JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE JANET

Sur le degré de généralité de la solution de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 187-195.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_187_0>

Sur le degré de généralité de la solution de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles;

PAR MAURICE JANET.

1. On sait que, étant donné un système comprenant autant d'équations aux dérivées partielles, r, que de fonctions inconnues, l'élimination de $r-1$ de ces inconnues entre ces r équations ne conduit pas en général pour la $r^{\text{ième}}$ à une équation unique, mais bien à un *système* irréductible à une seule équation. Sans doute est-ce ici le lieu de rappeler que c'est là un des points de la théorie des systèmes sur lesquels M. J. Hadamard a, autrefois, tout particulièrement appelé mon attention.

Pour préciser, considérons r équations *linéaires* aux r inconnues u_1, $u_2, \ldots, u_r$ et supposons-les écrites à la manière habituelle : chaque premier membre E_i est la somme de r expressions différentielles linéaires en $u_1, u_2, \ldots, u_r$ respectivement, le second membre correspondant étant une fonction donnée des n variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Nous supposons essentiellement que les E_i sont « indépendants », c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'opérateurs différentiels linéaires (non tous nuls) $M_1, M_2, \ldots, M_r$ tels que

$$M_1(E_1) + M_2(E_2) + \ldots + M_r(E_r)$$

soit identiquement nul, c'est-à-dire nul quelles que soient les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Cela étant, le système

$$E_i = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

est possible quelles que soient les fonctions f_i données, et aucune des fonctions u ne peut être prise arbitrairement. L'une d'elles au choix,

u, par exemple, satisfait non pas à une équation unique, mais à un système (Σ_1). Il serait intéressant de caractériser les systèmes linéaires à une inconnue que l'on peut obtenir de cette manière (systèmes qui comprennent en particulier ceux qui sont équivalents à une équation unique). Il serait intéressant tout au moins d'en donner quelque propriété importante. Peut-on affirmer, par exemple, d'une manière générale, la propriété suivante :

Le nombre maximum λ *des arguments des fonctions arbitraires dont dépend la solution est* $n-1$, *exception faite du cas où la solution est entièrement déterminée ?* (1).

Je me propose simplement de traiter ici à ce point de vue le système de deux équations à deux inconnues

$$\left\{\begin{array}{l} A(u)+B(v)=f, \\ A^*(u)+B^*(v)=f^*, \end{array}\right. \tag{1}$$

où A, A^* sont *du premier ordre*, en supposant que l'on soit dans le « cas général », c'est-à-dire dans celui où le système (à une inconnue)

$$\left\{\begin{array}{l} A(u)=0, \\ A^*(u)=0 \end{array}\right. \tag{2}$$

entraîne $u=0$, autrement dit où il existe deux op. (2) diff. lin. M, M^* tels que

$$MA+M^*A^*\equiv 1. \tag{3}$$

Pour un tel système, comme rien ne limite les ordres de B, B^*, ni de M, M^*, les cas qui peuvent se présenter sont déjà assez variés pour donner quelque idée de ceux que peut offrir un système (Σ_1) quelconque. *Nous démontrons que, à l'exception d'un cas trivial de détermination complète, le nombre* λ *est toujours égal à* $n-1$. La méthode utilisée donnera d'ailleurs des résultats qui peuvent avoir quelque

(1) *Cf.* M. Janet, *Les systèmes linéaires*... (*Ann. Soc. Polon. de Math.*, t. XIII, 1934, p. 61.)

(2) Dans une Communication au Congrès d'Oslo (juillet 1936), j'ai indiqué le résultat obtenu ici, mais en me limitant au cas où M, M^* sont eux-mêmes du premier ordre.

intérêt en eux-mêmes en répondant à la question suivante : quel est l'ordre possible d'une expression $MD + M^{\star}D^{\star}$ où M, $M^{\star}$ désignent certains op. diff. lin. connus, et D, $D^{\star}$ des op. diff. lin. indéterminés d'ordre donné.

Si A, $A^{\star}$ étaient d'ordre supérieur au premier, il pourrait y avoir détermination complète dans un cas « non trivial » ([1]).

2. Il nous suffira évidemment d'examiner le système « sans seconds membres » déduit de (1) en y faisant $f = f^{\star} = 0$, système que nous appellerons $(1)'$. De $(1)'$ et (3), résulte immédiatement

$$u + (MB + M^{\star}B^{\star})(v) = 0.$$

D'où, pour v, le système de deux équations :

$$(4) \qquad \begin{cases} C\,(v) \equiv [-A\,(MB + M^{\star}B^{\star}) + B\,](v) = 0, \\ C^{\star}(v) \equiv [-A^{\star}(MB + M^{\star}B^{\star}) + B^{\star}](v) = 0. \end{cases}$$

Nous laisserons de côté le cas simple où il existe deux fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^{\star}$, telles que

$$\mathfrak{M}A + \mathfrak{M}^{\star}A^{\star} = 1.$$

On voit immédiatement que dans ce cas v doit satisfaire à une équation unique (dont l'ordre peut d'ailleurs se réduire à zéro : détermination complète).

Ce cas « trivial » exclu, les termes du premier ordre A_1, $A_1^{\star}$ de A, $A^{\star}$ sont symbolisés par deux formes linéaires *indépendantes* $\overline{A}_1$, $\overline{A}_1^{\star}$. L'identité (3) montre que M, $M^{\star}$ sont de même ordre $p \geqq 1$ et que leurs termes d'ordre p, M_p, $M_p^{\star}$ sont symbolisés par des formes ([2]) d'ordre p

---

([1]) Exemple :

$$u_{x^2} + v_{xy} - v = f, \qquad u_{xy} + u + v_{y^2} = g,$$

dont la solution est

$$u = f_{y^2} - g_{xy} + g, \qquad v = -f_{xy} - f + g_{x^2}.$$

Cf. *Ann. Soc. Polon. de Math.*, t. XIII, p. 61.

([2]) Il s'agit des formes algébriques en $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ obtenues en remplaçant chaque dérivée $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ par le monome « correspondant » $\omega_1^{\alpha_1}\omega_2^{\alpha_2}\ldots\omega_n^{\alpha_n}$; les coefficients de ces formes sont des fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

qui s'écriront

$$\overline{M}_p = -\overline{X}\overline{A}_1^\star,$$
$$\overline{M}_p^\star = +\overline{X}\overline{A}_1,$$

$\overline{X}$ désignant une forme d'ordre $p-1$. La définition de C, C*, jointe à l'identité (3), montre, d'autre part, que l'on a identiquement

$$MC + M^\star C^\star \equiv 0. \tag{5}$$

Cela prouve d'abord que l'un des op. C, C* ne peut être identiquement nul sans que l'autre le soit [1]; nous excluons ce cas (*voir* n° **4**), où v serait totalement arbitraire; v choisi, u s'en déduirait par la formule

$$u = -(MB + M^\star B^\star)(v);$$

les premiers membres

$$E = A(u) + B(v), \qquad E^\star = A^\star(u) + B^\star(v)$$

ne seraient pas indépendants, ils seraient liés par la relation

$$(-AM + 1)E - AM^\star E^\star = 0,$$

et aussi d'ailleurs par la relation

$$-A^\star ME + (-A^\star M^\star + 1)E^\star = 0.$$

Supposons donc qu'aucun des op. C, C* ne soit identiquement nul. L'identité (5) montre qu'ils sont de même ordre. Elle nous permettra de voir que *cet ordre commun est au moins* $p+1$. Voyons dès maintenant que cela suffira à prouver la propriété que nous avons en vue, à savoir que *la solution du système* (4) *dépend d'une ou de plusieurs fonctions arbitraires de* $n-1$ *variables.*

Soit le système

$$\begin{cases} C(v) = 0, \\ C^\star(v) = w, \end{cases} \tag{6}$$

où C est d'ordre $p+1$, par exemple. En choisissant d'abord v satisfaisant à la première équation, puis w à la seconde, on voit que la solution du système en (v, w) dépend de $p+1$ fonctions de

---

[1] Cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. **200**, p. 517.

$n-1$ variables. Choisissons, au contraire, w d'abord, v ensuite; *le nombre total des fonctions arbitraires de* $n-1$ *variables va être le même* (¹); or, w devra satisfaire d'après (5) à l'équation

$$M^{\star}(w)=0,$$

ainsi qu'éventuellement à d'autres; $M^{\star}$ étant d'ordre p, w dépendra tout au plus de p fonctions de $n-1$ variables; mais alors la solution du système, en v, (6), et par suite aussi celle du système sans seconds membres (4) dépend d'*au moins une* fonction arbitraire de $n-1$ variables.

3. Le fait que l'ordre commun de C, $C^{\star}$ est au moins $p+1$ résultera de l'étude des expressions $MD+M^{\star}D^{\star}$ où l'*ordre maximum de* D, $D^{\star}$ est *supposé successivement égal à* 0, 1, 2, ..., p. Nous allons voir que dans ces différents cas, nous ne pouvons obtenir de résultat identiquement nul, mais que l'*ordre de cette expression est respectivement*

$$p;\quad p+1,\ p,\ \text{ou}\ 0:\quad p+2,\ p+1,\ p,\ \text{ou}\ 1;\quad \ldots;$$
$$2p,\ 2p-1,\ \ldots,\ p,\ \text{ou}\ p-1.$$

Pour fixer les idées, nous exposerons la démonstration dans le cas $p=3$; mais il sera visible que cette démonstration s'appliquera à une valeur quelconque de p.

1° Supposons

$$D(u)=\rho.u,\qquad D^{\star}(u)=\rho^{\star}_{.}u,$$

où ρ, $\rho^{\star}$ sont deux fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, non toutes deux identiquement nulles. L'ensemble des termes d'ordre le plus élevé de $MD+M^{\star}D^{\star}$ est symbolisé par

$$\overline{X}(-\rho\overline{A}_1^{\star}+\rho^{\star}\overline{A}_1),$$

forme d'ordre 3 tout comme $\overline{M}_3$, $\overline{M}_3^{\star}$.

2° Supposons que l'une au moins des expressions D, $D^{\star}$ soit d'ordre 1; l'autre pouvant être d'ordre 1, 0, ou même identiquement

(¹) *Cf.* Riquier, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles,* p. 578, et M. Janet, *Ann. Soc. Polon. de Math.*, t. XIII, 1934, p. 65.

nulle. $\overline{D}_1$, $\overline{D}_1^\star$ symbolisant l'ensemble des termes d'ordre 1 de D, D*, l'ensemble des termes d'ordre maximum de $MD + M^\star D^\star$ est symbolisé en général par

$$\overline{X}(-\overline{D}_1\overline{A}_1^\star + \overline{D}_1^\star\overline{A}_1),$$

forme d'ordre 4. Il n'y a exception que si $\overline{D}_1$, $\overline{D}_1^\star$ sont respectivement identiques, à un même facteur près, σ, à $\overline{A}_1$, $\overline{A}_1^\star$. Dans ce cas, on peut écrire

$$D\,(u) = A\,(\sigma u) + \rho\, u,$$
$$D^\star(u) = A^\star(\sigma u) + \rho^\star u,$$

où σ, ρ, $\rho^\star$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *dont la première n'est pas identiquement nulle;* mais alors, en vertu de (3), on a

$$(MD + M^\star D^\star)(u) = \sigma u + M(\rho u) + M^\star(\rho^\star u),$$

ce qui, d'après 1°, est d'ordre 3; à moins que $\rho = \rho^\star = 0$, auquel cas l'ordre se réduit à o.

Si donc (D, D*) *est d'ordre* 1, $MD + M^\star D^\star$ *n'est jamais identiquement nul, et son ordre ne peut prendre que les valeurs* 4, 3, o, cette dernière valeur ne pouvant être obtenue que si

$$D(u) = A(\sigma u), \qquad D^\star(u) = A^\star(\sigma u).$$

3° Supposons que l'ordre de l'une au moins des expressions D, D* soit 2; l'autre pouvant être d'ordre 2, 1, o, ou même identiquement nulle. $\overline{D}_2$, $\overline{D}_2^\star$ symbolisant l'ensemble des termes d'ordre 2 de D, D*, l'ensemble des termes d'ordre maximum de $MD + M^\star D^\star$ est symbolisé en général par

$$\overline{X}(-\overline{D}_2\overline{A}_1^\star + \overline{D}_2^\star\overline{A}_1)$$

forme d'ordre 5. Il n'y a exception que si $\overline{D}_2$, $\overline{D}_2^\star$ sont égaux respectivement aux produits de $\overline{A}_1$ $\overline{A}_1^\star$ par une même forme du premier degré $\overline{H}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$(7) \qquad \begin{cases} D\,(u) = A\,[H(u)] + K\,(u), \\ D^\star(u) = A^\star[H(u)] + K^\star(u), \end{cases}$$

où H désigne un op. diff. lin. *homogène d'ordre* 1, et où K, K* désignent des op. diff. lin. d'ordre au plus égal à 1. Mais alors, en vertu de (3), on a

$$MD + M^\star D^\star = H + MK + M^\star K^\star, \tag{8}$$

ce qui, d'après 1° et 2°, peut être d'ordre 4, 3 ou 1, cette dernière valeur correspondant tant à l'hypothèse où K, $K^\star$ sont tous deux identiquement nuls qu'à celle où $MK + M^\star K^\star$ est d'ordre o, c'est-à-dire au total où

$$\left\{\begin{array}{l} D = A(H), \\ D^\star = A^\star(H), \end{array}\right. \tag{9}$$

H désignant cette fois un op. diff. lin. *homogène ou non* d'ordre 1.

Si donc (D, $D^\star$) *est d'ordre* 2, $MD + M^\star D^\star$ *n'est jamais identiquement nul, et son ordre ne peut prendre que les valeurs* 5, 4, 3 *ou* 1.

4° De même, si l'ordre de l'une au moins des expressions D, $D^\star$ est 3 (l'autre étant d'ordre 3, 2, 1, o ou même identiquement nulle), on voit que $MD + M^\star D^\star$ est d'ordre 6, à moins que l'on n'ait le système (7), où H désigne cette fois un op. diff. lin. *homogène d'ordre* 2, et où K, $K^\star$ désignent deux op. diff. lin. d'ordre au plus 2. Mais alors la relation (8) montre que $MD + M^\star D^\star$ est d'ordre 5, 4, 3 ou 2, cette dernière valeur correspondant tant à l'hypothèse où K, $K^\star$ sont identiquement nuls qu'à celle où $MK + M^\star K^\star$ est d'ordre o ou 1, c'est-à-dire au total où les relations (9) sont vérifiées, H désignant un op. diff. lin. *homogène ou non* d'ordre 2.

En définitive, si (D, $D^\star$) *est d'ordre* 3, $MD + M^\star D^\star$ *n'est jamais identiquement nul et son ordre ne peut prendre que les valeurs* 6, 5, 4, 3, 2.

5° Supposons enfin que l'ordre de l'une au moins des expressions D, $D^\star$ soit un nombre donné $q \geqq 4$, l'autre étant d'ordre au plus q, ou même identiquement nulle. $MD + M^\star D^\star$ est alors, en général, d'ordre $q + 3$. Il n'y a exception que si l'on a le système (7) où H désigne un op. diff. lin. [1] d'ordre $q - 1$, et K, $K^\star$ des op. diff. lin. d'ordre au plus $q - 1$. L'ordre de $MD + M^\star D^\star$ est au plus $q + 2$. *Cette*

---

[1] Homogène ou non d'ailleurs; on ne restreindrait pas la généralité en supposant H homogène, mais il est plus commode ici de ne pas faire cette hypothèse.

expression peut même être identiquement nulle : cela arrive dans le cas où $MK + M^{\star}K^{\star}$ étant d'ordre $q-1$, on suppose H identique à $-(MK + M^{\star}K^{\star})$. On pourra obtenir ainsi toutes les solutions $(D, D^{\star})$ d'ordre q de l'équation $MD + M^{\star}D^{\star} = 0$

$$D = A\,(-MK - M^{\star}K^{\star}) + K,$$
$$D^{\star} = A^{\star}(-MK - M^{\star}K^{\star}) + K^{\star}.$$

Par exemple, pour $q = 4$, on trouve en utilisant les résultats 1°, 2°, 3°, 4° que la solution générale correspond aux expressions différentielles suivantes :

$$D(u) = -A[M(\rho u) + M^{\star}(\rho^{\star} u)] + \rho u,$$
$$D^{\star}(u) = -A^{\star}[M(\rho u) + M^{\star}(\rho^{\star} u)] + \rho^{\star} u,$$

ρ, $\rho^{\star}$ désignant deux fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ choisies comme on voudra (non toutes deux identiquement nulles).

4. Remarquons, pour terminer, que l'on peut donner explicitement la forme générale des op. diff. lin. B, $B^{\star}$ satisfaisant à l'identité

$$-A(MB + M^{\star}B^{\star}) + B = 0, \tag{10}$$

op. qui satisferont alors nécessairement, nous le savons d'avance (*voir* n° **2**), à

$$-A^{\star}(MB + M^{\star}B^{\star}) + B^{\star} = 0. \tag{11}$$

Si B, $B^{\star}$ sont d'ordres différents, l'ordre de $A(MB + M^{\star}B^{\star})$ dépasse le plus grand s de ces deux ordres, de 4 unités ; B étant d'ordre au plus s, l'égalité (10) ne peut avoir lieu. Soit donc s l'ordre commun de deux op. B, $B^{\star}$ satisfaisant à (10) ; cette égalité rend impossible que $MB + M^{\star}B^{\star}$ soit d'ordre $s+3$; il est donc nécessaire que l'on ait

$$B = A(H) + B_1,$$
$$B^{\star} = A^{\star}(H) + B_1^{\star},$$

H étant d'ordre $s-1$, et B_1, $B_1^{\star}$ d'ordre au plus $s-1$. On devra avoir

$$-A(H + MB_1 + M^{\star}B_1^{\star}) + A(H) + B_1 = 0$$

ou

$$-A(MB_1 + M^{\star}B_1^{\star}) + B_1 = 0.$$

Mais alors B_1, B_1^* sont nécessairement de même ordre $s_1 < s$, et le raisonnement peut se recommencer; il ne pourra d'ailleurs se faire qu'un nombre fini de fois. On arrive à la conclusion :

$$B = A(K), \qquad B^* = A^*(K),$$

K désignant un op. diff. lin. d'ordre $s - 1$. Il est bien évident, dans ce cas, que (11) est vérifié et que la solution générale de (1)' est simplement

$$u = -K(v),$$

où v désigne une fonction complètement arbitraire des n variables indépendantes x.

Ainsi, A, A^* étant supposés du premier ordre satisfaisant à une égalité telle que (3), le cas banal auquel on vient d'arriver, est *le seul* où les « premiers membres » $A(u) + B(v)$, $A^*(u) + B^*(v)$ ne sont pas « indépendants ».