K'Q$, et définirons ω' par l'égalité

$$\arg\omega' + 2\pi p_0^2\left(\frac{P}{Q} - \beta\right) = 0,$$

de sorte que

$$|\nu_p| < 2\pi k(p^2 - p_0^2) < K_2 k r_0\sqrt{r_0 \log Q} < K_3 k\sqrt{Q^6 \log Q},$$

la constante K_3 ne dépendant que de K. Il s'ensuit que l'expression (23) est inférieure à

$$\frac{e^{r\cos\left(\frac{\pi}{Q}\right)}}{4\sqrt{Q}},$$

pourvu que

$$k < \frac{K_4}{\sqrt{Q^7 \log Q}}, \qquad |r - r_0| < K_5 Q,$$

les constantes K_4 et K_5 ne dépendant que de K. Remplaçant alors la fonction $E(z, \omega^p)$ par son expression (18) et appliquant les propriétés de $\Psi(z)$ et le théorème de Rouché, puis faisant varier r_0, on obtient l'énoncé suivant :

V. *Désignons par* $2i\pi\beta$ *l'argument de* σ, $0 < \beta < 1$, *et supposons qu'il existe une suite infinie de fractions irréductibles* $P : Q$, Q *étant impair, telles que*

$$\left|\beta - \frac{P}{Q}\right| < \frac{m}{\sqrt{Q^7 \log Q}}, \tag{24}$$

m étant un nombre inférieur à une certaine constante. Dans ces conditions : 1° *Le nombre des zéros de* $E(z, \sigma) = x$ *dans un secteur* $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$, $|z| < r$ *étant désigné par* $n(r, \varphi_0, \varepsilon, E - x)$, *on a quels que soient* $\varphi_0, \varepsilon, x$

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r, \varphi_0, \varepsilon, x)}{r} \geqq \varepsilon \chi(m) > 0.$$

2° *Il existe une suite de courbes fermées entourant l'origine sur lesquelles* $R_q < |z| < R_q + \sqrt{R_q}$, $\lim\limits_{q=\infty} R_q = \infty$, *et telles qu'on ait uniformément*

$$\lim_{q=\infty} \frac{\log |E(z, \sigma)|}{|z|} = 1.$$

Ainsi, toutes les directions sont directions de Borel du type maximum sans valeur exceptionnelle ; il n'y a pas de valeurs asymptotiques.

Si l'on remplace le dénominateur de (24) par Q^4, on peut prendre des cercles pour courbes jouissant de la seconde propriété et $\chi(m) = 1 : 2\pi$ dans la première ; la moyenne $m(r, f)$ de Nevanlinna satisfait aux conditions

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{m(r, f)}{\log M(r, f)} = 1, \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{m(r, f)}{r} = 1,$$

et il n'y a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Nevanlinna.

Les nombres vérifiant une condition telle que (24) forment évidemment un ensemble de mesure nulle, ils se construisent comme les nombres de Liouville. D'après un théorème de Thue ils ne peuvent pas être des nombres algébriques de degré moindre que 5.

8. Les résultats précédents s'étendent au cas des fonctions

$$G(z, \sigma) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\sigma^{n^2} z^n}{\Gamma(1 + \delta n)},$$

déduites de la fonction de G. Mittag-Leffler, $G(z, 1)$. Car, d'une façon générale, si l'on transforme une fonction entière quelconque

$$f(z) = 1 + \sum_{1}^{\infty} c_n z^n, \tag{25}$$

et si

$$\sigma = \omega^P, \qquad \omega = e^{\frac{2i\pi}{Q}},$$

on a, comme au nº 6,

$$1 + \sum_{1}^{\infty} \sigma^{n^2} c_n z^n = \sum_{0}^{Q-1} A_q f(z\omega^q),$$

les A_q étant les mêmes que dans (18). L'étude du comportement d'une telle fonction est ramenée à l'étude dans l'angle (19) de

$$\theta_q f(z\omega^q) + \theta_{q+1} f(z\omega^{q+1}), \tag{26}$$

qui remplace (20). Il suffit que $f(z)$ se comporte comme une exponentielle sur les arcs $|z| =$ const. voisins des points de l'axe réel (on suppose les c_n positifs) pour que (26) se comporte comme (20), il suffit ensuite que la croissance soit suffisamment régulière pour qu'on puisse appliquer comme au nº 7 la méthode d'approximation. De ces conditions, la plus délicate est la première. Il n'y a aucune difficulté pour les fonctions de Mittag-Leffler qui sont asymptotiquement égales à une exponentielle dans l'angle où elles croissent indéfiniment.

On voit de même que d'une façon plus générale

VI. *Moyennant une condition* (24), *la proposition* V *s'étend aux fonctions*

$$1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{g(n) \sigma^{n^2} z^n}{\Gamma(1 + \delta n)},$$

où $g(n)$ *est une fraction rationnelle en* n.

En particulier, les dérivées de ces fonctions jouissent des mêmes propriétés. On peut enfin, d'après un théorème de Biernacki et Rauch ([9]) ajouter à ces fonctions une autre fonction arbitraire du type minimum de l'ordre $\frac{1}{\delta}$ sans changer la propriété de dispersion des directions de Borel.

([9]) BIERNACKI, *Acta math.*, t. 56, 1930, p. 197-204; RAUCH, *Journal de Math.*, 9e série, t. 12, 1933, p. 109-171.