JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique et dont les arêtes touchent une autre quadrique. Tétraèdres dont les arêtes touchent deux quadriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 291-326.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_291_0>

Tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique et dont les arêtes touchent une autre quadrique. Tétraèdres dont les arêtes touchent deux quadriques;

PAR BERTRAND GAMBIER.

1. INTRODUCTION. — Le premier des deux problèmes annoncés par le titre a été traité par H. Vogt (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, XII, 1895, p. 363-389). Jusqu'alors les diverses méthodes proposées pour établir que la condition *nécessaire* ($\Sigma\lambda_i\lambda_j = 0$ que l'on trouvera plus loin) se trouve être en même temps *suffisante* étaient très critiquables; Vogt a donné le premier cette démonstration; je me suis aperçu que les calculs donnés à cet effet par Vogt peuvent être remplacés par une démonstration géométrique, basée sur l'étude du *système remarquable de trois coniques s, s_1, s_2 d'un même plan admettant un triangle inscrit dans s, circonscrit à s_1, conjugué à s_2*. J'ai cru que le meilleur hommage à rendre au Mémoire élégant et puissant de Vogt était de fournir cette nouvelle méthode, reproduisant rapidement, avec les notations de Vogt, les premiers calculs servant à obtenir cette condition nécessaire. Après avoir démontré que cette condition est suffisante, je reproduis à quelques modifications près, la méthode dont Vogt se sert pour étudier la courbe gauche de degré 8, lieu des sommets des tétraèdres. Cela me permet de signaler les cas de dégénérescence, fort curieux, mais négligés par Vogt, où cette courbe se décompose, en particulier le cas où elle dégénère en 8 droites. Et alors cette étude montre clairement que le second problème : tétraèdres dont les arêtes touchent simultanément deux quadriques est, en réalité, identique (*en général*) au précédent, tandis que pour les cas de dégénérescence que j'ai indiqués pour le premier problème, il s'en éloigne beaucoup; ces progrès, dans la question, n'ont pu être réalisés que grâce aux résultats obtenus par Vogt, à la mémoire duquel je dédie ce travail en hommage.

2. Étude du système s, s_1, s_2. — Je pose ($i = 0, 1, 2; j \neq i, j = 0, 1, 2$)

$$s_i \equiv A_i x^2 + A'_i y^2 + A''_i z^2 + 2B_i yz + 2B'_i zx + 2B''_i xy,$$
$$a_i = A'_i A''_i - B_i^2, \qquad a'_i = A''_i A_i - B'^2_i, \qquad a''_i = A_i A'_i - B''^2_i,$$
$$b_i = B'_i B''_i - A_i B_i, \qquad b'_i = B''_i B_i - A'_i B'_i, \qquad b''_i = B_i B'_i - A''_i B''_i,$$
$$\Theta_{ij} = a_i A_j + a'_i A'_j + a''_i A''_j + 2b_i B_j + 2b'_i B'_j + 2b''_i B''_j;$$
$$\Delta_i = \begin{vmatrix} A_i & B''_i & B'_i \\ B''_i & A'_i & B_i \\ B''_i & B_i & A''_i \end{vmatrix}.$$

L'équation en λ, exprimant que la conique $s_i + \lambda s_j = 0$ se décompose en deux droites est

$$\Delta_i + \lambda\Theta_{ij} + \lambda^2\Theta_{ji} + \lambda^3\Delta_j = 0.$$

Il existe ∞^1 *triangles* t *inscrits dans* s, *circonscrits à* s_1, *si l'on a* $\Theta_{10}^2 - 4\Theta_{01}\Delta_1 = 0$; les racines de l'équation en λ relative au faisceau $s + \lambda s_1 = 0$ vérifient la relation

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 4(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) = 0.$$

De la sorte, au cas où s dégénère en deux droites ($\lambda_3 = 0$), on a $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, ce qui entraîne que l'une des deux droites est tangente à s_1 (corrélativement, si s_1 dégénère en deux points, l'un est sur s; il faudrait alors partir directement des équations tangentielles).

Il existe ∞^1 *triangles* t *inscrits dans* s, *conjugués à* s_2, *si l'on a* $\Theta_{20} = 0$ (ou $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ pour l'équation en λ relative au faisceau $s + \lambda s_2 = 0$). Si s dégénère en deux droites, elles sont conjuguées par rapport à s_2; la relation exprime d'ailleurs aussi qu'il y a ∞^1 triangles circonscrits à s_2, conjugués à s, de sorte que si s_2 dégénère en deux points, ces deux points sont conjugués par rapport à s.

Il existe ∞^1 triangles circonscrits à s_1, conjugués à s_2, si l'on a $\Theta_{12} = 0$.

Cela posé, donnons-nous un triangle t, une conique s circonscrite, une conique s_1 inscrite, une conique s_2 conjuguée : nous avons ainsi disposé de $6+2+2+2$ ou 12 paramètres manifestement indépendants et irréductibles pour ce système (t, s, s_1, s_2). Prenons un point A *arbitraire* sur s et menons de A les tangentes à s_1 qui recoupent s en B et C : la droite BC a ses coefficients exprimés rationnellement au moyen du paramètre unicursal λ qui fixe A sur s; elle est tangente à s_1, quel que soit λ, et *est la polaire de* A *relativement à une conique fixe nouvelle* s'_2, *conjuguée par rapport à tout triangle* ABC, *donc à* t. On peut donc, si l'on préfère, partir de t, s, s'_2, ce qui définit s_1, parfaitement, comme réciproque de s vis-à-vis de s'_2; le système t, s, s'_2, s_1 dépend ainsi de $6+2+2$ ou 10 paramètres; si s_2 *coïncide avec* s'_2, *le système* (s, s_1, s'_2) *admet* ∞^1 *triangles* t *de l'espèce indiquée, inscrits dans* s, *circonscrits à* s_1, *conjugués à* s'_2; *donc, puisque* (t, s, s'_2, s_1) *dépend de* 10 *paramètres, le système* (s, s_1, s'_2) *ne dépend que de neuf paramètres*. Écartons ce cas et choisissons, quand on a fixé (t, s, s'_2, s_1) la conique s_2 distincte de s'_2, de sorte que (t, s, s_1, s_2) dépend effectivement de 12 paramètres; si s_2 et s'_2 ont quatre points distincts, *elles ont un seul triangle conjugué commun, à savoir* t, *de sorte que* (s, s_1, s_2) *ne peuvent admettre un autre triangle* t' *de l'espèce indiquée, distinct de* t; nous avons donc démontré que le système (s, s_1, s_2), obtenu en effaçant t dans (t, s, s_1, s_2) dépend lui aussi de 12 paramètres et n'admet que le triangle t *unique*. On voit aisément que la conique s_2, tout en étant distincte de s'_2, peut lui être bitangente, aux points β, γ où s'_2 coupe l'un des côtés de t, à savoir le côté BC, mais alors bien que s_2 et s'_2 aient une infinité de triangles conjugués communs, ayant le sommet A fixe et les sommets B′, C′ variables sur la droite β, γ, il n'y a parmi les ∞^1 triangles AB′C′ que le triangle ABC qui soit inscrit dans s : ici encore on a donc un unique triangle, et la configuration obtenue est comprise dans la famille à 12 paramètres (on a dû ajouter une condition complémentaire).

Or les trois équations

$$\Theta_{10}^2-4\Theta_{01}\Delta_1=0, \qquad \Theta_{20}=0, \qquad \Theta_{12}=0$$

réduisent le nombre de paramètres entrant dans les équations de s, s_1, s_2 à 12 : *l'ensemble des résultats indiqués montre que cet ensemble de conditions est nécessaire et suffisant pour obtenir un* *triangle t (en général unique) inscrit dans s, circonscrit à s_1, conjugué à s_2.* Grâce à $\Theta_{10}^2 - 4\Theta_{01}\Delta_1 = 0$, on peut partir d'un point A quelconque de s, obtenir la droite BC indiquée plus haut, donc s'_2 *rationnellement* (¹) (au moyen des coefficients de s et s_1) : le triangle t est le triangle conjugué commun à s'_2 et s_2.

J'indique un cas curieux de dégénérescence qui conduit à un triangle t dont les trois côtés sont nuls, les trois sommets étant confondus : s réduite à deux droites, D_1 et D_2, et les deux coniques s_1, s_2 tangentes à D_1 au point (D_1, D_2) : l'ensemble des conditions déjà imposées n'a besoin que d'être complété par la relation $\Theta_{12} = 0$ pour s_1 et s_2.

3. Problème préliminaire. — Soient deux quadriques Q, Q_1 rapportées à leur tétraèdre conjugué commun :

$$(Q) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0,$$

$$(Q_1) \qquad A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 + D_1t^2 = 0.$$

Nous avons besoin de l'équation en λ relative au faisceau de coniques, sections par le plan (u, v, w, h) des quadriques du faisceau $Q + \lambda Q_1 = 0$; elle est manifestement donnée par l'équation

$$\frac{u^2}{A + \lambda A_1} + \frac{v^2}{B + \lambda B_1} + \frac{w^2}{C + \lambda C_1} + \frac{h^2}{D + \lambda D_1} = 0$$

ou

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} + \frac{h^2}{D}\right) ABCD \\
&\quad + \left[\frac{u^2}{A}\left(\frac{B_1}{B} + \frac{C_1}{C} + \frac{D_1}{D}\right) + \frac{v^2}{B}\left(\frac{A_1}{A} + \frac{C_1}{C} + \frac{D_1}{D}\right) + \ldots\right] ABCD\lambda \\
&\quad + \left[\frac{u^2}{A_1}\left(\frac{B}{B_1} + \frac{C}{C_1} + \frac{D}{D_1}\right) + \ldots\right] A_1B_1C_1D_1\lambda^2 \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{u^2}{A_1} + \frac{v^2}{B_1} + \frac{w^2}{C_1} + \frac{h^2}{D_1}\right) A_1B_1C_1D_1\lambda^3 = 0.
\end{aligned}$$

En particulier, la condition pour que le plan (u, v, w, h) donne ∞^1 triangles inscrits dans la section de Q et conjugués à la section

(¹) Il existe *quatre* coniques S telles que par polarité relative à S la conique s s'échange avec s_1 : ici l'équation de degré 4 dont dépend la recherche de S a une racine qui s'obtient rationnellement et conduit à s'_2.

de Q_1 est

$$\frac{u^2}{A_1}\left(\frac{B}{B_1}+\frac{C}{C_1}+\frac{D}{D_1}\right)+\ldots=0.$$

Les raisonnements corrélatifs fournissent la condition pour que le point (x, y, z, t) donne un cône circonscrit à Q, capable d'une infinité de trièdres conjugués au cône circonscrit à Q_1

$$Ax^2\left(\frac{B}{B_1}+\frac{C}{C_1}+\frac{D}{D_1}\right)+\ldots=0.$$

4. Recherche des tétraèdres. — Nous avons deux quadriques d'équations

$$(\Sigma) \qquad x^2+y^2+z^2+t^2=0,$$
$$(S) \qquad ax^2+by^2+cz^2+dt^2=0$$

(cela écarte le cas de deux quadriques ayant en commun une cubique gauche, ou encore dont l'intersection est formée d'une conique et de deux droites). Nous cherchons s'il existe un tétraèdre t, $A_1A_2A_3A_4$, conjugué à Σ, d'arêtes tangentes à S; par polarité relative à Σ, S devient

$$(S') \qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+\frac{t^2}{d}=0,$$

et l'arête A_1A_2 devient A_3A_4 tangente à S' et aussi à S par hypothèse. Le cône C de sommet A_1, circonscrit à S, est harmoniquement circonscrit au cône de même sommet circonscrit à Σ; d'après le calcul précédent, on a donc un premier lien de A_1

$$T' \equiv ax^2(b+c+d)+by^2(a+c+d)+cz^2(a+b+d)+dt^2(a+b+c)=0.$$

En remplaçant S par S' nous avons une équation nouvelle $T''=0$ vérifiée par A_1

$$T'' \equiv (bc+cd+db)x^2+\ldots=0.$$

Si nous posons

$$\Delta' = abcd, \qquad \Theta = a+b+c+d,$$
$$\Phi = ab+ac+ad+bc+cd+db, \qquad \Theta' = bcd+cda+dab+abc,$$

nous avons l'identité

$$T'+T'' \equiv \Phi\Sigma,$$

de sorte que A_1 ne devant pas être constamment sur Σ, nous avons une condition *nécessaire*

$$\Phi = 0.$$

Cette condition entraîne que T' (coïncidant avec T'') est harmoniquement circonscrite à Σ : *de la sorte le plan polaire* α_1 *de* A_1 *vis-à-vis de* Σ *coupe* T' *suivant une conique harmoniquement circonscrite à la section de* Σ; on constate aussi que *le plan polaire de* A_1 *coupe* S *suivant une conique harmoniquement inscrite à la section de* Σ, toujours comme conséquence de $\Phi = 0$ et $T' = 0$. Il reste donc une seule condition à écrire, à savoir que le plan α_1 coupe T' suivant une conique circonscrite à ∞^1 triangles circonscrits à la section de S; nous appliquons le calcul indiqué pour obtenir l'équation en λ relative aux sections par α_1 des quadriques $T' + \lambda S = 0$; nous obtenons

$$\begin{aligned}\left[\frac{x^2}{a}(3a+2b+2c+2d)+\ldots\right]^2 abcd - 4\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+\frac{t^2}{d}\right)\\ \times\Big\{bcd[(a+b+d)(a+b+c)\\ +(a+b+c)(a+c+d)+(a+c+d)(a+b+d)]x^2+\ldots\Big\}=0.\end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$\begin{aligned}&(a+b+d)(a+b+c)\\ &\quad= a^2+(2b+c+d)a+b^2+bc+cd+db = a^2+ab+b^2\end{aligned}$$

en tenant compte de $\Phi = 0$; puis, toujours à cause de $\Phi = 0$,

$$\begin{aligned}&(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2,\\ &(a^2+ab+b^2)+(a^2+ac+c^2)+(a^2+ad+d^2)\\ &\quad= 2a^2+(a+b+c+d)^2+ab+ac+ad\\ &\quad= a^2+a(a+b+c+d)+(a+b+c+d)^2.\end{aligned}$$

L'équation peut donc s'écrire, en divisant par *abcd*,

$$\begin{aligned}&\left[x^2+y^2+z^2+t^2+2(a+b+c+d)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+\frac{t^2}{d}\right)\right]^2\\ &\quad-4\left[\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+\frac{t^2}{d}\right]\Big[(x^2+y^2+z^2+t^2)(a+b+c+d)\\ &\qquad\qquad+(a+b+c+d)^2\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+\frac{t^2}{d}\right)\\ &\qquad\qquad+(ax^2+by^2+cz^2+dt^2)\Big]=0,\end{aligned}$$

ce qui se réduit finalement à

$$W \equiv (x^2+y^2+z^2+t^2)^2 \\ -4\left[\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+\frac{t^2}{d}\right][ax^2+by^2+cz^2+dt^2] \equiv \Sigma^2-4SS'=0.$$

Chaque sommet A_1, A_2, A_3, A_4 *doit donc se trouver sur la courbe gauche* Γ *de degré* 8 *définie par la quadrique* T' *et la surface* W.

La question n'est pas terminée : nous avons pris un sommet A_1 sur Γ : comment avoir les autres? Si l'on appelle (x_1, y_1, z_1, t_1) les coordonnées de A_1, son plan polaire α_1, $x_1x+y_1y+z_1z+t_1t=0$ coupe T', S, Σ suivant 3 coniques formant la configuration étudiée au n° **2**. La conique (S, α_1) admet pour réciproque vis-à-vis de Σ, le cône (S', A_1) ou C', de sorte que, *vis-à-vis de la section* (Σ, α_1), *la conique* (S, α_1) *admet pour polaire réciproque la conique* (C', α_1) *qui est distincte de* (T', α_1); *donc les trois coniques* (T', α_1), (S, α_1), (Σ, α_1) *admettent un triangle et un seul* $A_2A_3A_4$ *inscrit dans la première, circonscrit à la seconde, conjugué à la troisième;* A_2, pôle de A_3A_4 par rapport à (Σ, α_1) est donc sur la conique (C', α_1) en même temps que sur (T', α_1); *nous allons montrer qu'il est aussi sur la section* (C, α_1) *du cône* (S, A_1) *ou* C *par le plan* α_1. Admettons ce résultat : le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ est conjugué par rapport à Σ; les arêtes A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 sont tangentes à S et S', de sorte que leurs conjuguées A_3A_4, A_4A_2, A_2A_3 sont tangentes à S' et S. Le problème est donc résolu; *nous avons* ∞^1 *tétraèdres, chaque point de* Γ *étant sommet d'un seul tétraèdre,* (*pourvu que* Φ *soit nul, condition nécessaire et suffisante*).

Il reste à justifier du résultat réservé; C'' étant le cône de sommet A_1, dont la base est la conique (T', α_1), *les trois cônes* C, C', C'' *appartiennent à un même faisceau linéaire*, pourvu que A_1 appartienne à T' (sans qu'il soit nécessaire de mettre en outre A_1 sur Γ); je reprends le calcul de Vogt : on a

$$C \equiv (aS_1-a^2x_1^2)x^2+\ldots-2abx_1y_1xy\ldots,$$

$$C' \equiv \left(\frac{S'_1}{a}-\frac{x_1^2}{a^2}\right)x^2+\ldots-2\frac{x_1y_1}{ab}xy\ldots,$$

$$C'' \equiv [a(b+c+d)\Sigma_1-2a(b+c+d)x_1^2]x^2+\ldots \\ -2[a(b+c+d)+b(a+c+d)]x_1y_1xy\ldots.$$

On vérifie aisément, tenant compte de $\Phi = T'_1 = 0$, la relation

$$C - abcd\,C' - C'' \equiv 0.$$

5. Résultats complémentaires. — En principe, la question est résolue, en esquivant les calculs de Vogt. Signalons néanmoins divers résultats de Vogt, en suivant une méthode légèrement différente.

A_1 est choisi arbitrairement sur Γ; les points A_2, A_3, A_4 s'obtiennent en cherchant les points communs aux surfaces

$$(1)\qquad C = 0, \qquad C' = 0, \qquad P \equiv x_1 x + y_1 y + z_1 z + t_1 t = 0, \qquad T' = 0,$$

$$(2)\qquad W = 0.$$

Les quatre équations de la première ligne se réduisent à trois distinctes, mais elles ont l'inconvénient de donner un quatrième point parasite; l'équation $W = 0$ est nécessaire pour un sommet quelconque : elle permet donc de ne conserver que les trois points A_2, A_3, A_4. Vogt indique que l'*on peut remplacer la surface* W, *de degré* 4, *par une quadrique*. En effet, nous avons

$$(3)\qquad \begin{cases} C \equiv SS_1 - Q^2 = 0, & Q = ax_1x + by_1y + cz_1z + dt_1t, \\ C' \equiv S'S'_1 - Q'^2 = 0, & Q' \equiv \dfrac{x_1x}{a} + \dfrac{y_1y}{b} + \dfrac{z_1z}{c} + \dfrac{t_1t}{d}, \\ W \equiv \Sigma^2 - 4SS' = 0, & \Sigma_1^2 - 4S_1S'_1 = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$\Sigma^2\Sigma_1^2 = 16(SS_1)(S'S'_1) = 16Q^2Q'^2,$$

et par conséquent

$$(4)\qquad \Sigma\Sigma_1 = 4\varepsilon QQ' \qquad (\varepsilon = +1 \text{ ou } -1).$$

Réciproquement, soit un point vérifiant les équations

$$(5)\qquad C = 0, \qquad C' = 0, \qquad \Sigma\Sigma_1 = 4\varepsilon QQ'.$$

On a alors

$$0 = \Sigma^2\Sigma_1^2 - 16Q^2Q'^2 = \Sigma^2\Sigma_1^2 - 16(SS')(S_1S'_1) = \Sigma_1^2(\Sigma^2 - 4SS'),$$

et de la sorte, si A_1 n'est pas un point commun à Γ et Σ, on a

$$\Sigma^2 - 4SS' = 0;$$

le système (3) peut donc être remplacé par le système (5), ce qui revient à remplacer W par la quadrique $W' \equiv \Sigma\Sigma_1 - 4QQ' = 0$ ou par la quadrique $W'_1 \equiv \Sigma\Sigma_1 + 4QQ' = 0$. La quadrique W′ contient A_1, car la substitution de x_1, y_1, z_1, t_1 à x, y, z, t dans W′ donne $\Sigma_1^2 - 4S_1S'_1 = 0$; d'autre part il suffit de faire *une expérience* pour reconnaître si les points A_2, A_3, A_4 sont sur W′ ou W'_1; pour cela, utilisons le cas, que Vogt a négligé, des quadriques Σ, S ayant une conique de raccord; un tétraèdre régulier $A_1B_1C_1D_1$ étant construit, le centre de gravité O est centre d'une sphère S tangente aux six arêtes et le centre d'une sphère Σ de rayon $\frac{iOA_1}{\sqrt{3}}$ conjuguée au tétraèdre; un déplacement arbitraire, autour de O, du tétraèdre donne ici ∞^3 tétraèdres, et non seulement ∞^1. Par une transformation homographique, ce cas spécial revient à supposer

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \qquad S \equiv S' \equiv x^2 + y^2 + z^2 - t^2, \qquad T' \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 3t^2;$$
$$W \equiv (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)^2 \equiv -T'(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - t^2).$$

L'équation $W = 0$ disparaît ici comme conséquence de $T' = 0$.

On a ici, pour déterminer A_2,

$$(6) \qquad SS_1 - Q^2 = 0, \qquad \Sigma - 2S = 0. \qquad \Sigma_1 - 2S_1 = 0;$$

ces équations entraînent $\Sigma\Sigma_1 = 4SS_1 = 4Q^2$; or l'équation $W' = 0$ se réduit ici à $\Sigma\Sigma_1 - 4Q^2 = 0$: *c'est donc la quadrique* $W' = 0$ *qu'il faut conserver.*

Nous avons donc, pour déterminer A_2, A_3, A_4 à résoudre le système surabondant

$$(E) \quad SS_1 - Q^2 = 0, \qquad S'S'_1 - Q'^2 = 0, \qquad P = 0, \qquad \Sigma\Sigma_1 - 4QQ' = 0,$$

où l'on doit tenir compte des équations

$$(E') \qquad T'_1 = 0. \qquad \Sigma_1^2 - 4S_1S'_1 = 0.$$

Les équations (E) *représentent dans le plan* $P = 0$ *trois coniques qui ont trois points communs à elles trois; leur jacobienne se réduit aux côtés du triangle de ces trois points;* elle est évidemment la section, par le plan P, de la surface lieu du point dont les plans polaires par rapport à C, C′, W concourent en un point de P; l'équation de cette surface est

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} ax\mathrm{S}_1 - ax_1\mathrm{Q} & \frac{x}{a}\mathrm{S}'_1 - \frac{x_1}{a}\mathrm{Q}' & x\Sigma_1 - 2ax_1\mathrm{Q}' - \frac{2x_1}{a}\mathrm{Q} & x_1 \\ by\mathrm{S}_1 - by_1\mathrm{Q} & \frac{y}{b}\mathrm{S}'_1 - \frac{y_1}{b}\mathrm{Q}' & y\Sigma_1 - 2by_1\mathrm{Q}' - \frac{2y_1}{b}\mathrm{Q} & y_1 \\ cz\mathrm{S}_1 - cz_1\mathrm{Q} & \frac{z}{c}\mathrm{S}'_1 - \frac{z_1}{c}\mathrm{Q}' & z\Sigma_1 - 2cz_1\mathrm{Q}' - \frac{2z_1}{c}\mathrm{Q} & z_1 \\ dt\mathrm{S}_1 - dt_1\mathrm{Q} & \frac{t}{d}\mathrm{S}'_1 - \frac{t_1}{d}\mathrm{Q}' & t\Sigma_1 - 2dt_1\mathrm{Q}' - \frac{2t_1}{d}\mathrm{Q} & t_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les variables

$$\mathrm{P} \equiv xx_1 + \ldots,\quad \mathrm{Q} \equiv axx_1 + \ldots,\quad \mathrm{Q}' \equiv \frac{xx_1}{a} + \ldots,\quad \mathrm{R} \equiv a(b+c+d)xx_1 + \ldots$$

s'imposent évidemment; les plans obtenus en égalant à zéro P ou Q, ou Q′, ou R forment bien un tétraèdre, car le déterminant

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & ax_1 & \frac{x_1}{a} & a(b+c+d)x_1 \end{vmatrix}$$

est identique à

$$x_1y_1z_1t_1 \begin{vmatrix} 1 & a & \frac{1}{a} & a(b+c+d) \end{vmatrix}.$$

En multipliant la seconde colonne de ce nouveau déterminant par $(a+b+c+d)$ et la retranchant de la dernière on obtient

$$x_1y_1z_1t_1 \begin{vmatrix} 1 & a & \frac{1}{a} & -a^2 \end{vmatrix},$$

qui n'est pas nul, *si les quantités a, b, c, d sont toutes distinctes*. Multiplions donc les déterminants (7) et (8) colonnes par colonnes; nous aurons des calculs tels que les suivants :

$$\begin{aligned} a^2x_1^2 + \ldots &= (a+b+c+d)\,[ax_1^2 + \ldots] - [a(b+c+d)x_1^2 + \ldots] \\ &= \Theta\mathrm{S}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2(b+c+d)x_1^2 + \ldots &= -[a(bc+cd+da)x_1^2 + \ldots \\ &= [bc\,dx_1^2 + \ldots] - \Theta'[x_1^2 + \ldots] \\ &= \Delta'\mathrm{S}'_1 - \Theta'\Sigma_1. \end{aligned}$$

Le produit s'écrit donc

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Sigma_1 P - 2 S_1 Q' - 2 S'_1 Q & \Sigma_1 \\ - S_1 R & S'_1 P - \Sigma_1 Q' & - \Sigma_1 Q - 2\Theta S_1 Q' & S_1 \\ S_1 P - \Sigma_1 Q & \dfrac{S'_1 R}{\Delta'} & - \Sigma_1 Q' - 2\dfrac{\Theta'}{\Delta'} S'_1 Q & S'_1 \\ H & K & L & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

où l'on a posé pour abréger l'écriture

$$(10)\qquad \begin{cases} \Theta = a + b + c + d, \qquad \Theta' = bcd + cda + dab + abc, \qquad \Delta' = abcd, \\ H = - \Theta'(S_1 P - \Sigma_1 Q) + \Delta'(S_1 Q' - S'_1 Q), \\ K \equiv \Theta(S'_1 P - \Sigma_1 Q') + S_1 Q' - S'_1 Q, \\ L \equiv \Sigma_1 R + 2\Theta' \Sigma_1 Q' - 2\Delta' S'_1 Q' - 2\Theta \Sigma_1 Q + 2 S_1 Q. \end{cases}$$

Dans le déterminant (9) nous multiplions la seconde ligne par $4S'_1$ et en retranchons le produit par Σ_1 de la première; de même la troisième est multipliée par $4S_1$ et nous en retranchons le produit de la première par Σ_1; il reste donc l'équation (où l'on fait $P = 0$) jointe à $P = 0$

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} - \Sigma_1 R & - 4 S'_1 Q' & - 2(\Theta\Sigma_1 - S_1)Q' - 2 S'_1 Q \\ - 4\Delta' S_1 Q & \Sigma_1 R & - 2(\Theta'\Sigma_1 - \Delta' S'_1)Q - 2\Delta' S_1 Q' \\ (\Theta'\Sigma_1 - \Delta' S'_1)Q + \Delta' S_1 Q' & -(\Theta\Sigma_1 - S_1)Q' - S'_1 Q & \Sigma_1 R + 2(\Theta'\Sigma_1 - \Delta' S'_1)Q' - 2(\Theta\Sigma_1 - S_1)Q \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière équation se réduit à trois facteurs linéaires en Q, Q', R dont chacun a la forme

$$(12)\qquad \Sigma_1 R - 2\lambda S'_1 Q + 2\mu \Delta' S_1 Q',$$

où λ, μ sont des constantes; si donc on fait $Q' = 0$, on a

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \Sigma_1 R & 0 & - 2 S'_1 Q \\ 4\Delta' S_1 Q & \Sigma_1 R & - 2(\Theta'\Sigma_1 - \Delta' S'_1)Q \\ (\Delta' S'_1 - \Theta'\Sigma_1)Q & - S'_1 Q & \Sigma_1 R - 2(\Theta\Sigma_1 - S_1)Q \end{vmatrix}$$
$$\equiv (\Sigma_1 R - 2\lambda_2 S'_1 Q)(\Sigma_1 R - 2\lambda_3 S'_1 Q)(\Sigma_1 R - 2\lambda_4 S'_1 Q).$$

Donc λ_2, λ_3, λ_4 sont les racines de l'équation de degré 3 obtenue en remplaçant au premier membre de (13) l'expression $\Sigma_1 R$ par $2\lambda S'_1$ et Q par 1, et égalant le résultat à zéro. On obtient ainsi

$$(14)\qquad \varphi(\lambda) \equiv S'_1 \lambda^3 - (\Theta\Sigma_1 - S_1)\lambda^2 - (\Theta'\Sigma_1 - \Delta' S'_1)\lambda + \Delta' S_1 = 0.$$

On doit maintenant opérer de même pour μ, en annulant Q dans (11) : on arrive à une équation de degré (3) en μ dont les racines doivent s'exprimer rationnellement en fonction de λ, et, par suite, puisqu'il s'agit d'équations de degré 3, sous forme homographique en λ; ici on a la bonne chance que l'équation en μ coïncide avec l'équation aux inverses de l'équation (14); on a ainsi décomposé le déterminant (11) en le produit des trois facteurs

$$\Sigma_1 R - 2\lambda_i S'_1 Q + 2\frac{\Delta'}{\lambda_i} S_1 Q' = 0 \qquad (i = 2, 3, 4), \tag{15}$$

les λ_i étant racines de l'équation (14); inutile de faire les calculs de vérification pour les termes contenant en facteur Q et Q' simultanément ($Q^2 Q'$ et QQ'^2); la vérification ne ferait que confirmer la méthode qui a remplacé la surface W par la quadrique W'; en ajoutant un terme en P, hP, au premier membre de (15) on a un nouveau plan passant par la droite $A_j A_k$; on détermine h par la condition que ce plan contienne A_1 et l'on a ainsi l'équation du plan $A_1 A_j A_k$

$$2\Sigma_1 R - 4\lambda_i S'_1 Q + 4\frac{\Delta' S_1}{\lambda_i} Q' + \Sigma_1\left(\lambda_i - \frac{\Delta'}{\lambda_i}\right) P = 0. \tag{16}$$

Je viens d'exposer cette détermination des points A_2, A_3, A_4 par la méthode de Vogt, en donnant les explications nécessaires pour comprendre les calculs. Je m'écarte maintenant de la méthode de Vogt.

La courbe Γ, lieu des points A_1, A_2, A_3, A_4 est de degré 8 et admet le groupe constitué par les homologies involutives dont le pôle est un sommet du tétraèdre de référence et dont le plan directeur est la face opposée, puis, par les involutions biaxiales ayant pour axes deux arêtes opposées. On la transforme donc en une conique Γ'

$$\left\{\begin{array}{l} a(b+c+d)X + b(c+d+a)Y + c(d+a+b)Z + d(a+b+c)T = 0, \\ (X+Y+Z+T)^2 - 4(aX+bY+cZ+dT)\left(\dfrac{X}{a}+\dfrac{Y}{b}+\dfrac{Z}{c}+\dfrac{T}{d}\right) = 0, \end{array}\right. \tag{17}$$

en effectuant la transformation

$$x^2 = X, \qquad y^2 = Y, \qquad z^2 = Z, \qquad t^2 = T. \tag{18}$$

On obtient les coordonnées paramétriques de Γ' (ou de Γ) en introduisant les génératrices rectilignes du cône représenté par la seconde équation (17), ce qui revient à écrire pour x^2, y^2, z^2, t^2 trois équations linéaires

$$\Sigma + 2\rho S' = 0, \qquad \Sigma + \frac{2S}{\rho} = 0, \qquad T' = 0. \tag{19}$$

En résolvant, on a

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= a(b-c)(c-d)(d-b)[\rho^2 a - 2(bc+cd+db)\rho - bcd], \\ y^2 &= -b(c-d)(d-a)(a-c)[\rho^2 b - 2(cd+da+ac)\rho - cda], \\ z^2 &= c(d-a)(a-b)(b-d)[\rho^2 c - 2(da+ab+bd)\rho - dab], \\ t^2 &= -d(a-b)(b-c)(c-a)[\rho^2 d - 2(ab+bc+ca)\rho - abc]. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Les cas particuliers, qui se mettent en évidence dans ce calcul, sont *ceux où plusieurs des quantités a, b, c, d deviennent égales, ou bien encore où l'un des trinomes en ρ entrant dans x^2, y^2, z^2 où t^2 est carré parfait.*

1° $a = b$, c et d étant différents et non égaux à a; le plan représenté par la première équation (17) passe au sommet du cône et donne deux génératrices, de sorte que ρ n'est plus variable, mais a l'une ou l'autre de deux valeurs constantes; ce cas sera étudié plus loin; Γ se réduit à deux coniques et quatre droites.

2° $a = b$, $c = d$, $c \neq a$. L'intersection de S et Σ se compose de quatre droites; la courbe Γ se réduit aussi à ces quatre droites comptées chacune deux fois; si l'on prend un point A_1 arbitraire sur l'une Δ de ces droites, chaque droite A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 doit être tangente à la fois à S et S' et par suite se réduit à Δ; on n'obtient donc rien d'intéressant; il est impossible ici que W comprenne T' comme morceau de décomposition.

3° $a = b = c \neq d$. C'est le cas signalé, où d est égal à $(-a)$ et où la surface W contient T' comme morceau de décomposition : on a ∞^3 tétraèdres.

4° La condition pour que x^2 devienne carré parfait s'écrit

$$(bc + cd + db)^2 + abcd = 0,$$

ou encore

$$abcd - a(b + c + d)(bc + cd + db) = 0.$$

Sous cette forme, en supprimant le facteur a, on trouve

$$(b+c)(c+d)(d+b)=0,$$

de sorte que si l'on prend $c+d=0$, x^2 et y^2 deviennent carrés parfaits simultanément. Ce cas sera retrouvé plus bas par un autre procédé; nous l'étudierons plus loin.

Nous bornant donc au cas général, sur la conique Γ' les points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 sont tels qu'à un point ρ_1 correspondent trois points ρ_i, la relation entre ρ_1 et ρ_i étant symétrique et du troisième degré en ρ_1, ou en ρ_i; il est connu que, dans ce cas, les quatre ρ du groupe $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$ sont fournis par une relation

$$(21)\quad A\rho^4+B\rho^3+C\rho^2+D\rho+E+\mu(A_1\rho^4+B_1\rho^3+C_1\rho^2+D_1\rho+E_1)=0,$$

où A, B, ..., E_1 sont des constantes et μ un paramètre *arbitraire* dont la variation fournit tous les tétraèdres. Pour chaque groupe $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$ on trouve huit tétraèdres, $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ se correspondant deux à deux dans les homographies et involutions déjà signalées. On passe de A'_1 à A_1 en prenant arbitrairement pour chaque radical $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{Y_1}$, $\sqrt{Z_1}$, $\sqrt{T_1}$ l'une ou l'autre des deux déterminations; une fois ce choix fait, nous allons voir que chaque point A_2, A_3, A_4 s'obtient d'une façon unique. D'abord l'équation (16), en remplaçant $2S_1$ par $-\rho_1\Sigma_1$ et $2S'_1$ par $\frac{-\Sigma_1}{\rho_1}$, peut s'écrire

$$(16')\qquad 2R+2\lambda_i\frac{Q}{\rho_1}-\frac{2\Delta'\rho_1}{\lambda_i}Q'+\left(\lambda_i-\frac{\Delta'}{\lambda_i}\right)P=0.$$

Le point A_i est le pôle de ce plan, de sorte que l'on a

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x_i}{x_1}=2a(b+c+d)+2a\frac{\lambda_i}{\rho_1}-\frac{2\Delta'\rho_1}{a\lambda_i}+\lambda_i-\frac{\Delta'}{\lambda_i},\\ &\frac{y_i}{y_1}=\ldots,\qquad \frac{z_i}{z_1}=\ldots,\qquad \frac{t_i}{t_1}=\ldots\qquad (i=2,3,4).\end{aligned}\right.$$

Donc le point $A_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ étant déterminé, on résout l'équation (14), qui d'ailleurs peut s'écrire

$$(14')\qquad \lambda^3+\rho_1(2\Theta+\rho_1)\lambda^2+(2\Theta'\rho_1+\Delta')\lambda+\Delta'\rho_1^2=0,$$

et donne λ_2, λ_3, λ_4 : les formules (22) donnent A_2, A_3, A_4; mais alors ρ_i se calcule rationnellement au moyen de ρ_1 et de λ_i; Vogt suggère de calculer ρ_i par la formule $\rho_i = \frac{-2S_i}{\Sigma_i}$, en utilisant les relations (22) qui donnent

$$\begin{aligned}\Sigma_i &= x_1^2[4a^2(b+c+d)^2+\ldots]+\ldots,\\ S_i &= ax_1^2[4a^2(b+c+d)^2+\ldots]+\ldots.\end{aligned}$$

Nous avons déjà montré comment un tel calcul se fait et n'introduit que les quantités S_1, S'_1, Σ_1 : par exemple

$$\begin{aligned}a^2(b+c+d)^2 &= -a(b+c+d)(bc+cd+db) = -(\Theta-a)(\Theta'-bcd)\\ &= -\Theta\Theta'+a\Theta'+bcd\Theta-abcd,\end{aligned}$$

$$a^2(b+c+d)^2x_1^2+\ldots = -\Theta\Theta'\Sigma_1+\Theta S_1+\Delta' S'_1-\Delta'\Sigma_1.$$

Finalement, on trouve $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\rho_1}$, mais on abrège beaucoup les calculs en écrivant les relations

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{lll} S_iS_1-Q_i^2=0, & S'_iS'_1-Q_i'^2=0, & \Sigma_i\Sigma_1-4Q_iQ'_i=0,\\ & \Sigma_i+2\rho_iS'_i=0, & \Sigma_1+2\rho_1S'_1=0,\\ & \Sigma_i+\dfrac{2}{\rho_i}S_i=0, & \Sigma_1+2\dfrac{S_1}{\rho_1}=0.\end{array}\right.$$

On en déduit

$$\Sigma_i\Sigma_1 = 4\rho_i\rho_1S'_iS'_1 = 4\rho_i\rho_1Q_i'^2 = 4Q_iQ'_i,$$

$$(24)\qquad \rho_i\rho_1 = \frac{Q_i}{Q'_i}.$$

Or, d'après les formules (22)

$$Q_i = 2a^2(b+c+d)x_1^2+\frac{2\lambda_i}{\rho_1}a^2x_1^2-\frac{2\Delta'\rho_1}{\lambda_i}x_1^2+\left(\lambda_i-\frac{\Delta'}{\lambda_i}\right)ax_1^2+\ldots,$$

et, d'après le calcul qui a été expliqué, on trouve

$$Q_i = 2\Delta'S'_1-2\Theta'\Sigma_1+\frac{2\lambda_i}{\rho_1}\Theta S_1-\frac{2\Delta'\rho_1}{\lambda_i}\Sigma_1+\left(\lambda_i-\frac{\Delta'}{\lambda_i}\right)S_1.$$

Un calcul analogue donne

$$Q'_i = 2\Theta\Sigma_1-2S_1+\frac{2\lambda_i}{\rho_1}\Sigma_1-\frac{2\rho_1}{\lambda_i}\Theta'S'_1+\left(\lambda_i-\frac{\Delta'}{\lambda_i}\right)S'_1.$$

La formule (24) donne donc

$$(25)\qquad \rho_i\rho_1 = \frac{\rho_1\left[-\dfrac{\lambda_i}{2}-\dfrac{3}{2}\dfrac{\Delta'}{\lambda_i}\right]-\Theta\lambda_i-2\Theta'-\dfrac{\Delta'}{\rho_1}}{\rho_1+2\Theta+\dfrac{\Theta'}{\lambda_i}+\dfrac{1}{\rho_1}\left[\dfrac{3}{2}\lambda_i+\dfrac{\Delta'}{2\lambda_i}\right]}=\lambda_i,$$

en tenant compte de l'équation (14') qui donne λ. En remplaçant dans (14') λ par $\rho_1\rho$, on trouve l'équation symétrique en ρ et ρ_1

$$(26)\qquad \rho_1^2\rho^2(\rho_1+\rho)+2\Theta\rho_1^2\rho^2+2\Theta'\rho_1\rho+\Delta'(\rho_1+\rho)=0.$$

Le calcul des fonctions symétriques $\rho_2+\rho_3+\rho_4$, $\dfrac{1}{\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_3}+\dfrac{1}{\rho_4}$, $\rho_2\rho_3\rho_4$ des racines ρ_2, ρ_3, ρ_4 de (26) fournit aussitôt

$$(27)\qquad \begin{cases} \rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4=-2\Theta, \qquad \dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_3}+\dfrac{1}{\rho_4}=-\dfrac{2\Theta'}{\Delta'}, \\ \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4=-\Delta', \end{cases}$$

de sorte que *les quatre* ρ *associés sont racines de l'équation, contenant l'indéterminée* μ

$$(28)\qquad \rho^4+2\Theta\rho^3-2\Theta'\rho-\Delta'+\mu\rho^2=0.$$

Les équations (14') ou (26) sont équivalentes; (14') a l'avantage, pour une valeur λ donnée, de donner deux valeurs de ρ, que j'appellerai ρ_1, ρ_2; on résout l'équation

$$(29)\qquad \rho^2+\frac{2(\Theta\lambda+\Theta')\lambda}{\lambda^2+\Delta'}\rho+\lambda=0,$$

ensuite on remplace λ par la valeur λ' égale à $-\dfrac{\Delta'}{\lambda}$ et l'équation (29), formée avec λ', donne ρ_3 et ρ_4, on a ainsi l'arête A_1A_2, puis l'arête A_3A_4. En résolvant (29) on a

$$(30)\qquad \rho_1=\frac{-(\Theta\lambda+\Theta')\lambda+\sqrt{R(\lambda)}}{\lambda^2+\Delta'}, \qquad \rho_2=\frac{-(\Theta\lambda+\Theta')\lambda-\sqrt{R(\lambda)}}{\lambda^2+\Delta'},$$

avec

$$(31)\qquad \begin{aligned} R(\lambda) &\equiv (\Theta\lambda+\Theta')^2\lambda^2-\lambda(\lambda^2+\Delta')^2 \\ &\equiv -\lambda(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)(\lambda-d^2). \end{aligned}$$

Pour obtenir cette décomposition en facteurs de $R(\lambda)$, il suffit de vérifier les égalités

$$\begin{aligned}[(a+b+c+d)a^4+(bcd+\ldots)a^2]^2 &= a^2[a^4+abcd]^2,\\ (a+b+c+d)a^2+(bcd+\ldots) &= a^3+bcd.\end{aligned}$$

Cela revient à

$$(b+c+d)a^2+cda+dab+abc \equiv a\Phi = 0.$$

La relation entre ρ et ρ_1, équivalente à la relation entre ρ et λ, est donc une relation de genre 2, en général.

En dehors des cas particuliers déjà cités, où plusieurs des nombres a, b, c, d sont égaux, elle s'abaisse au genre 1 pour $b=-a$, les quantités a, c, d étant liées par la condition $a^2-cd=0$, nous avions déjà signalé ce cas par une autre voie. Le cas $b=-a$, $c=d$ fait donc retomber sur la conique de raccord pour S et Σ. *Si l'on suppose $b=-a$, $d=-c$, on a $a^2+c^2=0$ et l'on a une relation unicursale entre ρ et ρ_1 : ce cas particulier qui a échappé à Vogt, fournit une courbe Γ décomposée en huit droites et sera étudié plus bas.*

On peut remarquer que pour $b=\pm a$, S *et* S′ *sont bitangentes en deux points de l'arête $y=z=0$ du tétraèdre de référence conjugué à* S *et* Σ : *pour $b=a$, elles sont toutes deux bitangentes à Σ en ces mêmes points; pour $b=-a$ elles sont bitangentes entre elles, mais non à Σ; de plus, les points où Σ perce l'arête $z=t=0$, ceux où* S *perce cette arête, et les sommets du tétraèdre sur cette arête forment trois couples se divisant deux à deux harmoniquement.* Pour $b=-a$, $c=-d$, l'intersection de S et S′ se réduit à quatre droites et la courbe Γ se décompose en huit droites.

6. Tétraèdres spéciaux, dans le cas général. — Restons dans le cas général où a, b, c, d sont tous distincts, ainsi que a^2, b^2, c^2, d^2. L'équation (26) montre que si ρ et ρ_1 sont égaux sans être nuls ni infinis, leur valeur commune est racine de l'équation

$$\rho^4+\Theta\rho^2+\Theta'\rho+\Delta'=0,$$

qui est l'équation en ρ relative au faisceau $\Sigma+\rho S=0$; donc, si nous prenons $\rho_1 = \rho_2 = -a$, les formules (27) donnent

$$\rho_3 + \rho_4 = -2(b+c+d), \qquad \rho_3\rho_4 = \frac{-bcd}{a},$$

de sorte que ρ_3 et ρ_4 sont racines du trinome

$$\rho^2 a - 2(bc+cd+db)\rho - bcd \equiv \rho^2 a + 2a(b+c+d)\rho - bcd,$$

qui figure dans l'expression de x^2, formules (20).

On a, d'après les formules (20), dans ce cas,

$$(32) \quad \frac{x_1^2}{(b-c)(c-d)(d-b)} = \frac{y_1^2}{b(c-d)(c+d)} = \frac{z_1^2}{c(d-b)(d+b)} = \frac{t_1^2}{d(b-c)(b+c)},$$

puis, λ_2 étant égal à a^2, d'après les formules (22),

$$(33) \quad \frac{x_2}{-x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Dans la face $x_1 = 0$ du tétraèdre conjugué commun, la perspective commune des deux sommets A_1, A_2 à partir du point (1, 0, 0, 0) est l'un des points h communs aux sections de S et S' par cette face; la droite A_1A_2 est ainsi tangente à S et S', précisément en h et a pour conjuguée vis-à-vis de Σ une tangente commune aux sections de S et S'; cette tangente porte A_3 et A_4 et, comme vérification, x_3, x_4 sont nuls d'après la remarque faite plus haut; le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ considéré s'échange en lui-même dans l'homologie involutive qui a pour plan directeur $x_1 = 0$ et pour pôle le point (1, 0, 0, 0), *de sorte que* $\rho_1 = -a$ *donne quatre tétraèdres seulement, au lieu des huit tétraèdres que l'on obtient pour* ρ *quelconque*.

L'équation (28), pour $\mu = \infty$, se réduit à $\rho^2 = 0$, de sorte qu'elle a alors une racine double nulle, une racine double infinie. *Pour* $\rho_1 = \rho_2 = 0$, *les points* A_1, A_2 *sont confondus en l'un des huit points communs à* Σ, S, T' *et les points* A_3, A_4 *en un point, correspondant, commun à* Σ, S' T'. *La droite* A_1A_3 *est génératrice de* Σ, *tangente à* S, *donc aussi à* S'; *les points de contact de cette génératrice sont précisément sur* Γ; *la droite* A_1A_2 *est la tangente à* Γ *en* A_1; *de même pour* A_3A_4; *il y a aussi quatre* *arêtes confondues avec* A_1A_3, *et deux autres qui ont une longueur réduite à zéro*. Pour ce cas particulier, on a

$$\frac{x_1^2}{(b-c)(c-d)(d-b)} = \frac{-y_1^2}{(a-c)(c-d)(d-a)}$$
$$= \frac{z_1^2}{(a-b)(b-d)(d-a)} = \frac{-t_1^2}{(a-b)(b-c)(c-a)};$$
$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1, \quad z_2 = z_1, \quad t_2 = t_1;$$
$$x_3 = x_4 = ax_1, \quad y_3 = y_4 = by_1, \quad z_3 = z_4 = cz_1, \quad t_3 = t_4 = dt_1.$$

7. Cas particulier $a = b$; quadriques S, Σ bitangentes. — On a dans ce cas

$$\Phi = a^2 + 2a(c+d) + cd = 0,$$
$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$
$$S \equiv a(x^2+y^2) + cz^2 + dt^2,$$
$$S' \equiv \frac{x^2+y^2}{a} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d},$$
$$T' \equiv a(a+c+d)(x^2+y^2) + c(2a+d)z^2 + d(2a+c)t^2,$$
$$W \equiv (x^2+y^2+z^2+t^2) - 4[a(x^2+y^2)+cz^2+dt^2]\left[\frac{x^2+y^2}{a} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d}\right].$$

Le système linéaire en x^2, y^2, z^2, t^2 écrit plus haut [formules (19)]

$$\Sigma + 2\rho S' = 0, \qquad \Sigma + \frac{2S}{\rho} = 0, \qquad T' = 0,$$

ne peut ici avoir de solution que si ρ est choisi de sorte que tous les déterminants d'ordre 3 déduits du tableau rectangulaire, à 4 colonnes et 3 lignes, des coefficients soient nuls; or ces déterminants sont les seconds membres des formules (20); les deux derniers le sont, dès que a et b sont égaux; on suppose $c \neq d$, c et d étant chacun différents de a, de sorte que ρ doit être racine de l'équation

$$\rho^2 + 2(a+c+d)\rho + a[a+2(c+d)] = 0.$$

Les racines sont $-a$ et $-[a+2(c+d)]$; nous supposons $c+d \neq 0$, sinon on aurait $a=b$, $a^2-c^2=0$, $c=-d$ et chaque cas $a=b=c=-d$, $a=b=-c=d$ conduit aux quadriques S et Σ à conique de raccord, cas étudié déjà. En posant $x^2+y^2 = X$, $z^2 = Z$, $t^2 = T$ la courbe Γ se détermine par le système

$$
(34) \qquad \begin{cases} X + Z + T + 2\rho\left(\dfrac{X}{a} + \dfrac{Z}{c} + \dfrac{T}{d}\right) = 0, \\ X + Z + T + \dfrac{2}{\rho}(aX + cZ + dT) = 0, \\ a(a+c+d)X + c(2a+d)Z + d(2a+c)T = 0, \end{cases}
$$

la dernière ligne, en remplaçant cd par $-a^2 - 2a(c+d)$, peut être remplacée par

$$(a+c+d)X - (a+2d)Z - (a+2c)T = 0.$$

Remplaçant ρ par $-a$, nous obtenons les deux coniques Γ_1, Γ_2 définies par le système

$$
(35) \qquad \frac{x^2+y^2}{4(c-d)} = \frac{z^2}{-(a+2d)} = \frac{t^2}{a+2c}.
$$

La valeur $\rho = -[a + 2(c+d)]$ fournit les quatres droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 définies par le système

$$
(36) \qquad x^2+y^2 = 0, \qquad (a+2d)z^2 + (a+2c)t^2 = 0.
$$

Nous choisissons les noms Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, ainsi

$$
\begin{array}{lll}
(\Delta_1) & x + iy = 0, & \sqrt{a+2d}\,z + i\sqrt{a+2c}\,t = 0, \\
(\Delta_2) & x + iy = 0, & \sqrt{a+2d}\,z - i\sqrt{a+2c}\,t = 0, \\
(\Delta_3) & x - iy = 0, & \sqrt{a+2d}\,z - i\sqrt{a+2c}\,t = 0, \\
(\Delta_4) & x - iy = 0, & \sqrt{a+2d}\,z + i\sqrt{a+2c}\,t = 0,
\end{array}
$$

de sorte que, dans cet ordre, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 sont les côtés d'un quadrilatère gauche; *le point* (Δ_1, Δ_2), *où* δ *est l'un des points de contact de* S *et* Σ, *le plan* (Δ_1, Δ_2) *étant le plan tangent commun;* mêmes propriétés pour le point δ', (Δ_3, Δ_4), ou le plan (Δ_3, Δ_4). *Le point* (Δ_2, Δ_3) *où* γ *a pour coordonnées* $(0, 0, \sqrt{a+2c}, -i\sqrt{a+2d})$: *c'est le sommet de l'un des deux cônes du second degré circonscrits simultanément à* S *et* Σ; prenons donc un point quelconque A_1 sur Δ_2 : *les deux cônes* C *et* C', *circonscrits de* A_1 *à* S *et* S' *sont osculateurs suivant la génératrice* Δ_2 *ou* $A_1\delta$; cette proposition est en effet, par dualité, la correspondante de celle-ci : *si deux surfaces* S *et* S' *sont tangentes en un point, tout plan qui passe par l'une des tangentes au point double donne dans* S *et* S' *deux sections osculatrices;* ici la développable circonscrite à S et S′ a un plan tangent double (le plan $\Delta_1\Delta_2$) et nous avons pris un point sur l'une des génératrices de cette développable contenues dans le plan tangent double (A_1 sur Δ_2); les deux cônes C et C′ ont donc trois génératrices communes confondues avec Δ_2 et une autre génératrice commune; comme on doit garder trois, convenablement choisies, des quatre génératrices communes, on doit garder sûrement Δ_2 et prendre le point d'intersection de Δ_2 avec le plan polaire (relativement à Σ) de A_1 : ce point est le point (Δ_1, Δ_2) ou δ qui joue ainsi le rôle de A_2; les points A_3, A_4 sont à l'intersection de T′ avec la droite conjuguée, vis-à-vis de Σ, de A_1A_2 : cette droite est précisément dans le plan tangent en δ à Σ, plan qui est tangent à T′, de sorte que A_3 et A_4 coïncident avec A_2 ou δ : *trois arêtes du trièdre sont donc confondues avec* Δ_2, *les trois autres confondues avec la conjuguée de* Δ_2, *qui se détermine aisément :* A_1 a pour coordonnées $[\lambda, i\lambda, \mu\sqrt{a+2c}, -i\mu\sqrt{a+2d}]$, de sorte que son plan polaire tourne quand $\lambda : \mu$ varie autour de la droite

$$x+iy=0, \qquad z\sqrt{a+2c}-i\sqrt{a+2d}\,t=0,$$

qui est la tangente en δ à la conique

$$(\Gamma_2) \quad z\sqrt{a+2c}-i\sqrt{a+2d}\,t=0 \qquad (a+2d)(x^2+y^2)+4z^2(c-d)=0.$$

Supposons maintenant que A_1 *soit pris en* γ, *intersection de* Δ_2 *et* Δ_3 : *cette fois* C *et* C′ *coïncident;* donc, d'après la proposition démontrée pour C, C′, C″, le cône C″ coïncide avec eux : l'unique cône C, C′, C″ en jeu a donc pour base la conique Γ_2, dont le plan est le plan polaire de γ vis-à-vis de Σ; cette fois la conique Γ_2 admet pour polaire réciproque, vis-à-vis de la section de Σ par le plan de Γ_2, précisément la section commune de S et S′ par le plan de Γ_2, de sorte qu'il existe *exceptionnellement* ∞^1 triangles inscrits dans Γ_2, circonscrits à la section commune de S et S′, conjugués relativement à la section de Σ : *le point* A_1 *coïncidant donc avec le point* γ *ou* (Δ_1, Δ_3), *nous avons* ∞^1 *tétraèdres ayant le point* A_1 *comme sommet commun; le point* (Δ_1, Δ_4) *fournit une seconde série* ∞^1. En dehors de ces deux séries de tétraèdres véritables, nous avons les séries de tétraèdres dégénérés fournis par Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.

Ces résultats sont évidents en partant d'une pyramide triangulaire régulière de sommet A_1, ayant pour base le triangle équilatéral $A_2A_3A_4$; nous supposons $A_1A_2 \neq A_2A_3$. Si nous prenons le cercle inscrit dans la base $A_2A_3A_4$ et les trois cercles *inscrits* dans chaque face latérale $A_1A_iA_j$ [ou les trois cercles ex-inscrits dans ces faces relativement à l'angle A_1], ces quatre cercles tangents deux à deux déterminent une sphère S de centre O; les hauteurs de la pyramide concourent en un point ω distinct de O; la sphère conjuguée au tétraèdre, de centre ω, est facile à construire : nous avons ainsi réalisé le cas de figure annoncé; il résulte même de cette construction que *si un tétraèdre admet une sphère* S *tangente aux six arêtes, il est nécessairement tel que les arêtes issues d'un certain sommet sont égales et les arêtes situées dans la face opposée, égales aussi;* cela tient à ce que la sphère Σ conjuguée jointe à la sphère S donnent la disposition étudiée ici. Mais la conception purement géométrique de cette figure ne nous aurait pas fait découvrir la seconde série de tétraèdres effectifs, ni les quatre séries de tétraèdres dégénérés.

Au point de vue de la réalité, on peut avoir des dispositions diverses : avec deux sphères réelles, les quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 sont imaginaires. On peut avoir un cas de figure où tout est réel : Γ_1, Γ_2, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4. Supposons en effet que y et t soient deux imaginaires pures et posons $iy = y'$, $it = t'$; supposons c, d positifs; l'égalité $(a+2c)(a+2d) = 3cd$ entraîne que $a+2c$, $a+2d$ soient de même signe, si a est réel : or l'équation $a^2 + 2a(c+d) + cd = 0$ a ses deux racines en a réelles (d'ailleurs négatives, mais peu importe). Alors on a

$$\Sigma \equiv x^2 - y'^2 + z^2 - t'^2, \qquad S \equiv a(x^2 - y'^2) + cz'^2 - dt'^2.$$

Le système Γ_1, Γ_2 est défini par le système

$$\frac{x^2 - y'^2}{4(c-d)} + \frac{z^2}{a+2d} = 0, \qquad \left(\frac{z}{t'}\right)^2 = \frac{a+2d}{a+2c}$$

et est réel : intersection d'un cône réel par l'un ou l'autre de deux plans réels. De même Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 définies par

$$x^2 - y'^2 = 0, \qquad \left(\frac{z}{t'}\right)^2 = \frac{a+2c}{a+2d},$$

et l'on obtient une infinité de tétraèdres réels, dans les deux séries (car il suffit de prendre les ∞^1 triangles inscrits dans une conique réelle tracée sur T′ et conjugués à une conique réelle tracée sur Σ).

8. Cas particulier $c+d=0$. — Nous supposons $a+b\neq 0$, $a-b\neq 0$, $a-c\neq 0$, $a-d\neq 0$, $b-c\neq 0$, $b-d\neq 0$. Le calcul général, réalisé pour les formules (20), s'applique; nous avons $c+d=0$ et $ab-c^2=0$; le trinome qui figure dans x^2 s'écrit

$$\rho^2 a + 2c^2\rho + bc^2 \quad \text{ou} \quad \frac{c^2}{b}(\rho+b)^2.$$

On écrit donc

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \varepsilon\, a\sqrt{(b-c)(c-d)(d-b)}\,(\rho+b) \qquad (\varepsilon=+1 \text{ ou } -1),\\ y &= \varepsilon' b\sqrt{-(c-d)(d-a)(a-c}\,(\rho+a) \qquad (\varepsilon'=+1 \text{ ou } -1),\\ z^2 &= c^2(d-a)(a-b)(b-d)[\rho^2-2\{c-a-b\}\rho+c^2],\\ t^2 &= -d^2(a-b)(b-c)(c-a)[\rho^2+2\{c+a+b\}\rho+c^2]. \end{aligned}\right.$$

Quand on a fixé ε, ε′, on peut donc écrire ces formules sous la forme

$$(37)\qquad \frac{x'}{\rho}=\frac{y'}{1}=\frac{z}{\sqrt{A(\rho^2+2B\rho+c^2)}}=\frac{t}{\sqrt{A'(\rho^2+2B'\rho+c^2)}},$$

où A, B, A′, B′ sont certaines constantes, tandis que

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{\varepsilon x}{\sqrt{(b-c)(c-d)(d-b)}} - \frac{\varepsilon' y}{\sqrt{-(c-d)(d-a)(a-c)}},\\ y' &= \frac{\varepsilon' y}{b\sqrt{-(c-d)(d-a)(a-c)}} - \frac{\varepsilon x}{a\sqrt{(b-c)(c-d)(d-b)}}. \end{aligned}\right.$$

Remplacer *simultanément* ε par $-\varepsilon$ et ε′ par $-\varepsilon'$ ne change pas les formules (37), en raison de la double détermination des deux radicaux écrits sous z et t. Il est clair que les formules (37) définissent une biquadratique Γ_1 d'équations rationnelles

$$(39)\quad z^2=A(x'^2+2Bx'y'+c^2y'^2),\qquad t^2=A'(x'^2+2B'x'y'+c^2y'^2).$$

En changeant de signe une seule des quantités ε ou ε′ on a une autre biquadratique Γ_2, se déduisant d'ailleurs de Γ_1 par l'homologie involutive

$$\frac{X_2}{-X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1}=\frac{T_2}{T_1}.$$

Si l'on choisit le sommet A_1 sur Γ_1 par exemple, nous allons voir qu'un autre sommet A_2 est aussi sur Γ_1, tandis que les deux autres A_3, A_4 sont sur Γ_2. L'équation (26) devient maintenant, avec $c+d=0$, $ab=c^2$,

$$(40) \qquad (\rho_1+\rho)(\rho^2\rho_1^2-c^4)+2(a+b)\rho_1\rho[\rho_1\rho-c^2]=0.$$

Le facteur $\rho_1\rho-c^2=0$ fournit le sommet que nous appelons A_2; le facteur $(\rho_1+\rho)(\rho\rho_1+c^2)+2(a+b)\rho_1\rho=0$ fournit A_3, A_4; comme vérification, on a bien $\rho_3\rho_4=c^2$. *Si nous nous reportons à la conique* Γ', *dans le cas général, les quatre points* A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 *forment un groupe où chaque corde* $A'_i A'_j$ $(i\neq j)$ *enveloppe une courbe* γ *de troisième classe; les deux courbes* Γ', γ *admettant une infinité de triangles de Poncelet; ici, accidentellemenl* γ *se décompose en un point, où concourent toutes les droites telles que* $A'_1 A'_3$ *ou* $A'_1 A'_4$ (*facteur* $\rho\rho_1-c^2=0$), *tandis que les sécantes telles que* $A'_1 A'_3$, $A'_1 A'_4$ *enveloppent une conique admettant avec* Γ' *une infinité de quadrilatères de Poncelet.*

Donc sur les trois points A_2, A_3, A_4 un se sépare, à savoir A_2, et doit décrire le même lieu que A_1, tandis que A_3, A_4 décrivent Γ_2. Pour le voir en toute rigueur, appelons ρ_1 le paramère de A_1, $\frac{c^2}{\rho_1}$ celui de A_2; les formules (36) doivent, au fond, être regardées comme donnant des valeurs proportionnelles pour x_1, y_1, z_1, t_1; si donc on suppose que A_2 correspond à la même détermination pour ε et ε', on voit que les rapports $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{y_2}{y_1}$, $\frac{z_2}{z_1}$, $\frac{t_2}{t_1}$ sont proportionnels aux nombres $(\eta=\pm 1, \eta'=\pm 1)$

$$(41) \qquad \frac{\frac{c^2}{\rho_1}+b}{\rho_1+b}, \qquad \frac{\frac{c^2}{\rho_1}+a}{\rho_1+a}, \qquad \eta\frac{c}{\rho_1}, \qquad \eta'\frac{c}{\rho_1}.$$

D'autre part, les formules (22) donnent aussi (à un facteur de proportionnalité près) les mêmes rapports : on trouve, avec les hypothèses actuelles $(c+d=0,\ ab-c^2=0)$,

$$(42) \qquad \left\{\begin{array}{ll} 2c+\frac{ac}{\rho_1}+\frac{c\rho_1}{a}, & 2c+\frac{bc}{\rho_1}+\frac{c\rho_1}{b}, \\ a+b+\rho_1+\frac{c^2}{\rho_1}, & -a-b-\rho_1-\frac{c^2}{\rho_1}. \end{array}\right.$$

On voit aussitôt que la multiplication de la ligne (41) par $\frac{(\rho_1+a)(\rho_1+b)}{c}$ la convertit en la ligne (42), à condition de prendre $\eta=1$, $\eta'=-1$; le résultat est donc vérifié.

Cette vérification a aussi l'avantage de montrer que la correspondance (A_1, A_2) est comprise dans une involution biaxiale; utilisons en effet les formules (37); on a, pour A_1 et A_2,

$$(43)\quad \frac{x'_2}{y'_2}=\frac{c^2}{\rho_1}=c^2\frac{y'_1}{x'_1},\qquad \frac{z_2}{y'_2}=\frac{c}{\rho_1}\frac{z_1}{y'_1}=\frac{cz_1}{x'_1},\qquad \frac{t_2}{y'_2}=-\frac{c}{\rho_1}\frac{t_1}{y'_1}=\frac{-ct_1}{x'_1}.$$

Ce sont les formules de l'involution biaxiale qui a pour axes les droites $z=0$, $x'+cy'=0$, puis $t=0$, $x'-cy'=0$. La courbe Γ_1 contient le point $(x'_2, y'_2, z_2, -t_2)$, qui cette fois correspond au point A_1 dans l'homologie involutive qui a pour pôle le point $x'+cy'=0$, $z=t=0$ et pour plan directeur le plan $x'+cy'=0$; cette homologie $(x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, -t_2)$, suivie de l'homologie involutive $(x'_2, y'_2, z_2, -t_2; x_2, y_2, z_2, t_2)$, fait passer de A_1 à A_2, de sorte que l'involution biaxiale (A_1, A_2) donne une série ∞^1 de cordes A_1A_2 engendrant une surface de degré 4 (autrement dit x, y, z, t étant exprimés en fonction d'un argument elliptique, A_1 et A_2 ont des arguments dont la différence est la moitié d'une période des fonctions elliptiques introduites).

Γ_2, qui est une transformée par homologie de Γ_1, possède les propriétés analogues pour les cordes A_3A_4.

On peut remarquer que si ρ_1 devient égal à $(-a)$, ρ_2 devient égal à $\frac{c^2}{(-a)}$ ou $(-b)$ et que ρ_3 et ρ_4 sont égaux l'un à $(-a)$, l'autre à $(-b)$; l'équation qui donne les quatre valeurs associées de la variable ρ est donc avec un paramètre μ arbitraire

$$(\rho+a)^2(\rho+b)^2-\mu^2\rho^2=0.$$

La valeur $\rho=-a$ fournit quatre points communs à Γ_1 et Γ_2 pendant que les quatre autres points communs sont fournis par $\rho=-b$; $\rho=-a$ fournit les points $(\sqrt{2}, 0, \pm1, \pm1)$ et $\rho=-b$ les points $(0, \sqrt{2}, \pm1, \mp1)$; avec ces huit points particuliers, on ne peut former que *deux* tétraèdres de l'espèce cherchée dont les sommets sont :

$$\left\{\begin{array}{ll} A_1\ldots\ldots & (\sqrt{2},\ 0,\ 1,\ 1) \\ A_2\ldots\ldots & (\sqrt{2},\ 0,\ -1,\ -1) \\ A_3\ldots\ldots & (0,\ \sqrt{2},\ 1,\ -1) \\ A_4\ldots\ldots & (0,\ \sqrt{2},\ -1,\ -1) \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ll} A_1\ldots\ldots & (\sqrt{2},\ 0,\ 1,\ -1) \\ A_2\ldots\ldots & (\sqrt{2},\ 0,\ -1,\ +1) \\ A_3\ldots\ldots & (0,\ \sqrt{2},\ 1,\ 1) \\ A_4\ldots\ldots & (0,\ \sqrt{2},\ -1,\ -1) \end{array}\right.$$

Pour les valeurs $\rho = -c$, $\rho = -d$ on trouve les mêmes particularités que dans le cas général.

9. Cas particulier $c + d = 0$, $a + b = 0$. — On peut alors sans restreindre, supposer

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ S \equiv x^2 - y^2 + i(z^2 - t^2) = 0, \\ S' \equiv x^2 - y^2 - i(z^2 - t^2) = 0, \\ T' \equiv x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0, \\ W \equiv (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 - 4[x^2 - y^2 + i(z^2 - t^2)][x^2 - y^2 - i(z^2 - t^2)]. \end{array}\right.$$

Nous savons que les formules (20) donnent pour x^2, y^2, z^2, t^2 des carrés parfaits en ρ, *de sorte que la courbe* Γ *dégénère ici en huit droites ;* autrement dit, si nous considérons ce nouveau cas comme dégénérescence du précédent, chaque biquadratique Γ_1 et Γ_2 se décompose elle-même en quatre droites. Il est d'ailleurs plus aisé de faire la discussion directement; en tenant compte de $T' = 0$, l'équation W donne $(x^2+y^2)^2 - [(x^2-y^2)^2 + (z^2-t^2)^2] = 0$ ou $4x^2y^2 - (z^2-t^2) = 0$, de sorte que l'on a à résoudre le système $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$, $2xy = z^2 - t^2$ ou celui qui s'en déduit en permutant z et t; on a ainsi, en ajoutant et retranchant $(x+y)^2 = 2z^2$, $(x-y)^2 = 2t^2$, ce qui donne quatre droites pour le premier des deux systèmes.

Si nous considérons les deux droites

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{llll} (\Delta_1) & x + y = z\sqrt{2}, & & x - y = t\sqrt{2}, \\ (\Delta_2) & x + y = -z\sqrt{2}, & & x - y = -t\sqrt{2}, \end{array}\right.$$

on constate aussitôt qu'elles sont conjuguées par rapport à Σ et qu'elles sont tangentes à S et S'. Prenons un point A_1 sur Δ_1 : le plan polaire de A_1 par rapport à Σ coupe Δ_1 de nouveau en A_2 ; de A_1 dans le plan $A_1\Delta_2$ on peut mener à S deux tangentes qui percent Δ_2 en A_3

et A_4; le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ répond aux conditions, comme on le vérifie aisément. Il y a quatre couples de droites telles que $\Delta_1\Delta_2$, de sorte qu'il y a quatre séries simplement infinies de tétraèdres, séries distinctes les unes des autres.

On peut faire disparaître les imaginaires des équations de S et S′ en posant

$$(46) \qquad z = \zeta + i\theta, \qquad t = \zeta - i\theta.$$

On a alors

$$(47) \qquad \begin{cases} \Sigma \equiv x^2 + y^2 + 2(\zeta^2 - \theta^2), \\ S \equiv x^2 - y^2 - 4\zeta\theta, \\ S' \equiv x^2 - y^2 + 4\zeta\theta, \\ T' \equiv x^2 - y^2 + 2(\zeta^2 - \theta^2). \end{cases}$$

Si le tétraèdre $(x\,y, \zeta, \theta)$ est réel, les quadriques Σ, S, S′, T′ sont, non seulement d'équation réelle, mais même à point réels, mais les droites Δ sont toutes imaginaires.

On peut se demander ce qu'est, sur la conique Γ' introduite précédemment, la figure A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 : les cordes joignant deux de ces quatre points passent par l'un ou l'autre de trois points fixes formant un triangle conjugué par rapport à Γ'; l'équation en ρ et ρ_1 se décompose ici en $(\rho + \rho_1)(\rho\rho_1 + 1)(\rho\rho_1 - 1) = 0$.

10. Tétraèdres dont les arêtes sont tangentes a deux quadriques S, S′. — Donnons-nous *a priori* un tétraèdre T; une quadrique S assujettie à toucher les six arêtes de T dépend de trois paramètres. Si nous appelons A_1, A_2, A_3, A_4 les sommets de T et α_{ij} le point de contact inconnu de l'arête A_iA_j avec S, il est facile de voir que *la donnée des points* α_{12}, α_{13}, α_{14} *relatifs à trois arêtes formant un trièdre détermine complètement* S; en effet, le plan α_{12}, α_{13}, α_{14} coupe A_{23}, A_{34}, A_{42} en β_{23}, β_{34}, β_{42} qui sont en ligne droite; donc les conjugués α_{23}, α_{34}, α_{42} (des points β_{ij}, par rapport aux sommets A_i, A_j) sont tels que les droites $A_4\alpha_{23}$, $A_2\alpha_{34}$, $A_3\alpha_{42}$ concourent; il y a donc *une* conique s_1 inscrite dans le triangle $A_2A_3A_4$ et touchant les côtés aux points α_{34}, α_{42}, α_{23}; d'autre part α_{13}, α_{14} sont en ligne droite avec β_{34}, de sorte que α_{13}, α_{14}, α_{34} sont aussi les points de contact des côtés du triangle $A_1A_3A_4$, avec une conique s_2 : finalement les quatre coniques s_1, s_2, s_3, s_4 ainsi obtenues se touchent deux à deux en un point d'une arête de T et sont évidemment sur une même quadrique S qui est la seule à toucher T en α_{12}, α_{13}, α_{14}. Remarquons que si l'on avait donné α_{23}, α_{34}, α_{43}, il aurait fallu s'assurer d'abord que $A_4\alpha_{23}$, $A_2\alpha_{34}$, $A_3\alpha_{42}$ concourent; ensuite on aurait pu faire passer un plan quelconque par la droite $\beta_{23}\beta_{34}\beta_{42}$ et l'on aurait obtenu ∞^1 quadriques. La proposition réciproque est la suivante : *la donnée des plans* P_{23}, P_{34}, P_{42} *tangents à la quadrique inconnue* S *aux points inconnus où elle doit toucher* A_{23}, A_{34}, A_{42} *détermine complètement* S; bien entendu P_{ij} contient l'arête A_{ij}.

Imaginons donc deux quadriques S, S′ tangentes aux arêtes de T; le système *général* T, S, S′ dépend de dix-huit paramètres, et nous allons constater que le système S, S′ obtenu ne dépend que de dix-sept paramètres et admet ∞^1 tétraèdres T. Pour le voir remarquons qu'il existe ∞^3 quadriques Σ conjuguées au tétraèdre T; si l'on donne un point α_{12} de l'arête A_{12} et un plan P'_{34} contenant l'arête A_{34}, on obtient une condition linéaire entre les coefficients de Σ en imposant que α_{12} soit le pôle de P'_{34} relativement à Σ; donc α_{12}, α_{13}, α_{14} étant les points de contact de S avec A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, et P'_{34}, P'_{42}, P'_{23} étant les plans tangents à S′ aux points où elle touche A_3A_4, A_4A_2, A_2A_3, la quadrique Σ, déterminée d'une façon unique par ce fait que α_{1i} admet pour plan polaire P'_{jk}, est telle que S admette S′ pour réciproque vis-à-vis de Σ [1]. Nous avons donc la configuration étudiée jusqu'ici. On peut ramener les équations de S, S′, Σ aux formes

$$(48)\quad \begin{cases} (S) & ax^2+by^2+cz^2+dt^2=0, \\ (S') & \dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}+\dfrac{t^2}{d}=0, \\ (\Sigma) & x^2+y^2+z^2+t^2=0, \end{cases}$$

[1] Dans un travail, comme celui-ci, où le simple dénombrement d'inconnues et d'équations peut conduire à des erreurs, il importe de démontrer en toute rigueur l'existence de la quadrique Σ unique. Prenons $A_1A_2A_3A_4$ pour tétraèdre de référence; le point donné α_{12} a des coordonnées connues $(1, \lambda_2, 0, 0)$ et le plan donné P'_{34} des coordonnées connues $(1, L_2, 0, 0)$; α_{13} est $(1, 0, \lambda_3, 0)$, $\alpha_{14}(1, 0, 0, \lambda_4)$ et les plans P'_{42}, P'_{23} sont $(1, 0, L_3, 0)$, $(1, 0, 0, L_4)$. La quadrique Σ est $x_1^2+\dfrac{L_2}{\lambda_2}x_2^2+\dfrac{L_3}{\lambda_3}x_3^2+\dfrac{L_4}{\lambda_4}x_4^2=0$.

Les racines de l'équation en λ relatives au faisceau $S - \lambda S' = 0$ sont a^2, b^2, c^2, d^2; la relation $\Sigma ab = 0$ devient donc $\Sigma \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j} = 0$ *nécessaire et suffisante* ([1]) pour que S, S′ admettent *un* tétraèdre dont les arêtes les touchent toutes deux et par suite ∞^1 *tétraèdres* de cette espèce; la conclusion du moins est générale, quand S et S′ admettent un tétraèdre conjugué commun unique (et non dégénéré).

Examinons maintenant quelques cas particuliers. Le cas où S et Σ se raccordent le long d'une conique est ici sans intérêt, car S′ se confond alors avec S. Le cas de deux quadriques S, Σ bitangentes fournit

$$\begin{aligned} S &\equiv a(x^2+y^2) + cz^2 + dt^2 = 0, \\ \Sigma &\equiv x^2+y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ S' &\equiv \frac{1}{a}(x^2+y^2) + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0. \end{aligned}$$

La transformation homographique

$$(x, y, z, t;\ X\cos\alpha - Y\sin\alpha,\ X\sin\alpha + Y\cos\alpha,\ Z,\ T)$$

fournit ∞^1 nouveaux tétraèdres conjugués communs à S, S′, Σ sans changer ces quadriques ni l'*ensemble* des tétraèdres d'arêtes tangentes à S, S′, Σ.

Les circonstances sont bien différentes avec l'hypothèse $c + d = 0$, $ab - c^2 = 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} S &\equiv ax^2 + by^2 + c(z^2 - t^2) = 0, \\ S' &\equiv \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{1}{c}(z^2 - t^2) = 0, \\ \Sigma &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \end{aligned}$$

([1]) Dans cette relation chaque radical $\sqrt{\lambda_i}$ est pris avec la même détermination dans les produits où il figure, de sorte que l'on doit, pour avoir une relation rationnelle, prendre le produit de 8 facteurs irrationnels, obtenus en changeant le signe des termes $\sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}, \sqrt{\lambda_4}$ de toutes les façons possibles. Il ne faut pas confondre cette relation avec $\Sigma\sqrt{\lambda_i\lambda_j} = 0$ qui ferait intervenir 32 facteurs et qui, rendue rationnelle serait décomposable en plusieurs rationnels, dont l'un correspond à $\Sigma\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j} = 0$.

Cette fois la transformation homographique

$$(x, y, z, t;\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z}\,\mathrm{Ch}\,\alpha + \mathrm{T}\,\mathrm{Sh}\,\alpha,\ \varepsilon\{\mathrm{Z}\,\mathrm{Sh}\,\alpha + \mathrm{T}\,\mathrm{Ch}\,\alpha\}) \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

ne change ni S *ni* S′, *mais donne successivement* ∞^1 *quadriques* Σ, *de sorte que nous obtenons* ∞^2 *tétraèdres d'arêtes tangentes à* S *et* S′, *répartis en* ∞^1 *séries, les tétraèdres d'une même série étant conjugués par rapport à l'une des quadriques* Σ. Les sommets de ces tétraèdres sont répartis sur l'une ou l'autre des deux surfaces engendrées par les biquadratiques Γ_1, Γ_2 indiquées plus haut, au cours de cette transformation homographique continue. En changeant de notations (ce qui revient à remplacer t par it, et supposer $x = 1$) nous pouvons ramener S et S′ à être de révolution autour du même axe, Σ étant à points réels et la transformation homographique devient une révolution.

Le cas particulier $a + b = 0$, $c + d = 0$ a donné

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &\equiv x^2 - y^2 - i(z^2 - t^2) = 0, \\ \mathrm{S}' &\equiv x^2 - y^2 - i(z^2 - t^2) = 0, \\ \Sigma &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \quad = 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas la transformation homographique à deux paramètres

$$(x, y, z, t;\ \mathrm{X}\,\mathrm{Ch}\,\alpha + \mathrm{Y}\,\mathrm{Sh}\,\alpha,\ \varepsilon\{\mathrm{X}\,\mathrm{Sh}\,\alpha + \mathrm{Y}\,\mathrm{Ch}\,\alpha\}\mathrm{Z}\,\mathrm{Ch}\,\beta + \mathrm{T}\,\mathrm{Sh}\,\beta,\ \eta\{\mathrm{Z}\,\mathrm{Ch}\,\mathrm{S} + \mathrm{T}\,\mathrm{Ch}\,\beta\})$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ *nous donne* ∞^3 *tétraèdres d'arêtes tangentes à* S *et* S′ *répartis en* ∞^2 *séries, les tétraèdres d'une même série étant conjugués par rapport à une même quadrique*. Il y a possibilité de faire venir un sommet en un point arbitraire de l'espace; mais quelle que soit la façon de choisir les variables, *on n'obtient jamais de tétraèdres réels*. Avec la substitution déjà employée

$$z = \zeta + i\theta, \qquad t = \zeta - i\theta,$$

on a

$$\mathrm{S} \equiv x^2 - y^2 - 4\zeta\theta, \qquad \mathrm{S}' \equiv x^2 + y^2 + 4\zeta\theta, \qquad \Sigma \equiv x^2 + y^2 + 2(\zeta^2 - \theta^2),$$

et l'on a trois quadriques réelles, puis une transformation homographique réelle

$$\left(x, y, \zeta, \theta;\ \mathrm{X}\,\mathrm{Ch}\,\alpha + \mathrm{Y}\,\mathrm{Sh}\,\alpha,\ \mathrm{X}\,\mathrm{Sh}\,\alpha + \mathrm{Y}\,\mathrm{Ch}\,\alpha,\ \mathrm{B}\beta\mathrm{Z},\ \frac{\Theta}{\beta}\right).$$

Nous n'avons pas épuisé tous les cas spéciaux. Étant données deux quadriques S, S′ rapportées à un tétraèdre conjugué commun d'équations

$$(S) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$

$$(S') \qquad \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} + \frac{z^2}{c'} + \frac{t^2}{d'} = 0;$$

elles sont réciproques vis-à-vis de l'une des huit quadriques

$$(\Sigma) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0,$$

définies par les relations

$$A^2 = \frac{a}{a'}, \qquad B^2 = \frac{b}{b'}, \qquad C^2 = \frac{c}{c'}, \qquad D^2 = \frac{d}{d'}.$$

Nous avons ensuite envisagé le cas où l'on a

$$\Sigma \frac{a}{A}\frac{b}{B} = 0,$$

ce qui, en général, n'est possible qu'avec l'une des huit quadriques Σ, quand on a la relation $\Sigma\sqrt{aa'}\sqrt{bb'} = 0$ $\left(\text{il suffit de raisonner sur la relation équivalente } \Sigma\frac{ab}{AB} = 0, \text{ car on a } aa' = A^2a'^2,\ \pm\sqrt{aa'} = Aa' = \frac{a}{A}\right)$. On voit aisément que si nous supposons $b+c+d=0, bc+cd+db=0$, la quadrique S peut être associée à l'une des deux quadriques

$$(\Sigma) \qquad \pm x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

et que l'on obtient comme réciproque toujours la même quadrique

$$(S') \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0.$$

On a, en effet, pris $A = \pm 1$, $B = C = D = 1$ et les deux relations

$$\pm a(b+c+d) + bc + cd + db = 0$$

sont réalisées ensemble; *cette fois les deux quadriques* S, S′ *admettent deux séries* ∞^1 *de tétraèdres dont les arêtes leur sont tangentes*. Pour la première série on a

$$\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$
$$T' \equiv b(c+d+a)y^2 + c(d+a+b)z^2 + d(a+b+c)t^2 = 0.$$

La quadrique T′ est un cône. Pour la seconde série on a

$$\Sigma = -x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$
$$T' \equiv b(c+d-a)y^2 + c(d-a+b)z^2 + d(-a+b+c)t^2.$$

Dans chaque série, les tétraèdres sont conjugués par rapport à la quadrique Σ correspondante. Ici les trois quantités b, c, d sont racines d'une équation de la forme $u^3 = \alpha$; si α est réel, le nombre b est réel, c et d sont imaginaires conjuguées de sorte qu'en écrivant $z = \zeta + i\theta$ $t = \zeta - i\theta$, on fait disparaître les imaginaires de toutes les équations S, S′, Σ, T′.

De même, quand nous prenons $a + b = 0$, $a^2 = cd$ nous pouvons prendre pour Σ soit $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$, soit $-x^2 - y^2 + z^2 + t^2 = 0$. *Nous avons alors la première combinaison*

$$\text{(S)} \qquad a(x^2 - y^2) + cz^2 + dt^2 = 0,$$
$$(\Sigma) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$
$$\text{(S')} \qquad \frac{1}{a}(x^2 - y^2) + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0,$$
$$T' \equiv (c+d-a)x^2 - (a+c-d)y^2 + a(z^2+t^2) = 0,$$

puis la seconde combinaison

$$\text{(S)} \qquad a(x^2 - y^2) + cz^2 + dt^2 = 0,$$
$$(\Sigma) \qquad -x^2 - y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$
$$\text{(S')} \qquad \frac{1}{a}(x^2 - y^2) + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0,$$
$$T' \equiv +(a+c+d)x^2 - (c+d-a)y^2 + a(z^2+t^2) = 0,$$

et chacune donne encore une série ∞^1 *de tétraèdres.*

D'ailleurs on passe de la première combinaison à la seconde en changeant x^2 en $(-y^2)$ et y^2 en $(-x^2)$, ce qui revient à faire une transformation homographique simple, mais on remarque que la transformation homographique déjà employée qui consiste à remplacer x, y par $X \operatorname{Ch} \alpha + Y \operatorname{Sh} \alpha$, $\varepsilon(X \operatorname{Sh} \alpha + Y \operatorname{Ch} \alpha)$ donne ce résultat en prenant $\operatorname{Ch} \alpha = 0$, $\operatorname{Sh} \alpha = \pm i$, ce qui donne $e^\alpha = \pm i$, $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, de sorte que nous pouvons négliger ce dernier résultat.

11. Examen des cas spéciaux. — Dans ce qui précède nous avons admis que S et Σ (ou S et S′) admettent un tétraèdre conjugué non dégénéré [pour être plus précis, au moins un tel tétraèdre]. Cette conclusion est en défaut : 1° *si* S *et* Σ *sont tangentes en un point et un seul;* 2° *si* S et Σ *se coupent suivant une cubique gauche et une génératrice;* 3° *si* S *et* Σ *se coupent suivant une conique et deux génératrices; mêmes remarques si* S *et* S′ *offrent une de ces configurations.*

Or pour le problème relatif à S et Σ, nous avons obtenu la condition nécessaire et suffisante $\Sigma\lambda_i\lambda_j$: *cette condition, que l'on pourrait former sans particulariser le système de référence, subsiste même dans les cas particuliers que nous avons indiqués;* le lieu des sommets des tétraèdres peut subir certaines altérations : points doubles, ou décomposition. Même remarque pour le problème relatif à S et S′ et la relation $\Sigma\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}=0$.

Il y a aussi à considérer le cas où S *se réduit à un cône :* il n'y a pas lieu de traiter le cas où Σ dégénère. Dans ce cas, les raisonnements et calculs effectués subsistent tant qu'il n'y a pas lieu de faire intervenir les équations tangentielles de S, qui sont au nombre de *deux*, et non plus *d'une seule;* de la sorte certains résultats du cas général ne peuvent plus être suivis par continuité : en prenant

$$(S) \qquad by^2+cz^2+dt^2=0,$$

$$(\Sigma) \qquad x^2+y^2+z^2+t^2=0,$$

on obtient pour S′

$$(S') \qquad x=0, \qquad \frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+\frac{t^2}{d}=0.$$

Si donc on fait tendre a vers zéro, on a bien le droit de conclure à la condition, nécessaire et suffisante, $bc+cd+db=0$, mais le lieu Γ va être modifié complètement, parce que l'équation $W=0$ n'a plus lieu d'être envisagée. En effet, la méthode générale conduit encore pour le lieu des points A_1, tels que le cône C de sommet A_1 circonscrit à S (dégénéré en deux plans), soit harmoniquement circonscrit au cône de même sommet circonscrit à Σ, à l'équation

$$T'\equiv b(c+d)y^2+c(b+d)z^2+d(b+c)t^2=0.$$

De même la condition pour que le plan polaire de A_1 par rapport à Σ coupe S suivant une conique harmoniquement inscrite dans la section de Σ est

$$T'' = x^2(bc + cd + db) + y^2 cd + z^2 bd + t^2 bc = 0,$$

et nous retrouvons la condition $bc + cd + db \equiv 0$ pour que ces deux lieux coïncident. On a eu simplement à faire $a = 0$ dans les résultats du cas général, parce que l'équation tangentielle de la quadrique S n'a pas eu à intervenir. Mais ici, si nous cherchions à continuer l'application du calcul général, pour obtenir la condition pour qu'un plan coupe T′ suivant une conique circonscrite à ∞^1 triangles circonscrits à la section de S, il faudrait considérer les quadriques du faisceau $T' + \lambda S = 0$, qui sont toutes des cônes, et au lieu de prendre leurs équations tangentielles écrire qu'elles se décomposent : le résultat est donc tout à fait modifié. Ici, on constate même que la condition est satisfaite *identiquement* pour un plan *quelconque;* cela tient à ce que T′ *et* S *sont deux cônes de même sommet*, T′ *étant capable de* ∞^1 *angles trièdres à faces tangentes à* S*;* en raisonnant en effet sur les sections de T′, Σ, S par le plan $x = 0$, la base de T′ est harmoniquement circonscrite à la section de Σ, laquelle est elle-même harmoniquement circonscrite à la section de S : en écrivant l'équation de T′ sous la forme $\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0$, on voit bien que les bases de T′ et S sont réciproques vis-à-vis de la section de Σ, de sorte que tous les triangles inscrits dans T′, conjugué à Σ, ont leurs côtés tangents à la base de S.

Cela posé, pour tout point A_1 de T′, la fin du raisonnement se poursuit sans modification, et l'on trouve un unique triangle A_2, A_3, A_4 dans le plan polaire de A_1 vis-à-vis de Σ. Les tétraèdres obtenus ont leurs arêtes sécantes à la conique S′. Synthétiquement, on peut énoncer les résultats ainsi :

Le cône S *est simplement assujetti à être harmoniquement inscrit dans le cône de même sommet circonscrit à* Σ; *la conique* S′ *réciproque de* S *vis-à-vis de* Σ *est base du cône* T′.

Si l'on fait une homologie *quelconque* dont le pôle est le sommet commun de S et T′, dont le plan directeur est le plan polaire de ce sommet par rapport à Σ, les cônes S, T′ et la conique S′ restent invariables, de sorte que S *et la conique* S′ *admettent* ∞^3 *tétraèdres dont les* *arêtes sont tangentes à* S, *sécantes à* S′, *les sommets étant sur* T′; *la quadrique* Σ *donne naissance à un faisceau de quadriques se raccordant suivant la même conique.*

Pour qu'un cône S *et une conique* S′ *donnent cette propriété, il faut et il suffit que la conique* S′ *soit capable d'une infinité de triangles circonscrits à la section de* S *par son plan.* A_1 étant un point de T′, la perspective de A_1 sur S′ à partir du sommet de S est un point α; on construit le triangle $\alpha\beta\gamma$ inscrit dans S′, circonscrit à la section de S; β, γ sont deux sommets A_3, A_4 des tétraèdres, A_2 est un point quelconque de la génératrice passant en A_1 sur le cône T′.

Nous pouvons de même examiner le cas de *deux cônes* S, S′ *devant admettre des tétraèdres dont les arêtes leur sont tangentes.* L'équation en λ relative au faisceau $S+\lambda S'=0$ (S et S′ n'ont pas le même sommet) a deux racines particulières connues, l'une λ_1 nulle, l'autre infinie λ_4; quand, dans le cas général λ_4 devient infini dans la relation $\Sigma\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}=0$, celle-ci devient $\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}=0$; ici λ_1 devenant nul, il reste $\lambda_2=\lambda_3$, ce qui peut avoir lieu dans deux cas : ou bien S et S′ se touchent en un point, ou bien l'intersection de S et S′ se décompose en deux coniques, de sorte que, dans ce dernier cas, les quadriques du faisceau ont un tétraèdre conjugué commun. Il est facile de se rendre compte de cette décomposition du problème; car l'équation générale des quadriques tangentes aux arêtes d'un tétraèdre, adopté comme tétraèdre de référence est ($\varepsilon_i=1$ ou -1)

$$\begin{aligned}A^2x^2+A'^2y^2+A''^2z^2+A'''^2t^2+2\varepsilon_1AA'xy+2\varepsilon_2AA''xz\\ +2\varepsilon_3AA'''xt+2\varepsilon_4A'A''yz+2\varepsilon_5A'A'''yt+2\varepsilon_6A''A'''zt=0.\end{aligned}$$

En changeant éventuellement de signe A′, A″, A‴ on peut supposer $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=-1$; cela posé, si les trois quantités ε_4, ε_5, ε_6 sont égales à $+1$, on a un plan double d'équation

$$(-Ax+A'y+A''z+A'''t)^2=0;$$

si deux de ces quantités, ε_4 et ε_5 par exemple, valent $(+1)$ et si l'autre ε_6 vaut (-1) on a un cône $(-Ax+A'y+A''z+A'''t)^2-4A''A'''zt=0$, dont le sommet est sur l'arête $z=t=0$; si ε_5 et ε_6 valent (-1), ε_4 valant $(+1)$, on a encore le cône

$$(Ax-A'y-A''z+A'''t)^2-4AA'''xt=0$$

dont le sommet est sur l'arête $x = t = 0$; si $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -1$, on a une quadrique véritable, sauf si l'un des nombres A, A', A'', A''' est nul, auquel cas on a un cône dont le sommet est confondu avec un sommet du tétraèdre.

Donc si deux cônes sont tangents aux arêtes d'un même trièdre, ils peuvent avoir leurs sommets sur la même arête et alors ils sont manifestement tangents aux deux faces qui contiennent cette arête, ou bien ils ont leurs sommets chacun sur deux arêtes distinctes A_1A_2, A_1A_3 : mais alors la face $A_1A_2A_3$ leur est tangente à chacun suivant une génératrice et leur intersection présente un point double. La construction synthétique des tétraèdres d'arêtes tangentes est immédiate dans le premier cas : appelons P, Q les deux plans tangents communs menés aux cônes S et S' par la ligne de leurs sommets : nous prenons A_1 et A_2 arbitraires sur cette ligne; la droite A_3A_4 est une tangente quelconque commune aux deux cônes, limitée aux points où elle coupe P et Q; on trouve ainsi ∞^4 tétraèdres.

Dans le second cas, une face du tétraèdre, $A_1A_2A_3$ par exemple, est dans le plan P tangent commun aux deux cônes menés par la ligne de leurs sommets; coupons les deux cônes par un plan quelconque Q; la droite A_2A_3 peut être prise coïncidant avec la droite d'intersection de P et Q; nous prenons deux quelconques des tangentes communes [autres que la droite P, Q] aux sections de S et S' par Q; ces deux tangentes forment avec (P, Q) un triangle $A_2A_3A_4$, les sommets A_2 et A_3 étant sur (P, Q); peu importe d'ailleurs comment on choisit celui des deux points que l'on appelle A_2 ou A_3; les droites SA_2 et $S'A_3$ se coupent en A_1. On a ainsi ∞^3 tétraèdres : la position du plan Q détermine A_1 dans le plan lieu de A_1; le choix de A_1 dans ce plan est arbitraire (2 paramètres); on doit alors prendre A_4 arbitrairement (1 paramètre) sur la droite commune au plan, autre que SA_1S', mené par A_1 S' tangentiellement à S'; on mène alors dans le plan SA_1A_4 la droite A_4A_2 tangente à la section de S' par ce plan; on obtient ensuite A_4A_3 par le procédé analogue.

Inutile de parler du problème corrélatif : tétraèdre dont les arêtes rencontrent deux coniques qui ont soit un point commun, soit deux points communs.