JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. DANILEWSKY

# Remarque sur la note de M. R. Garnier : sur une propriété des matrices orthogonales

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 13-14.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_13_0>

# *Remarque sur la Note de M. R. Garnier : Sur une propriété des matrices orthogonales ;*

PAR A. DANILEWSKY.

(Kharkoff.)

Je veux montrer que le théorème démontré par M. Garnier [1] :

*+ et — désignant respectivement des éléments réels (ou nuls) et purement imaginaires (ou nuls), il n'existe aucune matrice orthogonale*

$$\Sigma \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad}^{2n-p} & \overbrace{\qquad\qquad}^{p-h} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} + & \dots & + & - & \dots & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ + & \dots & + & - & \dots & - \\ - & \dots & - & + & \dots & + \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & \dots & - & + & \dots & + \end{array} \right\| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} p \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 2n-p-h \end{array} \end{array}$$

*où l'on aurait*

$$h \leqq p < n, \tag{1}$$

est une conséquence immédiate de la loi d'inertie des formes quadratiques.

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 9e série, **16**, 1937, p. 105-110.

En effet, en vertu de la définition

$$\Sigma = \begin{Vmatrix} \overbrace{1 \quad \ddots \quad 1}^{p} & \overbrace{i \quad \ddots \quad i}^{2n-p-h} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \overbrace{+ \quad \cdots \quad +}^{2n-h} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ + \quad \cdots \quad + \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \overbrace{1 \quad \ddots \quad 1}^{2n-p} & \overbrace{i \quad \ddots \quad i}^{p-h} \end{Vmatrix}$$

$$\equiv (\overbrace{1, \ldots, 1}^{p}, \overbrace{i, \ldots, i}^{2n-p-h})\, S(\overbrace{1, \ldots, 1}^{2n-p}, \overbrace{i, \ldots, i}^{p-h}),$$

où S est une matrice *réelle* d'ordre $2n-h$ et $(x_1, x_2, \ldots)$ désigne une matrice diagonale.

La matrice $\Sigma$ étant orthogonale, on a

$$(\overbrace{1, \ldots, 1}^{2n-h}) = \Sigma\Sigma' = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{p}, \overbrace{i, \ldots, i}^{2n-p-h})$$
$$\times S(\overbrace{1, \ldots, 1}^{2n-p}, \overbrace{i, \ldots, i}^{p-h})(\overbrace{1, \ldots, 1}^{2n-p}, \overbrace{i, \ldots, i}^{p-h})\, S'(\overbrace{1, \ldots, 1}^{p}, \overbrace{i, \ldots, i}^{2n-p-h})$$

ou

$$(2) \qquad (\overbrace{1, \ldots, 1}^{2n-h}) = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{p}, \overbrace{i, \ldots, i}^{2n-p-h})$$
$$\times S(\overbrace{1, \ldots, 1}^{2n-p}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{p-h})\, S'(\overbrace{1, \ldots, 1}^{p}, \overbrace{i, \ldots, i}^{2n-p-h}).$$

En multipliant (2) à droite et à gauche par la matrice $(\overbrace{1, \ldots, 1}^{p}, \overbrace{i, \ldots, i}^{2n-p-h})$, on obtient l'égalité

$$(\overbrace{1, \ldots, 1}^{p}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{2n-p-h}) = S(\overbrace{1, \ldots, 1}^{2n-p}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{p-h})S',$$

en vertu de laquelle la forme $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{2n-h}^2$ se réduit par la substitution réelle S à la forme

$$y_1^2 + \ldots + y_{2n-p}^2 - y_{2n-p+1}^2 - \ldots - y_{2n-h}^2,$$

ce qui est contraire à la loi d'inertie, car, en vertu de (1),

$$2n - p = 2(n-p) + p > p.$$