JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRI MILLOUX

Fonctions méromorphes dans un cercle

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 257-274.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_257_0>

Fonctions méromorphes dans un cercle;

PAR HENRI MILLOUX
(Bordeaux).

INTRODUCTION

Il s'agit des fonctions $f(x)$ méromorphes dans le cercle unité, ne prenant pas plus de n fois, dans ce cercle, l'ensemble de trois valeurs données.

L'application du théorème de P. Boutroux-Henri Cartan (qui limite l'ensemble des points du plan où un polynome est en module inférieur à une constante donnée) m'a conduit à des limitations satisfaisantes du nombre des zéros de $f(x) - a$ dans un cercle concentrique et de rayon *numérique*. Ces applications étaient ensuite utilisées dans l'étude des fonctions méromorphes dans le plan ([1]).

M. G. Valiron s'est proposé, en appliquant le même théorème, d'obtenir des limitations valables dans le cercle concentrique de rayon *littéral* r ([2]). Les résultats qu'il a obtenus, intéressants, font cependant intervenir $1 - r$ à une puissance assez éloignée de celle que donnent des exemples typiques (fonction modulaire...).

([1]) H. MILLOUX, *Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes et entières et le théorème de Picard-Borel* (*Acta Math.*, t. 52, p. 189-255; *voir* p. 202).

([2]) G. VALIRON, *Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes* (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 186, 1928, p. 935). *Voir* aussi son fascicule du Mémorial : *Directions de Borel des fonctions méromorphes* Chap. I, n° 5.

Cette imperfection relative m'a fait revenir sur la base de ces études, le théorème de Boutroux-Henri Cartan. Le présent Mémoire traite l'utilisation, à la même étude, d'une *transcription non euclidienne* de ce théorème. Cette transcription a été exposée dans un récent article [1]. Je rappelle ici l'énoncé, en indiquant que je désigne par *pseudo-distance non euclidienne* (AB) de deux points A et B intérieurs au cercle unité [2], d'affixes x et x', la quantité

$$\left|\frac{x-x'}{1-x\bar{x}'}\right|.$$

THÉORÈME. — *Soit n points* P_i *intérieurs au cercle unité. L'ensemble des points* M *de ce cercle, pour lesquels on a l'inégalité*

$$\text{Produit}\,(MP_i) \leqq h^n$$

peut être enfermé dans des cercles (intérieurs au cercle unité, et appelés *cercles d'exclusion*) *dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à* 2 *eh.*

Les résultats de l'application de cette transcription, résumés dans l'énoncé du n° **15** du présent Mémoire, sont nettement meilleurs que ceux fournis par le théorème de P. Boutroux-Henri Cartan. La façon dont r intervient dans la limitation du nombre des racines de $f(x)-a$ situées dans le cercle $|x|=r$, ne semble guère susceptible d'amélioration.

1. Désignons par P_i les points en nombre n' au plus égal à n, où une fonction $f(x)$, méromorphe dans le cercle $|x|=1$, prend l'une des valeurs $0, 1, \infty$, et par E l'ensemble des points M tels que le produit des pseudo-distances (MP_i) soit au plus égal à $h^{n'}$. Cet ensemble peut être enfermé dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à $2eh$. Effectuons dès maintenant le choix de h, en lui fixant une valeur numérique assez faible, par exemple e^{-10}.

---

(1) H. MILLOUX, *Sur une extension d'un théorème de P. Boutroux-Henri Cartan* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 45, 1937).

(2) En abrégé *pseudo-distance*. La définition du *pseudo-rayon* d'un cercle intérieur au cercle unité en résulte.

Lorsqu'un point M appartient à l'ensemble E' complémentaire de E on a

$$\text{Produit}\,(MP_i) > e^{-10n'} \geqq e^{-10n}.$$

Et, en particulier, si ce point M est à l'origine

$$\Sigma \log OP_i > -10n.$$

Or, tout cercle dont le pseudo-rayon est e^{-8} contient au moins un point de E', d'après ce qui vient d'être rappelé. Il en est ainsi en particulier d'un point au moins du cercle $|x| \leqq e^{-8}$. On ramènera ce point à l'origine par une transformation homographique respectant le cercle $|x| = 1$. Cette transformation ne trouble guère les distances euclidiennes; elle les multiplie par des quantités qui sont comprises entre deux constantes numériques, d'ailleurs très voisines de 1. Quant aux distances non euclidiennes et aux pseudo-distances, elles restent inchangées. Donc on peut supposer sans inconvénient que *l'origine appartient à l'ensemble* E'.

Quant à la fonction f, nous lui adjoindrons cinq autres fonctions, qui également ne prennent pas plus de n fois l'ensemble des valeurs $0, 1, \infty$. Le tableau total de ces six fonctions est désigné par T. A partir de l'une d'elles, f, le tableau est le suivant :

$$(\mathrm{T}) \qquad f, \quad 1-f, \quad \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{1-f}, \quad \frac{f}{1-f}, \quad \frac{1-f}{f}.$$

Il existe en particulier au moins deux fonctions de ce groupe T, dont les valeurs à l'origine sont comprises en module entre $\frac{1}{2}$ et 2. Nous désignerons par f et $\frac{1}{f}$ ces deux fonctions. Nous reviendrons ultérieurement sur les autres fonctions du groupe T.

2. Ces choix de l'origine et de la fonction étant effectués, nous allons être amenés à scinder en deux l'étude de la distribution des valeurs de la fonction dans le cercle $|x| = 1$; commençons par l'hypothèse suivante :

Hypothèse A. — *Il existe une suite de cercles de centre* O *et de rayons* $r_1, r_1, \ldots, r_p, \ldots$ *tendant vers un, tels que sur chacun de ces* *cercles, se trouve vérifiée l'inégalité suivante :*

$$\log|f(x)-f(O)|<-n. \tag{1}$$

D'après un théorème classique, le nombre des racines de $f(x)-\alpha=O$ est égal au nombre des pôles de la fonction f, et ceci quel que soit α, à l'intérieur de chaque cercle $|x|=r_p$, pourvu que α satisfasse à l'inégalité [1] :

$$\log|\alpha-f(O)|\geqq-n; \tag{2}$$

d'où en particulier le résultat suivant :

Si α satisfait à l'inégalité (2), α est pris moins de n fois par la fonction $f(x)$ dans le cercle $|x|=1$, et un nombre de fois indépendant de α.

On peut même remplacer n par $\frac{n}{2}$ si n n'est pas nul, car alors O et ∞ satisfont à l'inégalité (2), et par suite le nombre des zéros est égal au nombre des pôles : total inférieur ou égal à n.

3. Intéressons-nous aux valeurs β qui satisfont à l'inégalité

$$\log|\beta-f(O)|<-n \tag{3}$$

(en particulier, β est inférieur en module à 3), et cherchons à limiter le nombre des zéros de $f(x)-\beta$.

Du fait de la valeur de $f(O)$, et de l'inégalité (1), sur chaque cercle $|x|=r_p$, on a l'inégalité $|f(x)|<3$ (quel que soit n); d'où

$$m(r_p, f)<\log 3;$$

d'où, par suite,

$$T(r_p, f)=\sum\log\frac{r_p}{OQ_i}+m(r_p, f)<10n+\log 3, \tag{4}$$

Q_i est un pôle de f, intérieur au cercle $|x|=r_p$.

Désignons par $T(1, f)$ la limite, si elle existe, de $T(r, f)$ lorsque r tend vers un. Du fait de la propriété de croissance de l'indice caracté-

---

[1] De façon que la variation de l'argument de $f(x)-\alpha$ soit nulle le long du cercle $|x|=r_p$.

ristique T, on peut se contenter de prendre une suite de valeurs de r tendant vers un.

Ici, la limite existe, par suite de l'inégalité (4), et l'on a

$$T(1, f) \leqq 10n + \log 3;$$

d'où

$$T(1, f-\beta) \leqq 10n + \log 3 + \log 2 + \overset{+}{\log} |\beta| < 10n + \log 12.$$

Or,

$$T\left(1, \frac{1}{f-\beta}\right) = T(1, f-\beta) + \log \frac{1}{|f(O)-\beta|};$$

d'où *a fortiori* l'inégalité

$$(5) \qquad N\left(1, \frac{1}{f-\beta}\right) < kn + k + \log \frac{1}{|f(O)-\beta|} \quad (^1),$$

k désigne ici, de même que dans la suite, une constante *numérique* qui n'a pas nécessairement partout la même valeur.

4. Interprétation de la formule (5). — Revenons d'abord à une fonction quelconque du groupe T. Désignons par $\delta(\beta, A)$ la distance sphérique de β et de A, c'est-à-dire la distance des images de β et A sur la sphère de Riemann. Si f prend en deux points les quantités β et A, et si l'on fait subir à f une des substitutions du groupe T, la distance sphérique de β et de A ne se trouve pas modifiée, ou alors se trouve multipliée par une quantité comprise, quelles que soient les valeurs de β et de A, entre deux constantes *numériques* : ainsi la nouvelle valeur de $\log \delta(\beta, A)$ est comprise entre les deux quantités obtenues en additionnant ou retranchant une constante numérique k à l'ancienne valeur.

D'autre part, dans le cas précédent, $A = f(O)$ est compris en module entre $\frac{1}{2}$ et 2. β est proche de A. La distance euclidienne $|A-\beta|$ est, avec la distance sphérique dans un rapport compris entre deux constantes numériques.

---

(1) On aurait pu aussi majorer de la même façon $N\left(r_p, \frac{1}{f-\beta}\right)$, puis passer à la limite.

L'inégalité (5) *s'écrit donc, pour toutes les fonctions du groupe* T, *sous la forme*

$$\text{(5')} \qquad N[1, \beta] < kn + k + \log \frac{1}{\delta(\beta, A)} = H.$$

Autre interprétation. — On a

$$N[1, \beta] = \sum \log \frac{1}{OQ}.$$

Or, $\log \frac{1}{OQ}$ est toujours supérieur à $1 - OQ$ (OQ étant inférieur à un).

Désignons par $d_1(\beta)$ la distance euclidienne du point Q au cercle $|x| = 1$; l'expression H majore encore la quantité $\Sigma d_1(\beta)$.

5. La propriété qui précède n'est pas encore absolument générale. En effet, nous avons déplacé, au besoin, l'origine, de façon que cette origine soit hors des cercles d'exclusion englobant l'ensemble E.

Mais si l'origine ne peut être prise, il y a, à moins de e^{-8} de cette origine, un point O_1, qui satisfait à cette condition. La transformation homographique qui amène O_1 à l'origine trouble les distances euclidiennes, mais elle les multiplie par des quantités comprises entre deux constantes *numériques* très voisines de 1. En particulier, il en est de même de la distance euclidienne d'un point au cercle fondamental, et de la distance euclidienne du point homologue du même cercle.

Donc, quelle que soit l'origine, on aura toujours l'inégalité

$$\text{(5'')} \qquad \Sigma d_1(\beta) < kn + k + k \log \frac{1}{\delta(\beta, A)} = H.$$

Remarquons que d'une part H majore le nombre des zéros de $f - \beta$ dans le cercle $|x| = \frac{1}{2}$; d'autre part, si l'on considère $\log \frac{1}{OP}$, cette quantité est égale à

$$\log \frac{1}{r} = \log \left[1 + \frac{1 - r}{r} \right],$$

quantité inférieure à $2(1 - r)$ si r est supérieur à $\frac{1}{2}$.

L'inégalité (5″) entraîne donc aussi dans ce cas l'inégalité

$$\sum \log \frac{1}{OP} < kn + k + k \log \frac{1}{\delta(\beta, A)}.$$

Finalement, en désignant par $\nu(r, \beta)$, les zéros de $f - \beta$ dont le module est compris entre $\frac{1}{2}$ et r, notons que le premier membre de l'inégalité précédente n'est autre que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\nu(t, \beta)\,dt}{t}.$$

6. Résumons les résultats déjà acquis :

Dans l'hypothèse A [*suite de cercles, tendant vers le cercle unité, dont l'unique centre non euclidien est un certain point, d'affixe* x'_0 *inférieure en module à* e^{-8}; *sur chacun de ces cercles,* $|f(x) - f(x'_0)|$ *est inférieure à* e^{-n}] :

I. *Le nombre des zéros de* $f - \alpha$ *dans le cercle unité est le même pour toutes les valeurs de* α *satisfaisant à l'inégalité*

$$\log \delta(\alpha, \mathrm{A}) > -kn;$$

donc en particulier, il est inférieur à n. A *c'est* $f(x'_0)$.

II. *Soit* β *une valeur n'entrant pas dans la catégorie* α. *L'expression*

$$kn + k + k \log \frac{1}{\delta(\beta, \mathrm{A})}$$

majore $\Sigma d(\beta)$; $d(\beta)$ *désignant la distance euclidienne d'un zéro de* $f(x) - \beta$, *au cercle* $|x| = 1$.

Cette dernière quantité, $\Sigma d(\beta)$, peut être remplacée par la somme des quantités suivantes :

Nombre des zéros de $f(x) - \beta$ dans le cercle $|x| = \frac{1}{2}$;

$$\text{intégrale} \int_0^1 \frac{\nu(t, \beta)}{t}\,dt \quad (^1).$$

7. Hypothèse B. — *Si l'hypothèse* A *ne se présente pas, c'est qu'il existe, dans le voisinage de l'origine supposée quelconque, et à moins de*

(1) *Voir* antérieurement la définition de l'indice ν.

e^{-8} de cette origine, un point O_1 situé hors des cercles d'exclusion englobant l'ensemble E, et un nombre fixe ρ inférieur à un, de façon que sur tous les cercles de centre non euclidien O_1 et de pseudo-rayon supérieur ou égal à ρ, on trouve au moins un point en lequel $\log|f(O_1)-f(x)|$ est supérieur ou égal à $-n$.

Parmi les six fonctions du groupe T, on choisit les deux fonctions qui en O_1 ont un module compris entre $\frac{1}{2}$ et 2.

Nous nous proposons d'étudier la distribution des zéros de $f(x)-\alpha$ dans le cercle $|x|=1$. Quitte à substituer à f la fonction $\frac{1}{f}$, on pourra toujours supposer $|\alpha|$ inférieur ou égal à un.

8. Premier problème. — *Majoration du nombre des zéros de $f-\alpha$ dans le cercle $|x|=\frac{1}{2}$.*

Premier cas. — ρ est supérieur à une constante numérique; pour fixer les idées, 0,7.

Alors opérons une transformation conforme du cercle $|x|=1$ sur le cercle $|x'|=1$, de façon à ramener O_1 à l'origine; le cercle de pseudo-rayon ρ devient le cercle $|x'|=\rho$.

En vertu des conditions de l'hypothèse B, sur le cercle $|x'|=\rho$ on a

$$\log|\varphi(x')-\varphi(0)|\leqq -n,$$

φ désignant la fonction transformée de f.

Une étude analogue à celle de la première hypothèse établit :

a. Que le nombre des zéros de $\varphi-\alpha$ dans le cercle $|x'|=\rho$ est inférieur à n, lorsque $\log\delta|\alpha, f(O_1)|$ est supérieur à $-kn$.

b. Que si β désigne une valeur n'entrant pas dans la catégorie précédente, l'expression $\Sigma d'(\beta)$ est majorée par

$$kn+k+k\log\frac{1}{\delta[\beta, f(o_1)]};$$

$d'(\beta)$ désigne la distance euclidienne d'un zéro de $\varphi-\beta$ au cercle $|x'|=\rho$.

En particulier, ne considérons que les zéros de $\varphi - \beta$ situés dans le cercle, $|x'| = 0{,}6$; alors les distances d' sont supérieures à une constante numérique et dans la majoration l'on peut remplacer $\Sigma d'(\beta)$ par le nombre des zéros de $\varphi - \beta$.

Revenons au plan x : le cercle $|x'| = 0{,}6$ est transformé en un cercle qui contient le cercle $|x| = \frac{1}{2}$; d'où le résultat suivant :

Le nombre des zéros de $f - \alpha$ dans le cercle $|x| = 0{,}5$ est en général inférieur à n. Il peut y avoir exception pour les valeurs de α telles que $\log \delta(\alpha, A)$ *est inférieur à $-kn$. Le nombre des zéros étudiés est alors majoré par $kn + k + k \log \frac{1}{\delta(\alpha, A)}$. A ne dépend pas de α.*

Deuxième cas. — ρ est inférieur à la constante numérique $0{,}7$. Nous résoudrons la question au cours du deuxième problème.

9. Deuxième problème. — *Distribution des zéros de $f - \alpha$ entre les cercles $|x| = \frac{1}{2}$ et $|x| = 1$, et retour sur le premier problème.*

Amenons provisoirement O_1 à l'origine du cercle $|x'| = 1$; appliquons à l'ensemble E des points P_i (où la fonction étudiée prend l'une des valeurs $0, 1, \infty$) la propriété du n° 10 du Mémoire déjà cité [1].

Considérons la couronne

$$\rho \leqq |x'| \leqq \rho'$$

avec

$$1 - \rho' = (1 - \rho)\left[\frac{1 - e^{-8}}{1 + e^{-8}}\right]^2 = k(1 - \rho).$$

Il existe dans cette couronne un cercle $|x'| = \rho_1$ dont tous les points sont hors des cercles d'exclusion englobant E. Soit M_1 le point de ce cercle, où $\log|\varphi(x') - \varphi(0)|$ est supérieur ou égal à $-n$. Joignons l'origine à M_1 par une ligne continue L, dont tous les points

(1) *Sur une extension d'un théorème de P. Boutroux-H. Cartan.* On tient compte ici de la note relative à l'énoncé de ce numéro 10.

sont hors des cercles d'exclusion, et dont la longueur est inférieure à 2 (ce qui est possible; *voir* n° 12 du même Mémoire).

Je dis que l'on peut trouver, sur cette ligne L, un point d'affixe ζ' en lequel on a les inégalités suivantes :

$$\log|\varphi(\zeta')-\alpha| > -n-k', \qquad \log|\varphi'(\zeta')| > -n-k'. \tag{6}$$
$$|\varphi(\zeta')| < k.$$

La démonstration précisera les valeurs des constantes *numériques* figurant ici.

Désignons par s tout segment de L sur lequel on a

$$\log|\varphi(x')-\alpha| \leqq -n-k',$$

et par s' tout segment sur lequel on a

$$\log|\varphi'(x')| \leqq -n-k'.$$

Cheminons à partir de l'origine O. Si O ne fait partie ni d'un s, ni d'un s', nous prenons ζ' en O. Sinon, cheminons le long de L à partir de O. Supposons, pour fixer les idées, que O fasse partie d'un segment s'. Tant que le segment durera, on aura

$$|\varphi(x')-\varphi(o)| < e^{-n-k'}, \qquad \text{longueur } s' < 2e^{-n-k'}.$$

Désignons par s'_1 ce premier segment s'. Son extrémité ne peut pas être en M_1, si l'on choisit k' assez grand. En effet, on a

$$|\varphi(M_1)-\varphi(o)| > e^{-n}.$$

Il y a contradiction si $k' = \log 2$.

Si l'extrémité de s'_1 n'est pas sur un segment s, on le prendra comme point ζ'. Sinon, commence un s désigné par s_1.

D'une façon générale, nous constituons, à partir de O, une chaîne de segments $s'_1, s_1, s'_2, s_2, \ldots$ empiétant les uns sur les autres. Nous nous proposons de montrer que partout, *la fonction* $\varphi(x')$ *ne s'écarte guère de* $\varphi(O)$.

Tout d'abord, du fait que l'extrémité de s'_1 est sur s_1, résulte que α est voisin de $\varphi(O)$; d'une façon précise

$$|\varphi(x')-\alpha| < e^{-n-k'},$$
$$|\varphi(x')-\varphi(o)| < 2e^{-n-k'};$$

d'où

$$|\varphi(o) - \alpha| < 3e^{-n-k'}.$$

Par conséquent, *sur tous les segments s, on aura*

$$|\varphi(x') - \varphi(o)| < 4e^{-n-k'}.$$

Soit x'' un point d'un segment s', et x' le plus rapproché de x'', sur un segment s. La longueur $x'x''$ étant inférieure à 2, on aura

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| < 2e^{-n-k'};$$

d'où par suite

$$|\varphi(x'') - \varphi(o)| < 6e^{-n-k'}.$$

En résumé, sur toute la chaîne on a, en prenant $k' = \log 6$,

$$|\varphi(x') - \varphi(o)| < e^{-n}.$$

Il est donc impossible d'atteindre M_1. En choisissant pour ζ' le dernier point de la chaîne, les deux premières inégalités (6) sont vérifiées, et de plus, du fait que $|\varphi(O)|$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et 2 $|\varphi(\zeta')|$ sera inférieur à 3.

Rappelons que L est une ligne continue joignant l'origine O et M_1, en évitant les cercles d'exclusion [1]. On choisira les plus petits arcs de ces cercles, de sorte que tout point de L sera à une distance de O inférieure à celle de M_1.

Revenons maintenant au plan x. Le point ζ étant l'homologue de ζ', recherchons une limite supérieure de sa distance à l'origine.

Le point ζ' est à une distance de l'origine du plan x' inférieure à $\rho + k(1 - \rho)$. Comme cette origine est l'homologue, dans le plan x, d'un point O_1 situé à moins de e^{-8} de $x = o$, *il en résulte que* $|\zeta|$ *est aussi inférieur à* $\rho + k(1 - \rho)$.

Au besoin, nous ferons tourner le plan x autour de l'origine, de façon à rendre ζ réel et positif.

---

(1) Dans le Mémoire déjà cité, il est démontré que l'on peut supposer les cercles d'exclusion tous extérieurs les uns des autres (*voir* n° **5**). Ici, L pourra être pris en partie rectiligne (portions du segment OM_1) en partie, s'il le faut, circulaire, pour éviter l'intérieur des cercles d'exclusion.

Traduisons d'autre part les inégalités (6). La première et la troisième se transcrivent immédiatement en changeant $\varphi(\zeta')$ en $f(\zeta)$.

Pour la troisième, écrivons $x' = \dfrac{x - x_1}{1 - x\bar{x}_1}$; d'où

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{1 - |x_1|^2}{(1 - x\bar{x}_1)^2}.$$

Comme $|x_1|$ est inférieur à e^{-8}, cette quantité est comprise entre deux constantes numériques très proches de 1.

Résumons : *dans l'hypothèse* B, *on peut trouver, à moins de* $\rho + k(1-\rho)$ *de l'origine, un point d'affixe* ζ (*qu'on peut supposer positive*) *satisfaisant* aux inégalités

$$(7)\qquad \begin{cases} |f(\zeta) - \alpha| > ke^{-n}, \\ |f'(\zeta)| > ke^{-n}, \\ |f(\zeta)| < k. \end{cases}$$

Ce point est situé hors des cercles d'exclusion englobant E.

10. Effectuons la transformation homographique $X = \dfrac{x - \zeta}{1 - x\zeta}$, et désignons par $F(X)$ la fonction transformée de $f(x)$. Le calcul de $F'(X)$ donne en particulier

$$F'(0) = (1 - \zeta^2) f'(\zeta).$$

D'où, pour remplacer le groupe d'inégalités (7),

$$(7')\qquad \begin{cases} |F(0) - \alpha| > ke^{-n}, \\ |F'(0)| > k(1-\rho)e^{-n}, \\ |F(0)| < k. \end{cases}$$

Appliquons à la fonction F la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna, sous la forme que lui a donnée M. G. Valiron [1],

$$\begin{aligned} T(R, F) < 24[N(1, 0) + N(1, 1) + N(1, \infty)] + 36 \log \frac{1}{1-R} \\ + 12 \overset{+}{\log} |F(0)| + \overset{+}{\log} \frac{1}{|F'(0)|} + k. \end{aligned}$$

(1) G. Valiron, *Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes* (*Acta Math.*, t. 52, p. 72).

La somme des indices N figurant dans le deuxième membre est inférieure à kn, du fait que l'origine a été choisie hors des cercles d'exclusion, ou plutôt de leurs homologues. Donc l'expression

$$I = kn + k + k \log \frac{1}{1-\rho} + k \log \frac{1}{1-R}$$

majore $T(R, F)$, en vertu des inégalités (7'). Passons à $F - \alpha$

$$T(R, F-\alpha) < T(R, F) + \log 2$$

(car $|\alpha|$ est inférieur ou égal à 1), puis à $\frac{1}{F-\alpha}$

$$T\left(R, \frac{1}{F-\alpha}\right) = T(R, F-\alpha) + \log \frac{1}{|F(0)-\alpha|}.$$

On constate, avec la première inégalité (7'), que la *même expression* I *majore* $T\left(R, \frac{1}{F-\alpha}\right)$ *et par suite sa partie composante* $N\left(R, \frac{1}{F-\alpha}\right)$.

11. Retour sur le premier problème. — Au cercle $|x| = \frac{1}{2}$ correspond dans le plan X un cercle centré sur l'axe réel, et passant par les points $\frac{1-2\zeta}{2-\zeta}$ et $-\frac{1+2\zeta}{2+\zeta}$; il est intérieur au cercle $|X| = R_1 = \frac{1+2\zeta}{2+\zeta}$; on a

$$1 - R_1 = \frac{1-\zeta}{2+\zeta} > k(1-\rho).$$

Appliquons la limitation I à $N\left(R_2, \frac{1}{F-\alpha}\right)$ avec $1 - R_2 = \frac{1-R_1}{2}$. Il vient

$$N\left(R_2, \frac{1}{F-\alpha}\right) < kn + k + k \log \frac{1}{1-\rho}.$$

Par suite, *a fortiori* $n\left(R_1, \frac{1}{F-\alpha}\right)$ est borné supérieurement par

$$\frac{1}{1-\rho}\left[kn + k + k \log \frac{1}{1-\rho}\right].$$

Donc, *dans tous les cas, le nombre des zéros de* $f(x) - \alpha$ *situés dans le cercle* $|x| = \frac{1}{2}$ *est inférieur à* $\frac{1}{1-\rho}\left[kn + k + k \log \frac{1}{1-\rho}\right]$.

Ce résultat résout le deuxième cas du premier problème, par remplacement de ρ par 0,7, et par conséquent donne la limitation $kn+k$ pour le nombre cherché. D'autre part, il précise, dans le premier cas, une limitation du même nombre lorsque α est très voisin de A.

12. Distribution des zéros de $f-\alpha$ entre les cercles $|x|=\frac{1}{2}$ et $|x|=r$ $\left(\text{supérieur à } \frac{1}{2}\right)$. — Au cercle $|x|=r$ correspond, dans le plan X, un cercle centré sur l'axe réel, qu'il coupe aux points d'affixes $\frac{-r-\zeta}{1+r\zeta}$ et $\frac{r-\zeta}{1-r\zeta}$. Ce cercle est contenu dans le cercle

$$|X|=\frac{r+\zeta}{1+r\zeta}=R \quad \text{quantité supérieure à } r;$$

d'où

$$1-R=\frac{(1-r)(1-\zeta)}{1+r\zeta}>k(1-r)(1-\rho).$$

D'où l'on tire

$$N\left(R, \frac{1}{F-\alpha}\right)< kn+k+k\log\frac{1}{1-r}+k\log\frac{1}{1-\rho}=I'.$$

Reste à traduire le premier membre dans le plan x.

Notons que si, dans le plan X, nous supprimons des zéros de $F-\alpha$, *a fortiori* l'indice N restant demeure inférieure à l'expression I', car l'indice N est composé de termes tous positifs ([1]). Nous pouvons, en conséquence, nous intéresser uniquement aux zéros qui, dans le plan x, sont extérieurs au cercle $|x|=\frac{1}{2}$, et intérieurs au cercle $|x|=r$.

Considérons l'un de ces zéros; soit u son affixe, v l'affixe du point correspondant dans le plan X. La part de v dans l'indice N est $\log\frac{R}{|v|}$.

Or si z est compris entre 0 et 1, on a constamment $\log\frac{1}{z}>1-z$. D'où

$$\log\frac{R}{|v|}>\frac{R-|v|}{R}>R-|v|.$$

([1]) A l'origine du plan des X, la fonction F est en effet différente de α; *voir* première inégalité (7').

Il nous reste à interpréter $(\mathrm{R} - |v|)$ dans le plan x.

Il ne s'agit, comme nous l'avons noté plus haut, que des quantités v qui correspondent, dans le plan x, à des quantités u comprises dans la couronne

$$\frac{1}{2} \leqq |x| \leqq r.$$

Nous avons

$$\mathrm{R} - |v| = \frac{r+\zeta}{1+r\zeta} - \left|\frac{x+\zeta}{1+x\zeta}\right|.$$

Pour les valeurs de x de modules égaux, le minimum de cette expression est obtenu lorsque x est réel et positif; d'où

$$\mathrm{R} - |v| \geqq \frac{(r-|x|)(1-\zeta^2)}{(1+r\zeta)(1+|x|\zeta)} \geqq k(1-\rho)(r-|x|).$$

Désignons par $d_r(\alpha)$ la distance euclidienne au cercle $|x| = r$, d'un zéro de $f - \alpha$ intérieur à ce cercle.

C'est $r - |x|$.

Il résulte de ce qui précède que, *dans la couronne envisagée*, $\Sigma d_r(\alpha)$ *est majorée par* $\frac{\mathrm{I}'}{1-\rho}$.

Une dernière remarque avant de résumer : pour les zéros de $f - \alpha$ situés dans la couronne $\frac{1}{2} < |x| < r$, l'expression $\Sigma d_r(\alpha)$ peut être remplacée par son équivalente

$$\int_0^r \frac{\nu(t, \alpha)}{t}\, dt,$$

$\nu(t, \alpha)$ désignant le nombre des zéros de $f - \alpha$ situés entre les cercles $|x| = \frac{1}{2}$ et $|x| = t > \frac{1}{2}$.

13. Résumé. — *Dans l'hypothèse* B, *il existe un nombre fixe* ρ *inférieur à un, tel que si* $d_r(\alpha)$ *désigne la distance euclidienne au cercle* $|x| = r$ *d'un zéro de* $f - \alpha$, *intérieur à ce cercle*, *on a*

$$\Sigma d_r(\alpha) < \frac{1}{1-\rho}\left[kn + k + k \log \frac{1}{1-r} + k \log \frac{1}{1-\rho}\right].$$

Cependant, il est possible d'avoir en général une meilleure limitation dans le cercle $|x| = \frac{1}{2}$ *si* ρ *dépasse la constante numérique* 0,7 : *alors le nombre des zéros en question est en général inférieur à n; s'il est supérieur à n, il est inférieur à*

$$kn + k + k \log \frac{1}{\delta(\alpha, A)},$$

A étant une quantité fixe indépendante de α; cette dernière limitation n'entre en vigueur que lorsque l'on a

$$\log \delta(\alpha, A) < -kn.$$

L'énoncé du nº **13** comme celui du nº **6**, est valable pour toutes les six fonctions du groupe T, c'est-à-dire pour une fonction méromorphe quelconque ne prenant pas plus de n fois l'ensemble des valeurs $0, 1, \infty$.

14. Au lieu des valeurs $0, 1, \infty$, considérons des valeurs a, b, c dont les distances sphériques prises deux à deux sont supérieures ou égales à d. Soit $\varphi(x)$ une fonction méromorphe ne prenant pas plus de n fois l'ensemble des valeurs a, b, c. Étudions la distribution des zéros de $\varphi(x) - \gamma$. Posant $f = \frac{\varphi - a}{\varphi - b} : \frac{c - a}{c - b}$ et $\alpha = \frac{\gamma - a}{\gamma - b} : \frac{c - a}{c - b}$, on ramène à l'étude faite depuis le début du deuxième chapitre. Les résultats des hypothèses A et B se transcrivent presque tous sans remarque supplémentaire. Les seuls pour lesquels il est nécessaire de faire la traduction sont ceux qui contiennent la distance sphérique $\delta(\alpha, A)$ ou $\delta(\alpha, B)$. Comment se transcrit-elle lorsqu'on repasse de f à φ, de α à γ, c'est-à-dire lorsque l'on pose $Z = \frac{z - a}{z - b} : \frac{c - a}{c - b}$?

L'étude a déjà été effectuée [1]. Rappelons rapidement le raisonnement : on peut choisir l'ordre a, b, c et changer au besoin φ en $\frac{1}{\varphi}$, de façon que deux au moins de ces quantités, a et b, soient en module inférieures à un, et que $|c - b|$ soit supérieur à $|b - a|$.

Ensuite, on opère une translation, de manière à amener a à

[1] *Voir* H. Milloux, *Remarques sur la théorie des fonctions méromorphes* (*Proc. of the Phys.-Math. Soc. of Japan*, janv. 1930).

l'origine. Jusque là les distances sphériques ont été ~~un peu~~ modifiées, multipliées par des quantités comprises entre deux constantes numériques.

La plus importante des modifications consiste dans une homothétie-rotation qui envoie b au point 1.

Alors d entre en jeu, et les distances sphériques initiales de deux z sont multipliées par des quantités comprises entre kd et $\frac{k}{d}$.

Enfin, on enverra c à l'infini par une inversion, et l'on rétablira par des translations et homothéties rotations, a en 0 et b en 1 : ces dernières transformations modifient peu les distances sphériques du fait du choix effectué.

En résumé, les distances sphériques de deux z et les distances sphériques de deux Z correspondants sont entre elles dans des rapports compris entre kd et $\frac{k}{d}$.

Cette étude nous permet, après traduction des résultats déjà obtenus, d'énoncer le théorème suivant :

15. Théorème. — *Soit $\varphi(x)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|x| = 1$ et ne prenant, dans ce cercle, pas plus de n fois l'ensemble des valeurs a, b, c dont les distances sphériques prises deux à deux sont supérieures à d.*

On désigne dans ce qui suit, par $\Delta_r(\alpha)$ la distance euclidienne au cercle $|x| = r$, d'un point intérieur à ce cercle, où $\varphi(x)$ est égale à α; par $\delta(u, v)$ la distance sphérique de deux quantités u et v, par k une constante numérique qui n'a pas partout la même valeur.

Ceci posé, deux circonstances peuvent se présenter, qui se complètent :

Circonstance A. — *Le nombre des zéros de $\varphi - \alpha$ est le même pour toutes les valeurs de α telle que*

$$\log[d\delta(\alpha, A)] > -kn.$$

Il est en particulier inférieur à n. Pour les autres α on a l'inégalité

$$\Sigma\Delta_1(\alpha) < kn + k + k\log\frac{1}{d\delta(\alpha, A)},$$

A *est une certaine quantité fixe.*

Circonstance B. — *Il existe un nombre fixe* ρ *inférieur à un, tel que*

$$\Sigma\Delta_r(\alpha) < \frac{1}{1-\rho}\left[kn + k + k\log\frac{1}{1-r} + k\log\frac{1}{1-\rho}\right].$$

Et de plus, si ρ *dépasse* 0,7, *le nombre des zéros de* $\varphi - \alpha$ *est, dans le cercle* $|x| = \frac{1}{2}$, *indépendant de* α *(donc inférieur à* n*) sauf peut-être pour les valeur de* α *satisfaisant à*

$$\log[d\delta(\alpha, \mathrm{A})] > -kn.$$

Alors ce nombre est majoré par $kn + k + k\log\frac{1}{d\delta(\alpha\mathrm{A})}$.

16. On peut rassembler les deux circonstances A et B dans un seul énoncé, moins précis que le précédent, mais plus concis, plus commode à appliquer :

Aux conditions du théorème du n° **15**, *les zéros de* $\varphi(x) - \alpha$ *satisfont à l'inégalité*

$$\Sigma\Delta_r(\alpha) < \frac{1}{1-\rho}\left[kn + k + k\log\frac{1}{1-r} + k\log\frac{1}{1-\rho} + k\log\frac{1}{d\delta(\alpha, \mathrm{A})}\right].$$