JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

É. GOURSAT

Sur quelques équations de Monge à plusieurs variables indépendantes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 153-167.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_153_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur quelques équations de Monge à plusieurs variables indépendantes (1);

PAR É. GOURSAT.

1. Les équations dont il s'agit sont linéaires par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées partielles du premier ordre. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n variables indépendantes, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ des fractions de ces variables. La forme générale de ces équations est la suivante

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_m u_m + c = 0 \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

les coefficients a_{ik}, b_1, b_2, ..., b_m et c étant des fonctions des variables x_k et ne dépendant pas des fonctions inconnues.

On suppose que chacune des variables x_k figure sous le signe ∂; ce sont les variables *principales*, dont le nombre est égal à n. Les coefficients peuvent en outre renfermer d'autres variables, dites variables *paramétriques*, qui ne figurent pas sous le signe ∂. Cette distinction sera utilisée plus loin.

Soit

$$v_k = a_{1k}u_1 + a_{2k}u_2 + \ldots + a_{mk}u_m,$$

(1) Au premier abord l'objet de cet article semble bien éloigné de la plupart des importants travaux auxquels le nom de M. Hadamard restera attaché. Mais aucune théorie mathématique ne lui est restée étrangère, et son attention s'est portée aussi sur les équations de Monge, à propos d'un problème de Physique Mathématique (*Annales de l'École Normale*, 3e *série*, t. **18**, 1901).

on a

$$a_{ik}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}+a_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}+\ldots+a_{mk}\frac{\partial u_m}{\partial x_k}$$
$$=\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{1k}}{\partial x_k}u_1+\frac{\partial a_{2k}}{\partial x_k}u_2+\ldots+\frac{\partial a_{mk}}{\partial x_k}u_m,$$

de sorte que l'équation (1) peut encore s'écrire

$$(2)\qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial v_n}{\partial x_n}+w+f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,$$

w étant une forme linéaire en $u_1, u_2, \ldots, u_m$, dont les coefficients sont des fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit p le nombre des formes linéaires v_k qui sont linéairement distinctes, ce nombre p étant au plus égal au plus petit des deux nombres m, n. On peut évidemment supposer, au besoin en changeant les notations, que $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont des formes distinctes tandis que $v_{p+1}, \ldots, v_n$ sont des combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \ldots, v_p$,

$$v_{p+1}=\lambda_{11}v_1+\lambda_{12}v_2+\ldots+\lambda_{1p}v_p,$$
$$v_{p+2}=\lambda_{21}v_1+\lambda_{22}v_2+\ldots+\lambda_{2p}v_p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'équation (1) devient, en modifiant un peu les notations,

$$(3)\qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial v_p}{\partial x_p}+\sum_{i=1}^{i=q}\frac{\partial}{\partial y_i}(\lambda_{i1}v_q+\ldots+\lambda_{ip}v_p)$$
$$+w+f(x_1, x_2, x_p, y_1, \ldots, y_q)=0,$$

où l'on a écrit $y_1, y_2, \ldots, y_q$, au lieu de $x_{p+1}, \ldots, x_n (p+q=n)$, w étant toujours une combinaison linéaire des fractions u_i.

On peut encore écrire cette équation sous la forme suivante

$$(4)\qquad X_1(v_1)+X_2(v_2)+\ldots+X_p(v_p)+w+f=0,$$

en posant d'une manière générale

$$X_i(\quad)=\frac{\partial}{\partial x_i}+g_{i1}\frac{\partial}{\partial y_1}+\ldots+g_{iq}\frac{\partial}{\partial y_q},$$

les coefficients g_{ik} étant aussi des fonctions des variables x_i, y_k.

Deux cas sont à distinguer, suivant que les $p+1$ combinaisons linéaires $v_1, v_2, \ldots, v_p, w$ sont distinctes ou non. Dans le premier cas, on a immédiatement toutes les solutions de l'équation (4), puisqu'on peut choisir arbitrairement les p fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Si w est une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_p$, on est conduit en définitive à une équation de la forme

$$(5) \qquad X_1(v_1) + \ldots + X_p(v_p) + b_1 v_1 + \ldots + b_p v_p + f = 0,$$

$b_1, b_2, \ldots, b_p, f$ étant aussi des fonctions des variables indépendantes x_i, y_k.

Les transformations précédentes donnent lieu à un certain nombre de remarques :

1° On peut toujours supposer que le nombre des fonctions inconnues ne dépasse pas le nombre des variables indépendantes de plus d'une unité; dans ce cas l'équation est nécessairement de la forme (4), où les fonctions $v_1, \ldots, v_n, w$ sont linéairement distinctes.

2° Dans le cas particulier où $p = n$, l'équation (5) prend la forme simple

$$(6) \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} + b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n + f = 0;$$

c'est en particulier ce qui arrive lorsque, dans l'équation (1), on a $m = n$, le déterminant Δ des coefficients a_{ik} n'étant pas nul. Le nombre des fonctions inconnues est alors *égal* au nombre des variables indépendantes.

3° En dehors des deux cas qui viennent d'être examinés, le nombre des fonctions inconnues est inférieur à celui des variables indépendantes, ou du moins on peut être ramené à ce cas en choisissant comme inconnues des combinaisons linéaires convenables des inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

2. On peut reconnaître *a priori* à quelle forme on peut ramener l'équation (1) au moyen des transformations linéaires portant uniquement sur les fonctions u_i, que l'on vient d'indiquer. En multipliant le premier nombre de l'équation (1) par le produit $dx_1\, dx_2, \ldots dx_n$, et en utilisant les notations symboliques, on peut remplacer cette équation par une équation symbolique [1]

$$(7)\qquad \Omega = \sum_i \sum_k a_{ik}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{k-1}\, du_i\, dx_{k+1} \ldots dx_n + (b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_m u_m + c)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 0.$$

De même, en multipliant le premier membre de l'équation (4) par le produit $dx_1 \ldots dx_p\, dy_1 \ldots dy_q$, on arrive à une nouvelle équation symbolique

$$(8)\quad \Omega = (dv_1\, dx_2 \ldots dx_p + dx_1\, dv_2\, dx_3 \ldots dx_p + \ldots + dx_1\, dx_2 \ldots dv_p)\, dy_1 \ldots dy_q + dx_1\, dx_2 \ldots dx_p \left[\sum_{i=1}^{p} g_{i1}\, dv_i\, dy_2 \ldots dy_q + g_{i2}\, dy_1\, dv_i \ldots dy_q + \ldots + g_{iq}\, dy_1 \ldots dv_i \right] + (w + f)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_q\, dy_1 \ldots dy_q = 0,$$

et l'on passe de la forme (7) à la forme (8) par les mêmes transformations qui conduisent de l'équation (1) à l'équation (4). Il s'ensuit que les propriétés de la forme (8), qui sont invariantes relativement à un changement de variables, doivent aussi appartenir à la forme (7).

Cherchons si la forme (8) admet une forme de Pfaff associée, c'est-à-dire une forme linéaire

$$(9)\qquad \omega = \alpha_1\, dx_1 + \ldots + \alpha_p\, dx_p + \beta_1\, dy_1 + \ldots + \beta_q\, dy_q + \gamma_1\, dv_1 + \ldots + \gamma_p\, dv_p + \delta\, dw,$$

telle que l'on ait identiquement

$$(10)\qquad \Omega' + \Omega\omega = 0,$$

$\Omega\omega$ étant un produit symbolique. On a

$$(11)\quad \Omega' = -dx_1\, dx_2 \ldots dx_p \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial y_1} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial g_{iq}}{\partial y_q} \right) dv_i\, dy_1 \ldots dy_q + dw\, dx_1 \ldots dx_p\, dy_1 \ldots dy_q.$$

Si w n'est pas une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_p$, l'identité

[1] *Leçons sur le problème de Pfaff*, Chap. III.

est impossible, car le dernier terme de Ω' ne peut figurer dans le produit $\Omega\omega$. Par suite, si l'équation (1) peut se mettre sous la forme (4), w étant linéairement distincte de $v_1, v_2, \ldots, v_p$, *la forme symbolique* (7) *n'admet pas de forme associée.*

Supposons maintenant que l'on ait

$$w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_p v_p.$$

La forme Ω' devient

$$(11)' \quad \Omega' = -dx_1 dx_2 \ldots dx_p \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial y_1} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial g_{iq}}{\partial y_q} \right) dv_i \, dy_1 \ldots dy_q$$
$$+ (b_1 \, dv_1 + b_2 \, dv_2 + \ldots + b_p \, dv_p) \, dx_1 \ldots dx_p \, dy_1 \ldots dy_q,$$

Ω' ne renferme aucun terme où figurent deux facteurs différents dv_i, dv_k. Pour qu'il en soit de même du produit $\Omega\omega$, il est nécessaire que tous les coefficients γ_i soient nuls, et l'on doit avoir

$$\omega = \alpha_1 \, dx_1 + \ldots + \alpha_p \, dx_p + \beta_1 \, dy_1 + \ldots + \beta_q \, dy_q.$$

Le coefficient de $dv_i \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_p \, dy_1 \ldots dy_q$ est égal à

$$b_i + (-1)^p \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial g_{iq}}{\partial y_q} \right),$$

tandis que dans $\Omega\omega$ il est égal à

$$\alpha_i + \sum_{k=1}^{q} \beta_k g_{ik}.$$

L'identité (10) fournit donc p relations distinctes qui permettent d'exprimer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ au moyen des coefficients b_i, g_{ik} et de q coefficients arbitraires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$.

La forme (8) admet donc dans ce cas ∞^q *formes linéaires associées.*

En particulier lorsque tous les g_{ik} sont nuls, on a $p = n$, la forme (1) est réductible à la forme (6), et *il existe une forme linéaire associée, et une seule, qui est au plus de classe n*, puisque $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ne dépendent que des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En cherchant directement si la forme (7) admet des formes linéaires associées, on peut donc reconnaître directement à quelle forme réduite on doit être conduit par les transformations linéaires qui ont été indiquées.

3. Il existe une infinité de transformations, de nature plus générale, qui conservent la forme de l'équation (1). Si l'on prend pour $u_1, u_2, \ldots, u_m$ des fonctions linéaires de fonctions inconnues nouvelles et de leurs dérivées partielles du premier ordre, il est clair que la nouvelle équation renfermera les dérivées partielles du second ordre des nouvelles inconnues, si les coefficients de la transformation sont arbitraires. Mais il est possible, et cela d'une infinité de façons, de choisir ces coefficients de telle sorte que les dérivées du second ordre disparaissent. Il suffit évidemment de le démontrer pour l'équation (5)

$$X_1(v_1)+\ldots+X_p(v_p)+b_1v_1+\ldots+b_pv_p+f=0. \tag{5}$$

Soit A_{ik} un système de coefficients, fonctions des variables x_i, y_k, satisfaisant aux conditions

$$A_{ik}+A_{ki}=0, \qquad A_{ii}=0 \qquad (i, k=1, 2, \ldots, p); \tag{12}$$

si l'on remplace dans l'équation (5) $v_i, v_2, \ldots, v_p$ par les expressions suivantes

$$\begin{aligned} v_1&=A_{12}X_2(V_1)+\ldots+A_{1p}X_p(V_1)+\alpha_{11}V_1+\alpha_{12}V_2+\ldots+\alpha_{1p}V_p,\\ v_2&=A_{21}X_1(V_1)+\ldots+A_{2p}X_p(V_1)+\alpha_{21}V_1+\alpha_{22}V_2+\ldots+\alpha_{2p}V_p,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, d'une façon générale,

$$v_i=A_{i1}X_1(V_1)+A_{i2}X_2(V_1)+\ldots+A_{ip}X_p(V_1)+\alpha_{i1}V_1+\ldots+\alpha_{ip}V_p, \tag{13}$$

$V_1, V_2, \ldots, V_p$ étant de nouvelles inconnues, et les coefficients α_{ik} des fonctions des variables x_i, y_k, les dérivées du second ordre de la fonction V_1 ne peuvent provenir que des expressions

$$A_{ik}[X_i(X_k(V_1))-X_k(X_i(V_1))],$$

et l'on sait que ces expressions ne renferment pas de dérivées du second ordre. On sera donc conduit à une équation linéaire par rapport aux fonctions inconnues $V_1, V_2, \ldots, V_p$, et à leurs dérivées partielles du premier ordre.

On obtient des transformations plus générales possédant la même propriété en remplaçant les coefficients A_{ik} par de nouveaux coefficients satisfaisant aux mêmes conditions (12), et V_1 par V_i

$$(i = 2, 3, \ldots, p),$$

et en ajoutant les expressions obtenues, ce qui fournit des transformations conduisant de l'équation (5) à une nouvelle équation linéaire où ne figurent pas les dérivées du second ordre. Les formules de transformation dépendent, il est facile de le voir, de

$$\frac{p^2(p-1)}{2} + p^2 = \frac{p^2(p+1)}{2}$$

coefficients arbitraires.

4. Dans le cas particulier où $q = 0$, on peut, d'une infinité de façons, disposer de ces coefficients de façon que l'équation transformée ne renferme aucune dérivée de l'une des fonctions. Par exemple, étant donnée l'équation

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} + b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n + f = 0, \tag{14}$$

posons

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial V_{n-1}}{\partial x_n} + V_n + b_2 V_1, \\ v_2 &= -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - b_1 V_1, \\ v_3 &= -\frac{\partial V_2}{\partial x_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_n &= -\frac{\partial V_{n-1}}{\partial x_1}; \end{aligned}\right. \tag{15}$$

l'équation (14) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\right) V_1 + b_1 \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial V_{n-1}}{\partial x_n} + V_n\right) & \\ - b_3 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \ldots - b_n \frac{\partial V_{n-1}}{\partial x_n} + f = 0. & \end{aligned} \tag{16}$$

Si $\frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2}$ n'est pas nul, on peut choisir arbitrairement $V_2, \ldots, V_{n-1}, V_n$ et la relation (16) donne V_1, qui s'exprime au moyen de ces $(n-1)$ fonctions arbitraires et de quelques-unes de leurs dérivées partielles du premier ordre. En portant cette expression de V_1 dans les formules (15), on aura une solution explicite de l'équation (14), où figurent explicitement $(n-1)$ fonctions arbitraires des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et quelques-unes de leurs dérivées partielles du premier et du second ordre.

Une généralisation immédiate de cette méthode prouve que la conclusion est la même pourvu que toutes les différences $\frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \frac{\partial b_k}{\partial x_i}$ ne soient pas nulles à la fois. Lorsque toutes ces différences sont nulles, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont les dérivées partielles d'une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et l'équation (14) devient

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial x_1} v_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} v_n + f = 0,$$

ou, en multipliant par e^F,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(e^F v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(e^F v_2) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}(e^F v_n) + fe^F = 0. \tag{17}$$

En écrivant w_i au lieu de $e^F v_i$, et g au lieu de fe^F, on a l'équation

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n} + g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{18}$$

qui se ramène immédiatement à la forme

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n} = 0, \tag{19}$$

en remplaçant par exemple w_1 par $w_1 - \int g\,dx_1$.

Cette équation (19) exprime que la forme symbolique

$$\Omega_n = w_1\,dx_2 \ldots dx_n - w_2\,dx_1\,dx_3 \ldots dx_n + w_3\,dx_1\,dx_2\,dx_q\,dx_n \ldots$$

est la forme dérivée d'une autre forme Ω_{n-2} d'ordre $n-2$ à n variables, dépendant de $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients arbitraires. Soient A_{ik} les coefficients de cette forme satisfaisant aux relations $A_{ki} + A_{ik} = 0$.

La solution générale de l'équation (19) est représentée par les formules

$$w_i = \frac{\partial A_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{i2}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial A_{in}}{\partial x_n}. \tag{20}$$

En prenant $n = 3$, on retrouve les formules classiques qui donnent la solution de l'équation

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = 0.$$

5. Supposons maintenant que dans l'équation (5) le nombre des variables principales soit supérieur au nombre des fonctions inconnues, c'est-à-dire que tous les coefficients g_{ik} ne soient pas nuls. On a déjà fait observer qu'une transformation de la forme (13) remplace l'équation (5) par une équation, où les nouvelles fonctions inconnues et leurs dérivées du premier ordre figurent linéairement. Or, on peut disposer des coefficients A_{ik}, α_{ik} de façon que la nouvelle équation ne renferme aucune dérivée par rapport à l'une des variables $y_1, y_2, \ldots, y_q$. Par exemple, si le coefficient g_{11} n'est pas nul, les coefficients de $\frac{\partial V_1}{\partial y_1}, \frac{\partial V_2}{\partial y_1}, \cdots$ sont respectivement

$$\alpha_{11} g_{11} + \alpha_{21} g_{21} + \ldots + \alpha_{p1} g_{p1} + \ldots, \quad \alpha_{12} g_{11} + \alpha_{22} g_{21} + \ldots,$$

les termes non écrits ne dépendant pas des α_{ik}. Les coefficients A_{ik} étant choisis arbitrairement, on peut donc déterminer les coefficients α_{ik} de façon que les dérivées $\frac{\partial V_1}{\partial y_1}, \frac{\partial V_2}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V_p}{\partial y_1}$ ne figurent pas dans la nouvelle équation, où y_1 joue le rôle d'une variable paramétrique. On peut donc toujours, par un changement de fonctions inconnues de la forme (13), *diminuer le nombre des variables principales d'une unité*.

En continuant de la sorte, on finira évidemment par être ramené à une équation de la forme (6), à moins d'être conduit à une équation intégrable immédiatement, ou à une équation ne renfermant que les dérivées d'une seule fonction inconnue.

Remarques. — 1° Puisqu'on dispose dans la transformation (13) de p^2 coefficients α_{ik}, on peut aussi en général faire disparaître d'un seul coup, toutes les dérivées $\frac{\partial y_i}{\partial_k}$, pourvu que le nombre p soit assez grand relativement au nombre q.

2° Après une ou plusieurs transformations de cette espèce, il est clair que l'intégrale générale de l'équation (5) renfermera en général les dérivées des fonctions arbitraires d'un ordre supérieur au premier.

3° Dans quelques cas particuliers, on peut diminuer le nombre des variables principales par des transformations plus simples. Supposons par exemple que la fonction inconnue v_1 ne figure dans l'équation (5) que par le terme $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$. Si l'on pose

$$v_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad v_p = \frac{\partial V_p}{\partial x_1},$$

on tire de cette équation

$$v_1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial V_p}{\partial x_p} + \sum_{i=2}^{p} \sum_{k=1}^{q} \int g_{ik} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_1 dy_k} dx_1$$
$$+ \int b_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \int b_k \frac{\partial V_p}{\partial x_1} dx_1 + \int f dx_1 = 0.$$

On peut écrire, en intégrant par parties,

$$\int g_{ik} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_1 \partial y_k} dx_1 = g_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial y_k} - \int \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_1} \frac{\partial V_i}{\partial y_k} dx_1,$$
$$\int b_i \frac{\partial V_i}{\partial x_1} dx_1 = b_i V_1 - \int \frac{\partial b_i}{\partial x_1} V_i dx_1,$$

et l'on est ramené à une équation de la forme

$$\sum_{i=2}^{p} \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g_{ik}}{\partial y_k} \frac{\partial V_i}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial b_i}{\partial x_1} V_i + f = \frac{\partial U}{\partial x_1},$$

où ne figurent que les variables $x_1, y_1, \ldots, y_k$, et les p fonctions $V_2, \ldots, V_p$, U. On a diminué le nombre des variables principales de $p - 1$ unités.

Prenons, par exemple, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + b \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

en posant $v = \frac{\partial V}{\partial x}$, elle devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0,$$

et l'on en tire

$$u + \frac{\partial V}{\partial y} + \int b \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} dx = 0,$$

ou

$$u + \frac{\partial V}{\partial y} + b \frac{\partial V}{\partial z} - \int \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} \partial x = 0,$$

et il suffira de résoudre l'équation

$$\frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

à deux variables principales seulement.

6. Je me propose, pour terminer, de montrer comment on peut reconnaître si une forme symbolique Π de classe $2n$ et de degré n par rapport aux différentielles, peut être ramenée par un changement de variables à la forme (7). On a déjà reconnu plus haut (n° **2**) que *cette forme* Π *doit admettre une forme associée de classe égale ou inférieur à n.*

Supposons cette condition remplie et supposons de plus que la forme associée π soit de classe n. Soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système de variables canoniques pour cette forme π, de sorte qu'on peut l'écrire

$$(21) \qquad \pi = \gamma_1 \, dy_1 + \gamma_2 \, dy_2 + \ldots + \gamma_n \, dy_n,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ étant des fonctions des seules variables y_i. Les deux formes Ω et Π étant supposées équivalentes, il en est de même des formes associées ω et π, de sorte que l'on passe de la forme

$$(9)' \qquad \omega = \alpha_1 \, dx_1 + \ldots + \alpha_n \, dx_n,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des fonctions des variables x_i, en prenant pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des fonctions des n variables y_i. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n autres variables formant avec les y_i un système de $2n$ variables indépendantes. Le changement de variables, s'il en existe, conduisant de la forme Ω à la forme Π est donc défini par des formules

$$(22) \qquad x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad u_i = \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

On aura donc pour la forme Π l'expression suivante

$$(23)\qquad \begin{aligned}\Pi = \pi_1 dy_2 \ldots dy_n + \pi_2 dy_1\, dy_3 \ldots dy_n + \ldots + \pi_n dy_1\, dy_{n-1}\\ + g\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n,\end{aligned}$$

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ étant des formes de Pfaff, où ne figurent que les différentielles $dz_1, dz_2, \ldots, dz_n$, et g une fonction des variables y_i, z_i. On obtient ainsi de nouvelles conditions auxquelles doit satisfaire la forme Π; *les variables y_i étant un système de variables canoniques de la forme associée*, Π *doit être de la forme* (23).

Les conditions qui précèdent sont *suffisantes*. On doit avoir, en effet, d'après la définition même de la forme associée,

$$(24)\qquad \Pi\pi + \Pi' = 0.$$

Or, le produit $\Pi\pi$ ne contient aucun terme où figure un produit tel que $dz_i dz_k$. Il doit donc en être de même de la forme dérivée Π'. En particulier, elle ne doit pas renfermer le produit $dz_1\, dz_2\, dy_2\, dy_3 \ldots dy_n$. Un terme de cette espèce ne peut provenir que de $d\pi_1\, dy_2 \ldots dy_n$. Soit

$$\pi_1 = c_1\, dz_1 + c_2\, dz_2 + \ldots + c_n\, dz_n;$$

dans Π' figure le terme

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial z_1} - \frac{\partial c_1}{\partial z_2}\right) dz_1\, dz_2\, dy_1 \ldots dy_n,$$

qui ne peut se réduire avec aucun autre. Il faut donc que l'on ait $\frac{\partial c_2}{\partial z_1} = \frac{\partial c_1}{\partial z_2}$, et l'on démontre de même que l'on a, d'une façon générale, $\frac{\partial c_i}{\partial z_k} = \frac{\partial c_k}{\partial z_i}$, de sorte que l'on peut remplacer la forme de Pfaff π_1 par

$$dv_1 - \frac{\partial v_1}{\partial y_1} dy_1 \ldots - \frac{\partial v_1}{\partial y_n} dy_n,$$

et la forme π_i par

$$dv_i - \frac{\partial v_i}{\partial y_1} dy_1 \ldots - \frac{\partial v_i}{\partial y_n} dy_n,$$

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ étant des fonctions des $2n$ variables y_i, z_i. En réunissant en un seul terme tous ceux où figure le produit $dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$, on a donc pour Π l'expression suivante

$$(25)\quad \begin{aligned}\Pi = {} & dv_1 dy_2 \ldots dy_n + dv_2 dy_1 dy_3 \ldots dy_n + \ldots + dv_n dy_1 \ldots dy_{n-1} \\ & + G(y_1, \ldots, y_n; z_1, z_2, \ldots, z_n) dy_1 \ldots dy_n.\end{aligned}$$

Les $2n$ variables y_i, v_i forment un système de $2n$ variables indépendantes. En effet, supposons, par exemple, qu'il y ait une relation telle que

$$v_n = F(y_1, y_2, \ldots, y_n; v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}),$$

les $2n-1$ fonctions $y_1, \ldots, y_n; v_1, \ldots, v_{n-1}$ étant distinctes. En remplaçant v_n et dv_n par F et dF dans Π, on aura d'abord des termes où figure une des différentielles $dv_1, dv_2, \ldots, dv_{n-1}$, l'ensemble de ces termes formant une forme dérivée et un dernier terme

$$G(y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_n) dy_1 \ldots dy_n.$$

Si le coefficient G s'exprimait lui-même au moyen des $2n-1$ variables $y_1, \ldots, y_n; v_1, \ldots, v_{n-1}$, la forme Π serait de classe inférieure à $2n$, contrairement à l'hypothèse. Le coefficient G doit donc former avec les $2n-1$ variables y_i, v_k un système de $2n$ variables indépendantes. La forme dérivée Π' contiendrait un seul terme $dG\, dy_1 \ldots dy_n$, qui ne figure pas dans le produit $\Pi\pi$. L'identité $\Pi\pi + \Pi' = 0$ serait donc impossible.

Il suit de là que $y_1, \ldots, y_n; v_1, \ldots, v_n$ forment un système de $2n$ variables indépendantes. On peut donc supposer G exprimé au moyen de ces $2n$ variables y_i, v_i. On a alors

$$\Pi' = \left(\frac{\partial G}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial G}{\partial v_2} dv_2 + \ldots + \frac{\partial G}{\partial v_n} dv_n\right) dy_1 dy_2 \ldots dy_n,$$

et, dans le produit symbolique $\Pi\pi_1$ le coefficient de $dv_1 dy_1 \ldots dy_n$ est égal à $\pm\gamma_1$. La dérivée $\frac{\partial G}{\partial v_1}$ est donc fonction des seules variables y_i, et l'on démontrerait tout pareillement qu'il en est de même des dérivées $\frac{\partial G}{\partial v_2}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial v_n}$; G est donc une fonction linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, et il suffit d'un simple changement de notations pour retrouver la forme (7) de Ω.

7. En résumé, pour reconnaître si une forme symbolique de diffé-

rentielles de degré n et de classe $2n$ peut être mise sous la forme (7) par un choix convenable des variables, il faut d'abord s'assurer que cette forme admet une forme linéaire associée de classe au plus égale à n. Cette recherche n'exige que des différentiations et des opérations linéaires sans aucune intégration. S'il existe une forme associée de classe n, pour continuer le calcul, il semble qu'il faille avoir déterminé les variables canoniques de cette forme associées, ce qui exige en général des intégrations. Mais ces intégrations ne sont pas nécessaires pour vérifier si les autres conditions sont vérifiées. En effet, étant donnée une forme de Pfaff ω, de classe n, où figurent un nombre quelconque de variables ou leurs différentielles, la détermination d'un système de n variables canoniques se ramène à l'intégration d'un système complet de n équations aux différentielles totales

$$(26) \qquad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_n = 0,$$

que l'on peut former en partant des coefficients de la forme ω [1]. Les premiers membres de ces équations (26) sont des combinaisons linéaires de $dy_1, dy_2, \ldots, dy_n$, et inversement $dy_1, dy_2, \ldots, dy_n$ sont des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Tout produit symbolique de $(n-1)$ facteurs dy_i est donc égal à une somme de produits symboliques des $(n-1)$ formes ω_i, abstraction faite de coefficients qui ne dépendent que des variables; on peut donc remplacer la dernière condition énoncée plus haut (n° **6**) par la suivante : *La forme* Π *doit s'exprimer par une somme de produits symboliques*

$$(26) \qquad \Pi = \pi_1\omega_2\ldots\omega_n + \pi_2\omega_3\ldots\omega_n\omega_1 + \ldots + \pi_n\omega_1\omega_2\ldots\omega_{n-1},$$

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ *étant des formes de Pfaff* [qui ne sont plus les mêmes que celles qui figurent dans la formule (23)].

Quelles que soient les variables qui figurent dans la forme Π, on peut toujours s'assurer, par des calculs linéaires, si cette condition est vérifiée. Ce n'est que pour ramener effectivement la forme Π à la forme réduite que l'intégration du système (26) est nécessaire.

Il resterait, pour être complet, à étudier aussi le cas où la forme associée ω est de classe inférieure à n, et à rechercher les conditions

(1) *Leçons sur le Problème de Pfaff*, p. 31.

pour qu'une forme symbolique puisse être ramenée à la forme générale (8).

8. A toute équation de Monge (1) correspond, on l'a vu, une équation symbolique (7). D'une façon générale, soit Π une forme symbolique à $n+p$ variables, de degré n par rapport aux différentielles; la recherche des multiplicités intégrales à n dimensions de l'équation $\Pi = 0$ se ramène à l'intégration d'une ou plusieurs équations de Monge, d'une forme spéciale considérée par Hamburger. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}$ les variables qui figurent dans la forme Π. Si M_n est une multiplicité à n dimensions de l'équation $\Pi = 0$, sur laquelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables indépendantes, en divisant le premier membre de l'équation par le produit $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, on est conduit à une équation de Monge où les fonctions inconnues $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}$ ne figurent pas dans des jacobiens d'ordre $q \leqq p$, où les fonctions sont prises parmi $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}$, et les variables parmi $x_1, x_2, \ldots, x_n$; tous ces déterminants y figurent linéairement.