JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CHARLES EHRESMANN

Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 69-100.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_69_0>

Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles ;

PAR CHARLES EHRESMANN
(Paris).

INTRODUCTION. — Dans un travail récent, cité par la suite sous le nom de *Topologie d'espaces homogènes* (1), j'ai exposé une méthode pratique pour étudier la topologie de certaines variétés. J'ai appliqué cette méthode à plusieurs classes de variétés algébriques complexes. Je me propose de montrer ici que les nappes réelles de ces variétés algébriques complexes peuvent être étudiées de la même façon. Je me bornerai à l'étude des variétés suivantes :

I. *Variétés de Grassmann réelles.*

II. *Variétés engendrées par des éléments composés* $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$.

On appelle variété de Grassmann réelle la variété algébrique réelle définie par l'ensemble des variétés planes à k dimensions d'un espace projectif réel à n dimensions. En représentant par $[p]$ une variété plane réelle à p dimensions, le symbole $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ représente la figure formée par $k+1$ variétés planes, $[p_0]$, $[p_1]$, $\ldots$, $[p_k]$, telles que

$$p_0 < p_1 < \ldots < p_k, \qquad [p_0] \subset [p_1] \subset \ldots \subset [p_k].$$

Mon but est la détermination effective des bases d'homologie. Je démontre aussi un théorème sur la déformation des chaînes, d'où l'on peut déduire en particulier le groupe de Poincaré de chacune des

(1) C. EHRESMANN, *Sur la topologie de certains espaces homogènes* (*Ann. of Math.*, vol. 35, 2, 1934, p. 396-443).

variétés considérées. Comme application des propriétés de la variété des éléments linéaires d'un espace projectif, je montre qu'on ne peut pas définir un parallélisme absolu dans l'espace projectif à n dimensions, si n est différent de 3, de 7 ou de $16r-1$. J'indique enfin une démonstration élémentaire du fait connu suivant : le groupe orthogonal à n variables forme une variété close dont le groupe de Poincaré est d'ordre 2.

La méthode suivie consiste à subdiviser les variétés en cellules d'une espèce très générale. On appellera cellule un ensemble de points, E_p, d'un espace topologique, cet ensemble de points jouissant des propriétés suivantes : 1. E_p est homéomorphe à l'intérieur d'un simplexe à p dimensions; 2. l'ensemble E_p+L, où L est la frontière de E_p, peut être recouvert par un complexe simplicial tel que L soit recouvert par un sous-complexe de ce complexe. On aura subdivisé une variété V en cellules, lorsqu'on aura défini sur V un ensemble de cellules tel que tout point de V appartienne à une cellule et à une seule et tel que la frontière de chaque cellule soit la somme d'un nombre fini des cellules considérées. Au point de vue de l'homologie et de l'homotopie, une telle subdivision en cellules jouit des mêmes propriétés qu'une subdivision en simplexes. En particulier, dans une variété algébrique, réelle ou complexe, tout domaine homéomorphe à l'intérieur d'un simplexe et dont la frontière est la somme d'un nombre fini de domaines de variétés algébriques constitue une cellule.

Pour les notations et la terminologie ainsi que pour plusieurs démonstrations nous renvoyons au mémoire déjà cité. Il sera toujours sous-entendu que les variétés algébriques considérées sont réelles.

I. — Variétés de Grassmann réelles.

1. L'espace projectif réel à n dimensions sera désigné par $[n]$; une variété plane à k dimensions contenue dans $[n]$ sera désignée par $[k]$. L'ensemble des variétés $[k]$ contenues dans $[n]$ définit une variété algébrique réelle, V, appelée variété de Grassmann réelle. Étant données $k+1$ variétés planes, $[a_0]$, $[a_1]$, ..., $[a_k]$, telles que

$$0 \leqq a_0 < a_1 < \ldots < a_k \leqq n, \qquad [a_0] \subset [a_1] \subset \cdots \subset [a_k] \subset [n],$$

le symbole $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ représente la variété définie par l'ensemble des variétés $[k]$ dont l'intersection avec $[a_i]$ est à i dimensions au moins, où $i = 0, 1, \ldots, k$. Soit (S) une suite de variétés planes, $[n], [n-1]_0, [n-2]_0, \ldots, [1]_0, [0]_0$, satisfaisant à

$$[n] \supset [n-1]_0 \supset \ldots \supset [1]_0 \supset [0]_0.$$

Considérons toutes les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ qu'on peut définir à l'aide de $k+1$ variétés de la suite (S); à chaque symbole correspond ainsi une variété bien déterminée. D'après le raisonnement fait à propos des variétés de Grassmann complexes (¹), la variété

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k] - \sum_{i=0}^{i=k} [a_0, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]$$

est une cellule que nous désignons par $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$. Nous convenons une fois pour toutes de remplacer par zéro tout symbole qui n'a pas de sens. Les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ subdivisent V en cellules. Soit K le complexe défini par l'ensemble des cellules $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$ et soit K_p le complexe défini par l'ensemble des cellules de dimension inférieure ou égale à p. Considérons sur V un complexe singulier C_p ou une chaîne singulière Γ_p (²). On a alors le théorème suivant (³) :

Tout complexe C_p *ou toute chaîne* Γ_p *sur* V *peut être déformé d'une façon continue en un complexe ou une chaîne sur* K_p.

Il en résulte le corollaire suivant :

Le groupe de Poincaré de V *est le groupe cyclique d'ordre* 2 ; *son élément générateur est défini par le cycle linéaire* $[0, 1, \ldots, p-1, p+1]$.

En effet, K_1 se réduit à $[0, 1, \ldots, k-1, k+1]$, K_0 se réduit au point O défini par l'élément $[0, 1, \ldots, k]$. Considérons les cycles linéaires d'origine et d'extrémité O et soit a le cycle défini par

(¹) *Voir* C. EHRESMANN, *loc. cit.*, p. 417.

(²) *Voir* S. LEFSCHETZ, *Topology* (*Am. Math. Soc. Colloquium Publ.*, New-York, 1932), p. 73 ou H. SEIFERT und W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie* (Leipzig und Berlin, Teubner, 1934), § 25-26.

(³) *Voir* C. EHRESMANN, *loc. cit.*, p. 413.

$[0, 1, \ldots, k-1, k+1]$ parcouru dans un certain sens. Par une déformation laissant fixe le point O, tout autre cycle peut être déformé en une puissance de a. Pour qu'un cycle a^r puisse être réduit au point O par déformation continue, il faut et il suffit qu'il existe sur V une cellule singulière dont la frontière soit a^r. On pourra déformer cette cellule en une cellule singulière sur K_2 tout en laissant fixes les points de a. Donc le groupe de Poincaré de V est le même que celui de K_2. En écrivant que le cycle défini par le bord de chaque cellule E_2 de K_2 est équivalent à l'élément unité, on obtient toutes les relations de définition du groupe de Poincaré ([1]). Le complexe K_2 se compose de deux cellules à deux dimensions $[0, 1, \ldots, k-1, k+2]^*$ et $[0, 1, \ldots, k-2, k, k+1]^*$. Les deux surfaces fermées correspondantes, sont homéomorphes au plan projectif. Donc on arrive à la relation unique $a^2 = 1$.

2. La variété V admet une subdivision en simplexes telle que chaque cellule de K soit subdivisée en simplexes. La cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$, munie d'une certaine orientation, définit une chaîne bien déterminée, à savoir la somme des simplexes orientés qui recouvrent la cellule considérée, l'orientation de chaque simplexe étant définie par l'orientation de la cellule. D'après « *Topologie d'espaces homogènes* », paragraphe **9**, nous aurons des relations d'incidence de la forme

$$(1) \qquad [a_0, a_1, \ldots, a_k]^* \rightarrow \Sigma\lambda_i[a_0, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]^*.$$

Le symbole qui est multiplié par λ_i se déduit de $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$ en remplaçant a_i par $a_i - 1$; les coefficients λ_i sont appelés les nombres d'incidence de K. Tout cycle Γ_p sur V est homologue à une combinaison linéaire des cellules $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$ de dimension p. D'autre part, si Γ_p est une telle combinaison linéaire et si $\Gamma_p \sim 0$, il existe une combinaison linéaire, C_{p+1}, des cellules de dimension $p+1$ telle que $C_{p+1} \rightarrow \Gamma_p$. *Pour déterminer les bases d'homologie de* V, *il suffit donc de connaître les relations* (1).

Considérons la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ et soit W la variété des éléments $[k]$ qui coupent une des variétés $[a_i]$ suivant une variété plane à

([1]) *Voir* H. Seifert und W. Threlfall, *loc cit.*, § 46.

$i+1$ dimensions au moins. Si $[k]$ appartient à $[a_0, a_1, \ldots, a_k] - W$, l'intersection de $[k]$ avec $[a_i]$, pour $i = 0, 1, \ldots, k$, a exactement i dimensions. En particulier la cellule ouverte $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$ est contenue dans $[a_0, a_1, \ldots, a_k] - W$. Or il existe un groupe projectif qui transforme transitivement les éléments de $[a_0, a_1, \ldots, a_k] - W$. Par conséquent la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k] - W$ est homogène. Sa subdivision en simplexes est une variété *combinatoire* ouverte, car chaque élément admet un voisinage euclidien ([1]). Chaque simplexe de dimension maximum qui appartient à $[a_0, a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]^*$ est donc sur la frontière de deux simplexes appartenant à $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$. Il en résulte que tout nombre d'incidence λ_i est égal à $0, +2$ ou -2.

Faisons abstraction de l'orientation, c'est-à-dire considérons les chaînes mod 2. On aura

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k]^* \to 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2).$$

Les cellules de K, ou encore les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$, définissent donc des cycles mod 2. Si Γ_p est une combinaison linéaire de ces cycles mod 2, il n'existe pas de combinaison linéaire C_{p+1} des cellules de K telles que $C_{p+1} \to \Gamma_p$ (mod 2). Par conséquent les cycles mod 2 définis par les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ sont linéairement indépendants (mod 2). Donc

THÉORÈME. — *Les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ de dimension p forment une base minima du groupe d'homologie* mod 2 *relatif à la dimension p.*

La variété V, qui est une variété homogène, est une variété combinatoire. On peut donc définir le nombre d'intersection de deux cycles mod 2. Comme dans *Topologie d'espaces homogènes*, paragraphe **11**, on peut montrer que

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k].[n - a_k, \ldots, n - a_1, n - a_0] = 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 2).$$

Le nombre d'intersection de $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ avec un cycle de base différent de $[n - a_k, \ldots, n - a_1, n - a_0]$ est nul.

3. Arrivons à la détermination des nombres d'incidence et consi-

---

([1]) *Voir* S. LEFSCHETZ, *loc cit.*, p. 155.

dérons d'abord la relation suivante :

$$[n-k, n-k+1, \ldots, n]^* \rightarrow \lambda[n-k-1, n-k+1, \ldots, n]^*.$$

On a $\lambda = 0$ si V est orientable et $\lambda = \pm 2$ si V est non orientable.

Pour voir si V est orientable ou non orientable, nous nous servons du fait que les éléments de V sont transformés transitivement entre eux par le groupe continu des homographies de $[n]$. Soit G ce groupe. Considérons dans $[n]$ des coordonnées projectives que nous appelons $x_0, x_1, \ldots, x_k, y_0, y_1, \ldots, y_{n-k-1}$. Nous prenons pour élément origine dans V l'élément $[k]_0$ défini par $y_0 = y_1 = \ldots = y_{n-k-1} = 0$. Le sous-groupe g de G qui laisse fixe $[k]_0$ est alors défini par

$$(2) \qquad \begin{cases} (x') = (a)(x) + (c)(y), \\ (y') = \phantom{(a)(x) + {}} (b)(y), \qquad |a| \cdot |b| > 0, \end{cases}$$

où (x) et (y) sont les matrices à une colonne dont les éléments sont respectivement $x_0, \ldots, x_k$ et $y_0, \ldots, y_{n-k-1}$. Tout élément $[k]$ infiniment près de $[k]_0$ se déduit de $[k]_0$ par une transformation infinitésimale de la forme

$$(\delta x) = 0, \qquad (\delta y) = (\omega)(x),$$

où (ω) est une matrice à $k+1$ colonnes et à $n-k$ lignes. Les éléments ω_{ij} de (ω) peuvent être considérés comme des coordonnées de $[k]$. Une transformation de g de la forme (2) transforme $[k]$ en un élément $[k]'$ défini de la même façon par une matrice (ω'), et l'on a

$$(\omega') = (b)(\omega)(a^{-1}).$$

Cette relation définit un groupe linéaire γ opérant sur les quantités ω_{ij}. C'est le groupe linéaire d'isotropie. Si le déterminant de ce groupe est toujours positif, la variété V est orientable, sinon V est non orientable (¹). Comme ce déterminant garde un signe constant pour chaque partie connexe de γ, il suffit de considérer une transformation particulière telle que $|a| < 0$, $|b| < 0$; par exemple la transformation

(¹) *Voir* E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs* (*Mémorial Sc. math.*, fasc. XLII, 1930), p. 29.

correspondant à

$$\begin{array}{llll} x'_0 = -x_0, & x'_1 = x_1, & \ldots, & x'_k \quad = x_k; \\ y'_0 = -y_0, & y'_1 = y_1, & \ldots, & y'_{n-k-1} = y_{n-k-1}. \end{array}$$

Par cette transformation, $n-1$ des quantités ω_{ij} changent de signe, les autres restant invariantes. Donc

La variété V *est orientable si n est impair est non orientable si n est pair.*

4. Soit A la variété de symbole $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ et soit A_h la variété dont le symbole se déduit du symbole précédent en remplaçant a_h par $a_h - 1$. Les cellules orientées correspondantes seront désignées par $A^\star$ et $A^\star_h$. La relation (1) s'écrit alors : $A^\star \rightarrow \Sigma\lambda_i A^\star_i$. Pour déterminer λ_i, nous considérons la variété $A' = A - A_0 - A_1 - \ldots - A_{i-1}$. Un élément $[k]$ de A' coupe $[a_{i-1}]_0$ suivant une variété $[i-1]$ qui appartient à la cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}]^\star$. Considérons une variété plane $[n-1]'_0$ qui appartient à la cellule $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-i}]^\star$, où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-i}$ sont les nombres de la suite $0, 1, \ldots, n$ qui ne figurent pas dans la suite $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$. Montrons que $[i-1]$ n'a pas de point commun avec $[n-i]'_0$. Supposons, en effet, qu'il existe un point commun M. Soit b le plus petit entier telle que la variété $[b]_0$ de la suite (S) contienne M. Comme M appartient à $[i-1]$, le nombre b ne peut être qu'un des nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$. Comme M appartient à $[n-i]'_0$, le nombre b ne peut être qu'un des nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-i}$. Par conséquent il n'y a pas de point commun à $[i-1]$ et à $[n-i]'_0$. L'intersection de $[k]$ avec $[n-i]'_0$ est par suite une variété $[k-i]'$. La variété $[n-i]'_0$ coupe $[a]_0$ suivant une variété $[a']'_0$. On a $a' = a - \varphi(a)$, où $\varphi(a)$ est le nombre des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$ qui sont inférieurs ou égaux à a. Les variétés $[a']'_0$, où a' prend toutes les valeurs entières de 0 à $n-i$, forment dans $[n-i]'_0$ une suite (S') analogue à (S). La variété $[k-i]'$ est un élément quelconque de la variété

$$B = [a_i - i, a_{i+1} - i, \ldots, a_k - i]' - [a_{i-1} - i, a_{i+1} - i, \ldots, a_k - i]',$$

où les symboles sont définis à l'aide de variétés planes de la suite (S'). La variété A' est ainsi le produit topologique de $[a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}]^\star$ par B. La cellule $A^\star_h$, pour $h \geqq i$, est le produit topologique de

$[a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}]^*$ par $[a_i - i, \ldots, a_h - i - 1, a_k - i]'^*$; cependant pour que A_i^* existe, nous supposerons $a_i > a_{i-1} - 1$. Avec une orientation donnée des cellules, on a la relation d'incidence

$$(3) \qquad [a_i - i, a_{i+1} - i, \ldots, a_k - i]^* \to \sum_{h=i}^{h=k} \lambda'_h [a_i - i, \ldots, a_h - i - 1, \ldots, a_k - i]'^*,$$

qui a lieu aussi bien dans la variété ouverte B que dans la variété fermée $[a_i - i, a_{i+1} - i, \ldots, a_k - 1]'$. Dans la variété ouverte A' on a d'autre part

$$A^* \to \sum_{h=i}^{h=k} \lambda_h A_h^* \qquad (\mathrm{mod}\ A - A').$$

D'après les propriétés du produit de deux complexes, les valeurs absolues de λ_h et de λ'_h sont les mêmes. En particulier $|\lambda_i| = |\lambda'_i|$; on est donc ramené à la détermination du premier coefficient de la relation (3).

Pour déterminer λ_0, nous transformons la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ par une corrélation qui permute entre elles les variétés planes de la suite (S), la variété $[a]_0$ étant transformée en $[n - a - 1]_0$. Soit $[k]$ un élément de $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$. La variété $[k]$, qui détermine avec $[a_i]_0$ une variété plane à $a_i + k - i$ dimensions au plus, est transformée en une variété $[n - k - 1]$ qui coupe $[n - a_i - 1]_0$ suivant une variété plane à i' dimensions au moins, où

$$i' = n - (a_i + k - i) - 1 = n - k - 1 - (a_i - i).$$

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k-1}$ les entiers de la suite $0, 1, \ldots, n$ qui ne figurent pas dans la suite $a_0, a_1, \ldots, a_k$. La différence $a_i - i$ est égale au nombre des entiers α_h qui sont inférieurs à a_i. Par conséquent le premier nombre de la suite $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k-1}$ qui soit supérieur à a est α_{i_1}, où $i_1 = n - k - 1 - i'$, et parmi les variétés de la suite (S), $[n - \alpha_{i_1}]$ est la variété de plus petite dimension dont l'intersection avec $[n - k - 1]$ est à i' dimensions au moins. La variété corrélative de $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ est donc la variété $[n - \alpha_{n-k-1}, \ldots, n - \alpha_1, n - \alpha_0]$.

Dans ce dernier symbole, les a_0 derniers nombres sont les nombres consécutifs $n - a_0 + 1, \ldots, n - 1, n$. Si l'on y remplace $n - a_0 + 1$

par $n-a_0$, on obtient le symbole de la variété corrélative de $[a_0-1, a_1, \ldots, a_k]$. Le nombre λ_0 est aussi au signe près le nombre d'incidence entre les deux cellules

$$[n-\alpha_{n-k-1}, \ldots, n-a_0+1, \ldots, n-1, n]^*$$

et

$$[n-\alpha_{n-k-1}, \ldots, n-a_0, n-a_0+2, \ldots, n-1, n]^*.$$

Or nous venons de prouver qu'on obtient le même nombre d'incidence au signe près, en supprimant dans ces deux symboles les $n-k-a_0$ premiers nombres et en retranchant des autres le nombre $n-k-a_0$. Par suite λ_0 est au signe près le nombre d'incidence entre les cellules

$$[k+1, k+2, \ldots, k+a_0]^* \quad \text{et} \quad [k, k+2, \ldots, k+a_0]^*.$$

D'après le résultat du paragraphe 3, on a donc $\lambda_0=0$, si $k+a$ est impair; $\lambda_0=\pm 2$, si $k+a_0$ est pair.

En appliquant ce résultat au premier coefficient dans la relation (3), on trouve : $\lambda'_i=0$, si $k+a_i$ est impair; $\lambda'_i=\pm 2$, si $k+a_i$ est pair. Nous arrivons ainsi au résultat général suivant :

$$\lambda_i=0, \text{ si } k+a_i \text{ est impair},$$
$$\lambda_i=\pm 2, \text{ si } k+a_i \text{ est pair}.$$

5. Il reste à déterminer le signe des nombres d'incidence pour une orientation donnée des cellules, Considérons dans $[n]$ un simplexe de référence $P_0P_1, \ldots, P_kQ_0Q_1, \ldots, Q_{n-k-1}$, les coordonnées projectives correspondantes étant $x_0, x_1, \ldots, x_k, y_0, y_1, \ldots, y_{n-k-1}$. Représentons par $[M_0, M_1, \ldots, M_h]$ la variété plane déterminée par les points $M_0, M_1, \ldots, M_h$. Toute variété $[k]$ qui ne rencontre pas la variété $[Q_0Q_1, \ldots, Q_{n-k-1}]$ peut être définie par des équations de la forme

$$y_i=\omega_{ij}x_j \qquad \begin{pmatrix} i=0, 1, \ldots, n-k-1 \\ j=0, 1, \ldots, k \end{pmatrix}.$$

Les quantités ω_{ij} forment un système de coordonnées pour $[k]$. Considérons la variété de symbole $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ qui est définie par les $k+1$ variétés planes suivantes :

$$[a_0]=[P_0Q_0Q_1, \ldots, Q_{a_0-1}], \qquad [a_1]=[P_0P_1Q_0, \ldots, Q_{a_1-2}],$$

et d'une façon générale

$$[a_i] = [P_0 P_1, \ldots, P_i Q_0, \ldots, Q_{a_i-i-1}].$$

Chaque symbole $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ définit ainsi une variété bien définie de V. En ne considérant que les éléments $[k]$ qui peuvent être définis par les coordonnées ω_{ij}, les éléments de la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ correspondent à une matrice (ω) dans laquelle certains éléments sont identiquement nuls. Les éléments ω_{ij} qui ne sont pas identiquement nuls sont les m_j premiers éléments de la $j^{\text{ième}}$ colonne, où $j = 0, 1, \ldots, k$ et où l'on a posé $m_j = a_j - j$. Ceci montre en passant que la dimension de la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ est $\sum_{i=0}^{i=k} (a_i - i)$.

La variété

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k] - \sum_{i=0}^{i=k} [a_0, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k],$$

est de nouveau une cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$, qui est projectivement équivalente à la cellule de même symbole définie au paragraphe **1**. L'ensemble de ces cellules forme un complexe K′ qui subdivise la variété V. Le complexe K′ n'est pas projectivement équivalent au complexe K étudié dans les paragraphes précédents. Cependant il résulte du théorème du paragraphe **1** que le complexe K′ peut être déformé de façon que toute cellule de K′ soit déformée en la cellule de même symbole du complexe K. En effet, en reprenant les notations du paragraphe **1**, supposons que K'_p puisse être déformé en K_p, les chaînes définies par les cellules de K'_p étant déformées en les chaînes correspondantes de K_p. On peut alors trouver une déformation de K'_{p+1} qui entraîne la déformation précédente de K'_p en K_p [1]. Cette déformation effectuée, le complexe K'_{p+1} peut être déformé en un complexe recouvrant K_{p+1} de telle façon que les points de K_p restent fixes. Nous pouvons supposer que les simplexes d'une certaine subdivision de K'_{p+1} sont déformés ainsi en des simplexes d'une subdivision de K_{p+1}. Une cellule E'_{p+1} de K'_{p+1} est un cycle mod 2, qui est homologue au cycle mod 2 défini par la cellule correspondante de K_{p+1}. Nous

---

(1) *Voir* S. Lefschetz, *loc. cit.*, p. 80.

avons déformé la chaîne E'_{p+1} en une combinaison linéaire des cellules à $p+1$ dimensions de K_{p+1}. Comme ces dernières cellules sont des cycles mod 2 linéairement indépendants, la chaîne E'_{p+1} se trouve déformée en la cellule correspondante de K_{p+1}. Par induction on voit donc qu'il existe une déformation de K' qui déforme les cellules de K' en les cellules correspondantes de K. On peut donc orienter les cellules de K' et de K de façon que les nombres d'incidence correspondants soient égaux deux à deux.

On définit facilement une orientation pour chaque cellule de la subdivision K'. Dans le voisinage de l'élément $[k_0]$ défini par $(\omega)=0$, tout élément $[k]$ est défini par les coordonnées ω_{ij}, que nous nous représentons comme des coordonnées dans un espace euclidien. Soit O le point défini par $(\omega)=0$ et soit M_{ij} le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf ω_{ij} qui est égal à 1. La variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ correspond à une matrice (ω) dont les éléments non identiquement nuls définissent un système de coordonnées dans cette variété. Rangeons ces coordonnées dans un ordre linéaire en écrivant d'abord les m_0 éléments de la première colonne, puis les m_1 éléments de la deuxième colonne, etc. Écrivons dans le même ordre les points M_{ij} correspondant à ces coordonnées ω_{ij}. Soit σ_r le simplexe orienté dont les sommets sont le point O et les points M_{ij} appartenant à la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$, ces derniers points étant écrits suivant l'ordre indiqué. Le simplexe σ_r appartient à la cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^\star$ et définit une orientation de cette cellule. Définissons de la même façon l'orientation de chaque cellule de K'. Les sommets de σ_r moins le sommet $M_{m_i-1,i}$ définissent le simplexe orienté σ_{r-1} correspondant à la cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_i-1, \ldots, a_k]^\star$. Le nombre d'incidence de σ_r avec σ_{r-1} est égal à

$$(-1)^{m_0+m_1+\ldots+m_i} = (-1)^{a_0+a_1+\ldots+a_i-\frac{i(i+1)}{2}}.$$

Le nombre d'incidence entre les deux cellules correspondantes est donc égal à o ou à

$$2(-1)^{a_0+a_1+\ldots+a_i-\frac{i(i+1)}{2}}.$$

Pour une certaine orientation des cellules de K, le coefficient λ_i de la relation (1) a donc la valeur suivante :

$$\lambda_i = 0 \qquad (\text{si } k + a_i \text{ est impair}),$$
$$\lambda_i = 2.(-1)^{a_0+a_1+\ldots+a_i-\frac{i(i+1)}{2}} \qquad (\text{si } k + a_i \text{ est pair}).$$

6. Appliquons les résultats précédents à la variété des droites de l'espace projectif $[n]$. Cette variété est orientable ou non orientable suivant que n est impair ou pair. Les variétés $[p, q]$ forment les bases minima pour l'homologie mod 2. Les relations d'incidence sont

$$[2p, 2q]^* \to 0, \qquad [2p, 2p+1]^* \to 0,$$
$$[2p, 2q+1]^* \to 2[2p, 2q]^*, \qquad [2p+1, 2q]^* \to -2[2p, 2q]^*,$$
$$[2p+1, 2q+1]^* \to -2[2p, 2q+1]^* - 2[2p+1, 2q]^*.$$

Tout cycle Γ_{2s-1} est homologue à une combinaison linéaire des cycles $[2p, 2q]$, où $p+q=s$. Tout cycle Γ_{2s} est homologue à une combinaison linéaire des cycles $[2p, 2q+1]^* + [2p+1, 2q]^*$, où $p+q=s$, et du cycle $[2r, 2r+1]$, si $s=2r$. Les cycles

$$[2p, 2q] \quad \text{et} \quad [2p, 2q+1]^* + [2p+1, 2q]^*$$

forment les bases minima des groupes de torsion. Tout cycle d'ordre fini qui n'est pas homologue à 0 est d'ordre 2. Tous les coefficients de torsion sont égaux à 2. Le cycle $[2r, 2r+1]$ forme la base du groupe de Betti pour la dimension $4r$. Les nombres de Betti relatifs aux dimensions $4r$ sont égaux à 1 ; les autres sont nuls.

7. Des relations d'incidence (1) on déduit de même les bases d'homologie de la variété V engendrée par les variétés $[k]$ de $[n]$. Appelons $F[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$ le cycle défini par

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k]^* \to 2F[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*.$$

Soit Γ_p un cycle défini par une combinaison linéaire de cellules de K. Enlevons de Γ_p les cellules qui sont elles-mêmes des cycles, et soit Γ'_p le cycle qui reste. Il sera commode de dire que la cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$ est de rang inférieur à la cellule $[b_0, b_1, \ldots, b_k]^*$ lorsque $a_i < b_i$, l'indice i étant le plus petit indice tel que $a_i \neq b_i$. Considérons parmi les cellules qui figurent dans Γ'_p la cellule de rang minimum; soit $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$ cette cellule. Soit $[a_0, a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]^*$ la cellule de rang minimum qui figure dans $F[a_0, a_1, \ldots, a_k]^\star$. Pour que cette cellule s'élimine dans la chaîne-frontière de Γ'_p, il faut que Γ'_p contienne également une cellule de symbole $[a_0, \ldots, a_h+1, \ldots, a_i-1, \ldots, a_k]^\star$, où $h < i$ et où $k + a_h$ est impair. Si l'on retranche de Γ'_p un multiple convenable du cycle $F[a_0, \ldots, a_h+1, \ldots, a_i, \ldots, a_k]^\star$, on obtient un cycle Γ''_p qui ne contient plus que des cellules de rang supérieur à $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^\star$. On peut recommencer le même raisonnement sur le cycle Γ''_p et l'on voit finalement que Γ'_p est une combinaison linéaire de cellules de forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$. Une cellule qui définit à elle seule un cycle ou bien est de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$ ou bien ne figure dans aucun cycle de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$. Soit $[c_0, c_1, \ldots, c_k]^\star$ une cellule de cette dernière espèce. Alors le symbole qu'on obtient en remplaçant c_i par $c_i + 1$ n'a pas de sens lorsque $k + c_i$ est impair, et le symbole qu'on obtient en remplaçant c_j par $c_j - 1$ n'a pas de sens lorsque $k + c_j$ est pair. Tout cycle Γ_p est une combinaison linéaire des cellules de cette espèce et des cycles de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$. Les cycles de même espèce que $[c_0, c_1, \ldots, c_k]^\star$ sont linéairement indépendants, puisqu'ils ne figurent dans aucun cycle de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$. Comme tout cycle de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$ est d'ordre 2, on a le

THÉORÈME. — *Les cycles à p dimensions de même espèce que* $[c_0, c_1, \ldots, c_k]^\star$ *forment une base minima du groupe de Betti relatif à la dimension p. Les cycles à p dimensions de la forme* $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$ *forment une base du groupe de torsion relatif à la dimension p. Tous les coefficients de torsion sont égaux à 2.*

Les cycles à p dimensions de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$ ne sont pas en général des combinaisons linéaires indépendantes des cellules à p dimensions. Soit η_p la matrice des coefficients correspondant à l'ensemble de ces cycles. Les diviseurs élémentaires de η_p qui sont différents de 0 sont égaux à 1. Soit ρ_p le rang de η_p. Comme le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre ρ_p est égal à 1, au moins un de ces mineurs est impair. Supposons que ce soit le mineur formé par les ρ_p premières lignes et les ρ_p premières colonnes de η_p. Les ρ_p premiers cycles de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]$ forment alors une base minima du groupe de torsion relatif à la dimension p.

II. — Variétés engendrées par des éléments composés $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$.

8. Le symbole $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ représente une figure formée par $k+1$ variétés planes $[p_0]$, $[p_1]$, $\ldots$, $[p_k]$, telles que

$$p_0 < p_1 < \ldots < p_k; \qquad [p_0] \subset [p_1] \subset \ldots [p_k].$$

Une telle figure sera l'élément générateur des variétés que nous allons considérer. Comme exemple le plus simple nous avons la variété des éléments linéaires de $[n]$, un élément linéaire étant une figure désignée par $\{0, 1\}$. Nous nous proposons d'étudier la variété de tous les éléments $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ de $[n]$. Le raisonnement fait dans *Topologie d'espaces homogènes*, § 18-20, à propos des variétés complexes analogues s'applique aussi bien dans le cas actuel et fournit immédiatement une subdivision en cellules. Considérons d'abord les variétés engendrées par des éléments $\{p, q\}$.

Soit V la variété de tous les éléments $\{p, q\}$ de $[n]$. Considérons le symbole suivant :

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} a_0, a_1, \ldots, a_p \\ b_0, b_1, \ldots\ldots, b_q \end{bmatrix},$$

où

$$0 \leqq a_0 < a_1 < \ldots < a_p \leqq n, \qquad 0 \leqq b_0 < b_1 < \ldots < b_q \leqq n,$$

et où tout nombre a_i est égal à un nombre $b_{i'}$ tel que $i' \geqq i$. Le symbole (4) représente la variété A engendrée par les éléments $\{p, q\}$ qui se composent d'un élément p de la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_p]$ et d'un élément $[q]$ de la variété $[b_0, b_1, \ldots, b_q]$, ces deux dernières variétés étant définies par rapport à la suite (S) du paragraphe **1**. En remplaçant dans (4) le nombre a_i par $b_{i'-1}$, l'indice i' étant tel que $a_i = b_{i'}$, on obtient le symbole d'une variété A_i. Soit b_j un nombre de la deuxième ligne de (4) qui ne figure pas dans la première. Si $b_j - 1 > b_{j-1}$, on obtient le symbole d'une variété A'_j en remplaçant b_j par $b_j - 1$. D'une façon générale, soit h le plus petit indice inférieur à j tel que les nombres $b_h, b_{h+1}, \ldots, b_j$ soient des nombres consécutifs et figurent à l'exception de b_j dans la première ligne du symbole (4). En diminuant d'une unité tous les nombres $b_h, b_{h+1}, \ldots, b_j$, on obtient le symbole d'une variété désignée par A'_j. En remplaçant deux nombres a_i et $b_{i'}$, tels que $a_i = b_{i'}$, par $a_i - 1$ et $b_{i'} - 1$, on obtient le symbole d'une variété A''_i. Nous convenons toujours de remplacer par zéro tout symbole qui n'a pas de sens. Rappelons que la dimension de A est

$$\sum (a_i - i) + \sum (b_j - j),$$

où j ne prend que des valeurs telles que b_j ne figure pas dans la première ligne du symbole (4). La dimension de A_i, A'_j ou A''_i est inférieure d'une unité à celle de A. La variété A devient une cellule A^* lorsqu'on en retranche toutes les variétés A_i, A'_j et A''_i. L'ensemble des cellules A^* forme un complexe K qui subdivise la variété V.

Avec les notations du paragraphe **1**, on a le théorème :

On peut déformer tout complexe C_p *ou toute chaîne* Γ_p *sur* V *en un complexe ou une chaîne sur* K_p.

Le groupe de Poincaré de V s'en déduit très simplement. D'après le paragraphe **1**, c'est en effet le groupe de Poincaré du complexe K_2. Le complexe K_0 se réduit à un seul élément. Le complexe K_1 est formé par deux courbes fermées a et b de symboles

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p \\ 0, 1, \ldots\ldots, q-1, q+1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-1, p+1 \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, q \end{bmatrix}.$$

Ces deux courbes a et b définissent des éléments générateurs du groupe de Poincaré. Chaque cellule à deux dimensions de K_2 fournit une relation entre ces éléments, et l'on obtient ainsi toutes les relations.

Supposons $q > p + 1$. Écrivons les relations correspondant aux différentes cellules de K_2 :

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-1, p+2 \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, q \end{bmatrix}^* \qquad\qquad b^2 = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-2, p, p+1 \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, q \end{bmatrix}^* \quad (\text{si } p > 0) \qquad b^2 = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p, \\ 0, 1, \ldots\ldots, q-1, q+2 \end{bmatrix}^* \quad (\text{si } n > q+1) \qquad a^2 = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p \\ 0, 1. \ldots\ldots, q-2, q, q+1 \end{bmatrix}^* \qquad\qquad a^2 = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-1, p+1 \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, q-1, q+1 \end{bmatrix}^* \qquad\qquad ab = ba.$$

Le groupe de Poincaré est donc le produit direct de deux groupes d'ordre 2.

Supposons $q=p+1$. On a alors les cellules et les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-2, p, p+1 & \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, p, p+1 \end{bmatrix}^* \quad (\text{si } p>0) \qquad b^2=1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p, & \\ 0, 1, \ldots, p, p+3 \end{bmatrix}^* \quad (\text{si } n>p+2) \qquad a^2=1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-1, p+2 & \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, p, p+2 \end{bmatrix}^* \qquad bab=a;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-1, p+1 & \\ 0, 1, \ldots, p-1, p+1, p+2 \end{bmatrix}^* \qquad aba=b.$$

Pour trouver ces deux dernières relations, il faut remarquer que les deux dernières cellules sont homéomorphes respectivement à $\begin{bmatrix} 2 & \\ 0, & 2 \end{bmatrix}^*$ et à $\begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 2 \end{bmatrix}^*$, les courbes a et b correspondant respectivement à $\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 2 \end{bmatrix}^*$ et à $\begin{bmatrix} 1 & \\ 0, & 1 \end{bmatrix}^*$. On voit alors facilement que le bord de la cellule $\begin{bmatrix} 2 & \\ 0, & 2 \end{bmatrix}^*$, par exemple, est $baba^{-1}$. Le groupe de Poincaré est encore le produit direct de deux groupes d'ordre 2, sauf dans le cas de la variété des éléments linéaires du plan projectif. Dans ce dernier cas, le groupe de Poincaré, G, est défini par les relations

$$bab=a, \qquad aba=b.$$

On en déduit

$$c=aba^{-1}b^{-1}=bab^{-1}a^{-1}=a^2=a^{-2}=b^2=b^{-2}.$$

L'élément c engendre un sous-groupe, C, d'ordre 2, qui est le groupe commutateur de G. Le groupe G/C est de nouveau le produit direct de deux groupes d'ordre 2. Donc G est un groupe d'ordre 8. On peut identifier ce groupe avec le groupe quaternionien [1].

---

(1) La détermination du groupe G a été faite par plusieurs auteurs. Voir *Jahresb. deutsch. Math. Ver.*, **42**, 9-12 Heft, 1933, p. 112-117.

9. Les relations d'incidence du complexe K sont de la forme

$$A^* \to \sum_i \lambda_i A_i^* + \sum \lambda'_j A'^*_j + \sum_i \lambda''_i A''^*_i.$$

Les nombres d'incidence λ_i, λ_j, λ''_i sont donnés par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans la relation d'incidence*

$$A^* \to \sum_i \lambda_i A_i^* + \sum \lambda'_j A'^*_j + \sum_i \lambda''_i A''^*_i,$$

on a

$$\lambda_i = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_i = \pm 2,$$

suivant que $p + i'$ est impair ou pair,

$$\lambda'_j = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_j = \pm 2,$$

suivant que $b_j - \varphi(b_j) + q - p - 1$ est impair ou pair,

$$\lambda''_i = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda''_i = \pm 2,$$

suivant que $b_{i'} - i' + q - i$ est impair ou pair.

Le nombre i' désigne l'entier tel que $a_i = b_{i'}$ et $\varphi(b_j)$ désigne le nombre des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_p$ qui sont inférieurs à b_j.

Je ne reproduis pas la démonstration de ce théorème, car elle est assez longue et elle ne s'appuie que sur des raisonnements analogues à ceux du paragraphe **4**.

10. Les bases d'homologie sur V peuvent se déduire des relations d'incidence du complexe K. Tout cycle sur V est, en effet, homologue à un sous-cycle de K, c'est-à-dire à une combinaison linéaire des cellules de K, et tout sous-cycle de K qui est homologue à o est le cycle-frontière d'une sous-chaîne de K. Ceci s'applique également aux cycles (mod 2) et à l'homologie (mod 2). Nous allons donc considérer seulement des sous-cycles de K. En particulier toute cellule A^* est un cycle (mod 2); on a par suite le théorème suivant :

Les variétés A *représentées par les symboles* (4) *définissent des cycles* (*mod* 2) *qui forment les bases minima des groupes d'homologie* (*mod* 2).

Relativement aux nombres d'intersections des cycles (mod 2) de dimensions complémentaires on montre, comme dans *Topologie d'espaces homogènes*, paragraphe 19, que

$$\begin{bmatrix} a_0, a_1, \ldots, a_p \\ b_0, b_1, \ldots\ldots, b_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n-a_p, \ldots, n-a_1, n-a_0 \\ n-b_q, \ldots\ldots\ldots\ldots, n-b_1, n-b_0 \end{bmatrix} = 1 \pmod 2,$$

tandis que pour deux cycles de base dont les symboles ne se correspondent pas de cette façon le nombre d'intersection est nul.

11. Le théorème du paragraphe 9 ne détermine pas complètement les relations d'incidence et ne suffit donc pas pour déterminer les bases d'homologie du complexe K. Il est facile d'étudier complètement le cas où V est la variété des éléments $\{0, q\}$ de $[n]$. J'indique les résultats sans donner explicitement les démonstrations. Soit A^* la cellule définie par

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0, b_1, \ldots, b_q \end{bmatrix}^*$$

et soit $F(A^*)$ le cycle défini par $A^* \to 2F(A^*)$. En s'appuyant sur le théorème du paragraphe 9, on démontre la propriété suivante :

Tout cycle qui est une combinaison linéaire des cellules figurant dans $F(A^*)$ *est un multiple de* $F(A^*)$, *à moins que* $F(A^*)$ *ne soit la somme de deux cellules définissant chacune un cycle.*

Dans le cas où $F(A^*)$ est la somme de deux cellules définissant chacune un cycle, on a

$$F(A^*) = \pm A_0^* \pm A_{h+1}'^*, \tag{5}$$

où

$$a_0 = b_h, \qquad b_{h+1} = b_h + 1.$$

L'ensemble des relations de la forme (5) se partage en groupes de relations de la forme

$$\left\{\begin{array}{lll} F({}^1A^*) = \pm {}^1A_0^* \pm {}^1A_{h+1}'^*, & & \\ F({}^2A^*) = & \pm {}^2A_0^* \pm {}^2A_{h+3}'^*, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ F({}^rA^*) = & & \pm {}^rA_0^* \pm {}^rA_{h+2r-1}'^*, \end{array}\right. \tag{6}$$

où les symboles qui figurent dans une même colonne représentent la même cellule. Il en résulte qu'avec un choix convenable de l'orientation des cellules tous les coefficients dans les relations de la forme (5) sont égaux à $+1$.

Ce qui précède permet de déterminer les nombres d'incidence du complexe K_{s+1} lorsqu'on connaît les nombres d'incidence du complexe K_s. Nous écrirons d'abord les relations

$$F(A^*) = A_0^* + A_{n+1}'^*,$$

où A^* est une cellule de dimension $s+1$ telle que A_0^* et $A_{n+1}'^*$ soient des cycles. Soit ensuite C^* une cellule de dimension $s+1$ qui n'est pas de cette espèce. Si C^* n'est pas un cycle, $F(C^*)$ est déterminé au signe près par la condition $F(C^*) \rightarrow 0$. En choisissant un signe quelconque, on fixe l'orientation de la cellule C^*. Par récurrence on détermine ainsi tous les nombres d'incidence du complexe K.

Par une méthode analogue à celle du paragraphe 7, on montre que tout sous-cycle de K est une combinaison linéaire des cycles des trois espèces suivantes :

1° *Les cycles de la forme* $F(A^*)$;

2° *Les cycles qui sont définis par une seule cellule, mais qui ne sont pas de la forme* $F(A^*)$;

3° *Les cycles de la forme* $A^* \pm C^*$, *où*

$$A^* = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ a_0, & a_0+1, & b_2, & \ldots, & b_q \end{bmatrix}^*,$$

$$C^* = \begin{bmatrix} b_2 & & & & \\ a_0-1, & a_0, & b_2, & \ldots, & b_q \end{bmatrix}^*,$$

$$F(A^*) = \pm F(C^*) = \pm \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ a_0-1, & a_0, & b_2, & \ldots, & b_q \end{bmatrix}^*.$$

Considérons tous les cycles $F(A^*)$, où A^* est une cellule quelconque de dimension $s+1$. Soit η_s la matrice des coefficients dans les formes linéaires $F(A^*)$ et soit ρ_s le rang de η_s. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une base minima du groupe de torsion relatif à la dimension s est formée par* ρ_s *cycles de la forme* $F(A^*)$. *Tous les coeffi-*

cients de torsion sont égaux à 2. Une base minima du groupe de Betti relatif à la dimension s est formée par un certain nombre de cycles de seconde espèce et par les cycles de troisième espèce de dimensions s.

12. Appliquons les résultats précédents à la variété des éléments linéaires de $[n]$. Cette variété a pour symbole $\begin{bmatrix} n \\ n-1, n \end{bmatrix}$. La subdivision en cellules est obtenue à l'aide des variétés

$$\begin{bmatrix} p \\ p, q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} q \\ p, q \end{bmatrix},$$

qui forment aussi les bases minima des groupes d'homologie mod 2. Les relations d'incidence qui définissent le complexe K sont

$$\begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q \end{bmatrix}^* \to 0, \qquad \begin{bmatrix} 2q+1 \\ 2p+1, 2q+1 \end{bmatrix}^* \to 0, \qquad \begin{bmatrix} 2q \\ 2q-1, 2q \end{bmatrix}^* \to 0,$$

$$\begin{bmatrix} 2q+1 \\ 0, 2q+1 \end{bmatrix}^* \to 0, \qquad \begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q+1 \end{bmatrix}^* \to 2\begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q \end{bmatrix}^*,$$

$$\begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2p+1 \end{bmatrix}^* \to 2\begin{bmatrix} 2p \\ 2p-1, 2p \end{bmatrix}^*, \qquad \begin{bmatrix} 2p+1, \\ 2p+1, 2q \end{bmatrix}^* \to 2\begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q \end{bmatrix}^*,$$

$$\begin{bmatrix} 2p+1 \\ 2p+1, 2q+1 \end{bmatrix}^* \to 2\begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q+1 \end{bmatrix}^* - 2\begin{bmatrix} 2p+1 \\ 2p+1, 2q \end{bmatrix}^*,$$

$$\begin{bmatrix} 2q-1 \\ 2p, 2q-1 \end{bmatrix}^* \to 2\begin{bmatrix} 2q-1 \\ 2p-1, 2q-1 \end{bmatrix}^*,$$

$$\begin{bmatrix} 2q \\ 2p-1, 2q \end{bmatrix}^* \to 2\begin{bmatrix} 2q-1 \\ 2p-1, 2q-1 \end{bmatrix}^*,$$

$$\begin{bmatrix} 2q \\ 2p, 2q \end{bmatrix}^* \to 2\begin{bmatrix} 2q-1 \\ 2p, 2q-1 \end{bmatrix}^* - 2\begin{bmatrix} 2q \\ 2p-1, 2q \end{bmatrix}^*.$$

La variété $\begin{bmatrix} n \\ n-1, n \end{bmatrix}$ est orientable ou non orientable suivant que n est pair ou impair. Les seuls cycles de base des groupes de Betti sont les cycles $\begin{bmatrix} 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} n \\ n-1, n \end{bmatrix}$, si n est pair, et les cycles $\begin{bmatrix} 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} n \\ 0, n \end{bmatrix}$, si n est impair. Les bases minima des groupes de torsion sont formées par les cycles suivants :

$$\begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2q+1 \\ 2p+1, 2q+1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2q \\ 2q-1, 2q \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2q+1 \\ 0, 2q+1 \end{bmatrix}, \qquad \left(\text{sauf} \begin{bmatrix} n \\ 0, n \end{bmatrix}\right)$$

et

$$\begin{bmatrix} 2p & \\ 2p, & 2q+1 \end{bmatrix}^* - \begin{bmatrix} 2p+1 & \\ 2p+1, & 2q \end{bmatrix}^*, \qquad \begin{bmatrix} 2q-1 & \\ 2p, & 2q-1 \end{bmatrix}^* - \begin{bmatrix} 2q & \\ 2p-1, & 2q \end{bmatrix}^*.$$

Dans le tableau suivant, que l'on prolongerait facilement, les symboles de la $(s+1)^{\text{ième}}$ ligne représentent les cellules de dimensions s; les symboles qui ne sont pas marqués d'une astérisque définissent des cycles; de même deux symboles reliés par un trait définissent deux cellules dont la différence est un cycle; on a ainsi tous les cycles de base.

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l}
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 1 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 2 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 1 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 3 \end{bmatrix}^* - \begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 2 \end{bmatrix}^* \; \begin{bmatrix} 2 & \\ 0, & 2 \end{bmatrix}^*, \\
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 4 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 3 \end{bmatrix}^* \; \begin{bmatrix} 2 & \\ 1, & 2 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 3 & \\ 0, & 3 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 5 \end{bmatrix}^* - \begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 4 \end{bmatrix}^* \; \begin{bmatrix} 2 & \\ 2, & 3 \end{bmatrix}^* \; \begin{bmatrix} 3 & \\ 1, & 3 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 4 & \\ 0, & 4 \end{bmatrix}^*, \\
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 6 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 5 \end{bmatrix}^* \; \begin{bmatrix} 2 & \\ 2, & 4 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 3 & \\ 2, & 3 \end{bmatrix}^* - \begin{bmatrix} 4 & \\ 1, & 4 \end{bmatrix}^* \; \begin{bmatrix} 5 & \\ 0, & 5 \end{bmatrix}.
\end{array} \right.$$

13. Connaissant la topologie de la variété des éléments linéaires de l'espace projectif $[n]$, nous pouvons étudier la question suivante : pour quelles valeurs de n peut-on définir un parallélisme absolu dans l'espace $[n]$? Étant donné l'espace $[3]$, on peut y introduire une métrique pour en faire un espace elliptique à trois dimensions. Le parallélisme de Clifford, de première espèce par exemple, jouit alors de la propriété suivante : par un point donné M il passe une parallèle et une seule à une droite donnée. On peut définir un parallélisme satisfaisant à la même condition dans l'espace elliptique à 7 dimensions; cet espace admet même deux familles continues de parallélismes de ce genre (¹). D'une façon générale, nous appelons parallélisme absolu

(¹) *Voir* F. Vaney, *Le parallélisme absolu dans les espaces elliptiques réels à* 3 *et à* 7 *dimensions et le principe de trialité dans l'espace elliptique à* 7 *dimensions* (*Thèse*, Paris, Gauthier-Villars, 1929).

dans l'espace projectif $[n]$ une correspondance entre les éléments linéaires de $[n]$ qui satisfait aux conditions suivantes : 1° à tout élément linéaire défini par un point M et une droite Δ correspond, quel que soit M', un élément linéaire *parallèle* défini par M' et une droite Δ'; 2° les points M et M' étant donnés, la correspondance entre Δ et Δ' est biunivoque et réciproque; 3° deux éléments linéaires qui sont parallèles à un troisième élément linéaire sont parallèles entre eux; 4° si Δ et M' varient d'une façon continue, Δ' varie d'une façon continue. On peut définir de la même façon le parallélisme absolu dans une variété dérivable quelconque, car à une telle variété correspond une variété d'éléments linéaires bien définie (1).

Pour qu'on puisse définir dans $[n]$ un parallélisme absolu, il faut évidemment que la variété des éléments linéaires de $[n]$ soit le produit topologique de $[n]$ par une variété $[n-1]'$; mais nous ignorons si cette condition est suffisante. Le produit topologique de $[n]$ par $[n-1]'$ est toujours non orientable. Si n est pair, on ne peut donc pas définir un parallélisme absolu dans $[n]$, car la variété $\begin{bmatrix} n \\ n-1, n \end{bmatrix}$ est orientable. Si n est impair, la variété $\begin{bmatrix} n \\ n-1, n \end{bmatrix}$ a les mêmes invariants d'homologie et le même groupe de Poincaré que le produit topologique de $[n]$ par $[n-1]'$. En effet, considérons dans $[n]$ une suite de variétés planes

$$[n] \supset [n-1] \supset [n-2] \supset \ldots \supset [0].$$

Considérons de même dans $[n-1]'$ une suite de variétés planes

$$[n-1]' \supset [n-2]' \supset [n-3]' \supset \ldots \supset [0]'.$$

Désignons par $[p.q]$ le produit topologique de $[p]$ par $[q]'$. La variété $[n.n-1]$ est subdivisée en cellules par l'ensemble des variétés $[p.q]$; à la variété $[p.q]$ correspond la cellule

$$[p.q]^* = [p.q] - [p-1.q] - [p.q-1].$$

(1) *Sur la notion de parallélisme absolu, voir* E. Cartan, *Notice historique sur la notion de parallélisme absolu* (*Math. Ann.*, 102, 5, p. 698-706). La définition de M. E. Cartan fait intervenir la notion de vecteurs infiniment petits équipollents et ne coïncide donc pas avec la définition donnée ci-dessus.

Les variétés $[p.q]$ forment les bases d'homologie (mod 2). On a un tableau analogue au tableau (7)

$$\begin{array}{llllll}
[0.0], & & & & & \\
[0.1] & [1.0], & & & & \\
[0.2]^* & [1.1] & [2.0]^*, & & & \\
[0.3] & [1.2]^* - [2.1]^* & & [3.0], & & \\
[0.4]^* & [1.3] & [2.2]^* & [3.1] & [4.0]^*, & \\
[0.5] & [1.4]^* - [2.3]^* & & [3.2]^* - [4.1]^* & & [5.0]. \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Tout symbole qui n'est pas marqué d'une astérisque correspond à un cycle orienté; il en est de même de la différence de deux cellules dont les symboles sont reliés par un trait. Les bases d'homologie sont formées par l'ensemble de ces cycles. On vérifie alors facilement que les variétés $\begin{bmatrix} n & \\ n-1, & n \end{bmatrix}$ et $[n.n-1]$ ne se distinguent pas par leurs groupes d'homologie, lorsque n est impair. De plus le groupe de Poincaré est pour les deux variétés le produit direct de deux groupes d'ordre 2, si $n > 2$.

On est amené alors à rechercher si les deux variétés se distinguent par les invariants d'intersection relatifs aux cycles (mod 2).

Supposons $n = 2q+1$ et considérons dans la variété $\begin{bmatrix} n & \\ n-1, & n \end{bmatrix}$ les cycles (mod 2) de dimension $2q+1$. Désignons par $C_1, C_2, \ldots, C_{2q+1}$ les cycles de base (mod 2) dont les symboles sont

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 2q+1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & \\ 2, & 2q \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{bmatrix} q & \\ q, & q+1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} q+1 & \\ & q, \; q+1 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{bmatrix} 2q & \\ & 1, \; 2q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2q+1 & \\ & 0, \; 2q+1 \end{bmatrix}.$$

Désignons de même par a et b les cycles de symboles $\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$. Considérons la matrice (T) dont les éléments sont les cycles d'intersection (mod 2) de la forme $C_i . C_j$. On a

$$C_i . C_j = \mu_{ij}^1 a + \mu_{ij}^1 b.$$

Étant donnés C_i et C_j, on peut par une transformation projective de $[n]$ amener C_j en une position générale par rapport à C_i. On voit alors que $C_i.C_j = 0$, si $i+j < 2q+1$. Supposons

$$C_i = \begin{bmatrix} i \\ i,\ 2q+2-i \end{bmatrix}, \qquad C_j = \begin{bmatrix} j \\ 2q+1-j,\ j \end{bmatrix} \qquad (i+j \geqq 2q+1).$$

Pour qu'il y ait un élément linéaire commun à C_i et à C_j, il faut avoir

$$2q+2-i+2q+1-j \geqq 2q+1; \qquad \text{d'où} \qquad i+j \geqq 2q+2.$$

Supposons de même

$$C_i = \begin{bmatrix} i \\ 2q+1-i,\ i \end{bmatrix}, \qquad C_j = \begin{bmatrix} j \\ 2q+1-j,\ j \end{bmatrix} \qquad (i, j \geqq q+1).$$

$C_i.C_j$ est nul, sauf si l'on a

$$2q+1-i+j \geqq 2q+1, \qquad 2q+1-j+i \geqq 2q+1,$$

c'est-à-dire si l'on a $i=j$. Le cycle $C_i.C_j$ ne sera pas nul dans les cas suivants :

$$C_i = \begin{bmatrix} i \\ i,\ 2q+2-i \end{bmatrix}, \quad C_j = C_{2q+1-i} = \begin{bmatrix} 2q+1-i \\ i,\ 2q+1-i \end{bmatrix} \quad (i \leqq q);$$

$$C_i = \begin{bmatrix} i \\ i,\ 2q+2-i \end{bmatrix}, \quad C_j = C_{2q+2-i} = \begin{bmatrix} 2q+2-i \\ i-1,\ 2q+2-i \end{bmatrix} \quad (i \leqq q);$$

$$C_i = \begin{bmatrix} i \\ 2q+1-i,\ i \end{bmatrix}, \quad C_j = C_i \quad (i \geqq q+1).$$

A ces trois cas correspondent les cycles d'intersection suivants :

$$\begin{aligned} &C_i.C_j = a && \text{si } i+j = 2q+1 \\ &C_i.C_j = a+b && \text{si } i+j = 2q+2 \qquad (i \neq q+1), \\ &C_i.C_i = b && \text{si } i \geqq q+1. \end{aligned}$$

Dans tous les autres cas on a

$$C_i.C_j = 0.$$

En ce qui concerne le deuxième cas, qui est le cas le moins simple, nous remarquons que les éléments linéaires communs à C_i et à C_j sont définis chacun par un point arbitraire d'une droite fixe et par une droite qui passe par un point fixe. Le cycle d'intersection a donc un élément commun avec chacun des cycles

$$\begin{bmatrix} 2q+1 \\ 2q-1,\ 2q+1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 2q \\ 2q,\ 2q+1 \end{bmatrix};$$

d'où il résulte bien $C_i.C_j = a + b$.

Considérons de même dans la variété $[2q+1.2q]$ les cycles mod 2 de dimension $2q+1$:

$$[1.2q],\quad [2.2q-1],\quad \ldots,\quad [2q+1.0];$$

nous les désignons respectivement par C'_1, C'_2, ..., C'_{2q+1}, et nous désignons par a' et b' les cycles $[0.1]$ et $[1.0]$. Nous considérons de même la matrice (T′) dont les éléments sont les cycles d'intersection de la forme $C'_i.C'_j$. On montre facilement que

$$\begin{array}{lll} C'_i.C'_j = a' & \text{si} & i+j = 2q+1, \\ C'_i.C'_j = b' & \text{si} & i+j = 2q+2, \\ C'_j.C'_j = 0 & \text{si} & i+j \neq 2q+1, \qquad i+j \neq 2q+2. \end{array}$$

Pour que les variétés

$$\begin{bmatrix} 2q+1 \\ 2q,\ 2q+1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [2q+1.2q]$$

soient homéomorphes, il faut que l'on puisse transformer (T) en (T′) en effectuant sur les éléments de base C_1, C_2, ..., C_{2q+1} ainsi que sur les éléments de base a et b des substitutions linéaires dont les coefficients sont 0 ou 1 et dont les déterminants sont égaux à 1 mod 2.

Si l'espace $[2q+1]$ admet un parallélisme absolu, il y a des substitutions de forme plus particulière qui transforment la matrice (T) en (T′). En effet, supposons que l'on connaisse un parallélisme absolu dans $[2q+1]$. La variété des éléments linéaires dont chacun est défini par un point fixe O et par une droite passant par O peut être considérée comme une variété $[2q]'$. Les éléments linéaires définis chacun par le point O et par une droite qui appartient à une variété plane $[r+1]$ engendrent une variété qu'on peut considérer comme une variété plane $[r]'$ de $[2q]'$. Considérons alors dans $[2q]'$ une suite de variétés planes

$$[2q]',\quad [2q-1]',\quad [2q-2]',\quad \ldots,\quad [0]'.$$

Considérons de même dans $[2q+1]$ une suite analogue

$$[2q+1],\quad [2q],\quad \ldots,\quad [0].$$

Étant donné un élément linéaire défini par un point M et par une droite passant par M, supposons que M soit un point quelconque de $[p]$ et que l'élément linéaire soit parallèle à un élément linéaire quelconque de la variété $[r]'$. Les éléments linéaires qui satisfont à ces conditions engendrent une variété que nous désignons par $[p.r]$. Appelons a', b', $C'_1, \ldots, C'_{2q+1}$ les cycles (mod 2) qui correspondent respectivement à

$$[0.1],\quad [1.0],\quad [1.2q],\quad [2.2q-1],\quad \ldots,\quad [2q+1.0\;]$$

La matrice dont les éléments sont les cycles d'intersection (mod 2) de la forme $C'_i.C'_j$ est précisément la matrice (T′) déjà considérée. On a les homologies suivantes :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
a' &\sim a,\\
b' &\sim \lambda a + b,\\
C'_1 &\sim C_1,\\
C'_2 &\sim \lambda_{21}C_1 + C_2,\\
C'_3 &\sim \lambda_{31}C_1 + \lambda_{32}C_2 + C_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
C'_{2q+1} &\sim \lambda_{2q+1.1}C_1 + \ldots + \lambda_{2q+1,2q}C_{2q} + C_{2q+1}\\
&\qquad (\mathrm{mod}\, 2).
\end{aligned}\right.$$

Pour démontrer ces homologies, il faut remarquer que le cycle de symbole $[0.r]$ reste, d'après la définition du parallélisme absolu, homotope à lui-même, lorsqu'on déplace le point $[0]$. Or quand le point $[0]$ est confondu avec le point O, le cycle de symbole $[0.\ r]$ est confondu avec un cycle de symbole $\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & r+1 \end{bmatrix}$. Donc

$$[0.r] \sim \begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & r+1 \end{bmatrix}.$$

La deuxième homologie de (12) s'obtient alors en cherchant les nombres d'intersection (mod2) de b avec $\begin{bmatrix} 2q+1 & \\ 2q-1, & 2q+1 \end{bmatrix}$ et avec $\begin{bmatrix} 2q & \\ 2q, & 2q+1 \end{bmatrix}$. Le coefficient λ_{ij} est le nombre d'intersection mod2 de C'_i avec le $j^{\text{ième}}$ cycle de la suite :

$$\begin{bmatrix} 2q & \\ 0, & 2q \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2q-1 & \\ 1, & 2q-1 \end{bmatrix}, \quad \ldots,$$
$$\begin{bmatrix} q & \\ q, & q+1 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{bmatrix} 0, & \\ 0, & 2q+1 \end{bmatrix}.$$

Il en résulte bien $\lambda_{ii} = 1$ et $\lambda_{ij} = 0$, si $j > i$. S'il existe un parallélisme absolu dans $[2q+1]$, on doit pouvoir déterminer les coefficients λ et λ_{ij} de façon que les relations (8) définissent une substitution qui transforme (T) en (T′).

Supposons d'abord que l'on puisse avoir $\lambda = 1$. Considérons les équations

$$C'_1 . C'_{2q+1} = a + b = a + b + \lambda_{2q+1,2q}\, a \qquad (\text{mod}\, 2);$$

d'où

$$\lambda_{2q+1,2q} = 0,$$
$$C'_2 . C'_{2q+1} = 0 = \lambda_{21}(a+b) + \lambda_{2q+1,2q-1}\, a \qquad (\text{mod}\, 2);$$

d'où

$$\lambda_{21} = \lambda_{2q+1,2q-1} = 0.$$

La résolution successive des équations

$$C'_i . C'_{2q+1} = 0 \qquad (i = 3, 4, \ldots, q)$$

donne $\lambda_{i1} = 0$ pour $i \leqq q$, et $\lambda_{2q+1,j} = 0$, pour $j \geqq q+1$. On a alors l'équation

$$C'_{2q+1} . C'_{2q+1} = 0 = b \qquad (\text{mod}\, 2);$$

qui est impossible. Il en résulte que l'on a forcément $\lambda = 0$. Étudions d'abord le cas $n = 5$. On a les équations suivantes :

$$C'_1 . C'_5 = b = a + b + \lambda_{54}\, a \qquad (\text{mod}\, 2);$$

d'où $\lambda_{54} = 1$.

$$C'_2 . C'_5 = 0 = \lambda_{21}(a + b + a) + a + b + \lambda_{53}\, a \qquad (\text{mod}\, 2);$$

d'où $\lambda_{53} = 1$. On arrive ensuite à une équation impossible :

$$C'_5 . C'_5 = 0 = b \qquad (\text{mod}\, 2).$$

Donc on ne peut pas définir un parallélisme absolu dans l'espace projectif $[5]$. Comme il existe un parallélisme absolu pour $n = 7$, il reste à étudier le cas $n = 2q+1 > 7$. On peut encore commencer la détermination des coefficients λ_{ij} par la résolution successive d'équations linéaires. Je ne reproduis pas les calculs qui sont assez longs et j'indique seulement les résultats. On peut d'abord montrer que

$$\lambda_{2q+1,2q} = \lambda_{2q+1,2q-1} = \ldots = \lambda_{2q+1,q+1} = 1.$$

On en déduit :

$$C'_{2q+1} . C'_{2q+1} = (q+1)\, b = 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

Donc q doit être impair. En supposant $q = 2q' - 1$, on trouve

$$\lambda_{2q,2q-1-2k} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, q' - 2;$$
$$\lambda_{2q,2q-2k} = 1, \qquad k = 0, 1, \ldots, q' - 1.$$

D'où :

$$C'_{2q} . C'_{2q} = q'\, b = 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

On a donc $q' = 2q''$. On montre ensuite que les seuls coefficients $\lambda_{2q-2,j}$, pour $j \geqq q+1$, qui sont égaux à 1 sont de la forme $\lambda_{2q-2,2q-2-4r}$, où $k = 0, 1, \ldots, q'' - 1$. Donc

$$C'_{2q-2} . C'_{2q-2} = q''\, b = 0 \qquad (\text{mod } 2),$$

c'est-à-dire $q'' = 2r$ ou $n = 16r - 1$. Pour $n = 15$, on peut effectivement calculer les coefficients λ_{ij}, de sorte que le raisonnement précédent ne permet plus de conclure à l'impossibilité d'un parallélisme absolu lorsque $n = 16r - 1$. Nous avons donc le résultat suivant :

Pour qu'on puisse définir dans $[n]$ *un parallélisme absolu, il faut que* n *soit égal à* 3 *ou à* 7 *ou à* $16r - 1$.

Il serait intéressant de savoir s'il existe effectivement un parallélisme absolu pour $n = 16r - 1$; mais cette question paraît difficile à résoudre [1].

14. Les résultats des paragraphes précédents peuvent être étendus aux variétés engendrées par des éléments de la forme $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$.

---

[1] M. E. Stiefel m'a appris qu'il a étudié également le problème du parallélisme dans les espaces projectifs. Sa méthode est toute différente et conduit à un résultat un peu plus complet qu'il annonce dans *Ein Problem aus der linearen Algebra und seine topologische Behandlung* (*Verh. der Schweiz. Naturf, Gesellschaft*, Zürich, 1935).

Par exemple, soit V la variété des éléments $\{p, q, r\}$ contenus dans $[n]$. L'élément $\{p, q, r\}$ étant composé de trois variétés planes $[p]$, $[q]$ et $[r]$, supposons que ces variétés planes engendrent respectivement les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_p]$, $[b_0, b_1, \ldots, b_q]$ et $[c_0, c_1, \ldots, c_r]$ qui sont définies à l'aide de la suite (S). L'élément $\{p, q, r,\}$ engendre alors une variété que nous représentons par le symbole

$$(9)\qquad \left|\begin{matrix} a_0, & a_1, & \ldots. & a_p & \\ b_0, & b_1, & \ldots, & & b_q \\ c_0, & c_1, & \ldots, & & & c_r \end{matrix}\right|.$$

Nous supposerons de plus que chacun des nombres de la première ligne de ce symbole figure aussi dans la deuxième ligne et que chacun des nombres de la deuxième ligne figure aussi dans la troisième ligne. La variété de symbole (9) est alors une variété irréductible; sa dimension est égale à

$$\sum_i (a_i - i) + \sum_j (b_j - j) + \sum_k (c_k - k),$$

où j est un indice quelconque tel que b_j ne figure pas dans la première ligne et où k est un indice quelconque tel que c_k ne figure pas dans la deuxième ligne. L'ensemble de ces variétés subdivise V en cellules. Cette subdivision définit un complexe analogue au complexe étudié dans les paragraphes **8-12**. On démontre facilement que les coefficients d'incidence relatifs à ce complexe sont égaux à $0, +2$ ou -2. Donc les variétés représentées par les symboles (9) sont des cycles (mod 2) et forment encore les bases minima des groupes d'homologie (mod 2). Bien qu'on ne rencontre aucune difficulté théorique nouvelle, la démonstration d'un théorème général analogue à celui du paragraphe **9** serait un peu longue. Dans chaque cas particulier donné on pourra déterminer effectivement les nombres d'incidence et par suite les bases d'homologie. Le théorème sur la déformation des chaînes (§ **8**) est toujours valable et permet en particulier de trouver le groupe de Poincaré de la variété V.

Si l'on considère la variété engendrée par les éléments $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$, il faut introduire des symboles à $k+1$ lignes analogues au symbole (9); ce qui précède se généralise alors immédiatement.

15. Il est intéressant de chercher le groupe de Poincaré de la variété V engendrée par les éléments $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ de l'espace projectif $[n]$. Comme cette variété est recouverte 2^n fois par la variété du groupe orthogonal, R, à $n+1$ variables, on peut déterminer ainsi le groupe de Poincaré de la variété du groupe R.

Considérons le symbole à n lignes,

$$(10) \qquad \left| \begin{array}{llllll} 0, & & & & & \\ 0, & 1, & & & & \\ ., & ., & ., & \ldots & & \\ 0, & 1, & 2, & \ldots & & n-1 \end{array} \right|,$$

où la $i^{\text{ième}}$ ligne contient les nombres $0, 1, \ldots, i-1$. Ce symbole définit un élément de V que nous considérons comme élément-origine de V. En remplaçant dans la $i^{\text{ième}}$ ligne le nombre $i-1$ par i, on obtient le symbole d'une courbe fermée A_i. Les courbes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont les éléments générateurs du groupe de Poincaré, G, de la variété V. Nous considérons toutes les cellules à deux dimensions de la subdivision de V qui a été définie au paragraphe précédent. A chacune de ces cellules correspond une relation entre les éléments générateurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et l'ensemble de ces relations définit le groupe G. Si $j-i>1$, les courbes A_i et A_j constituent la frontière de la cellule formée par un domaine de la variété

$$(11) \qquad \left| \begin{array}{llllllll} ., & .. & \ldots, & & & & & \\ 0, & 1, & \ldots, & i-2, & i, & & & \\ ., & ., & \ldots, & \ldots, & ., & & & \\ 0, & 1, & \ldots, & \ldots, & ., & j-2, & j & \\ .. & ., & \ldots, & \ldots, & ., & \ldots, & . & \end{array} \right|,$$

où les lignes non écrites explicitement sont les mêmes que les lignes correspondantes de (10). Chaque élément de cette variété correspond d'une façon biunivoque à l'ensemble d'un élément de $[0, 1, \ldots, i-2, i]$ et d'un élément de $[0, 1, \ldots, j-2, j]$. La variété (11) est donc homéomorphe à un tore, de sorte qu'on a la relation

$$A_i A_j = A_j A_i.$$

Il y a deux cellules dont les frontières sont constituées par les courbes A_i et A_{i+1}. L'une d'elles est formée par un domaine de la variété

$$\left|\begin{array}{llllll} \cdot, & \cdot\cdot & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \\ 0, & 1, & \ldots, & i-2, & i+1, & \\ 0, & 1, & \ldots, & i-2, & i-1, & i+1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}\right|,$$

l'autre est formée par un domaine de la variété

$$\left|\begin{array}{llllll} \cdot, & \cdot, & \ldots & \ldots, & & \\ 0, & 1, & \ldots, & i-2, & i, & \\ 0, & 1. & \ldots, & i-2, & i, & i+1 \\ \cdot, & \cdot, & \ldots, & \ldots, & \cdot, & \ldots \end{array}\right|.$$

Ces deux variétés sont respectivement homéomorphes à $\left[\begin{array}{ll} 2 & \\ 0, & 2 \end{array}\right]$ et à $\left[\begin{array}{ll} 1 & \\ 1, & 2 \end{array}\right]$, de sorte qu'on a, d'après le paragraphe **8**, les relations

$$A_i A_{i+1} A_i \;= A_{i+1},$$
$$A_{i+1} A_i A_{i+1} = A_i.$$

De ces relations on déduit

$$A_i A_{i+1} A_i^{-1} A_{i+1}^{-1} = A_{i+1} A_i A_{i+1}^{-1} A_i^{-1} = A_i^2 = A_i^{-2} = A_{i+1}^2 = A_{-2}^{i+1}.$$

En posant $H = A_1^2 = A_2^2 = \ldots = A_n^2$, on a $H^2 = 1$. Le groupe commutateur de G est donc le sous-groupe h, d'ordre 2, engendré par H. Le groupe G/h, qui n'est autre que le groupe d'homologie relatif à la dimension 1, est le produit direct de n groupes d'ordre 2. Donc l'ordre du groupe G/h est égal à 2^n et l'ordre de G est égal à 2^{n+1}.

Le groupe R est le groupe des transformations linéaires homogènes qui laissent invariante la forme $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$, le déterminant de chaque transformation étant égal à $+1$. En considérant x_0, $x_1, \ldots, x_n$ comme des coordonnées projectives dans $[n]$, chaque transformation de R définit une transformation projective de $[n]$. Si les coordonnées sont convenablement choisies, les transformations de R qui laissent invariant l'élément-origine de V sont définies par

$$x'_i = \varepsilon_i x_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

où l'on a $\varepsilon_i = \pm 1$ et $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = 1$. Ces transformations forment un sous-groupe d'ordres 2^n qui est comme G/h le produit direct de n groupes d'ordre 2. A chaque élément de V correspondent 2^n transformations de R, à savoir celles qui transforment l'élément-origine en l'élément considéré. La variété R recouvre donc 2^n fois la variété V.

Le groupe de Poincaré de la variété R est isomorphe à un sous-groupe de G, l'ordre de ce sous-groupe étant égal à l'ordre de G divisé par 2^n. Donc le groupe de Poincaré de R est le groupe d'ordre 2. A la courbe A_i^2 correspond dans R une courbe fermée non réductible à zéro; celle-ci définit un sous-groupe clos à un paramètre, à savoir le groupe dont les équations sont

$$\begin{aligned} x'_{i-1} &= x_{i-1}\cos t - x_i \sin t, \\ x'_i &= x_{i-1}\sin t + x_i \cos t, \\ x'_k &= x_k \qquad (k \neq i-1,\, i). \end{aligned}$$

A l'élément générateur H de G correspond ainsi un élément générateur $\overline{\mathrm{H}}$ du groupe de Poincaré de la variété R. Donc:

Le groupe de Poincaré de la variété R *est le groupe d'ordre* 2 *défini par l'élément générateur* $\overline{\mathrm{H}}$ *et par la relation* $\overline{\mathrm{H}}^2 = 1$.

Ce résultat est bien connu ([1]), mais la démonstration précédente ne fait pas intervenir comme celle de M. H. Weyl la théorie de la structure des groupes simples. A la subdivision de V en cellules correspond une subdivision de R en un nombre fini de cellules. Ceci démontre en particulier que le groupe R est un groupe clos. La subdivision en cellules pourrait sans doute servir à la recherche de propriétés topologiques du groupe R, mais ceci nécessiterait une étude approfondie des relations entre un complexe et ses complexes de recouvrement.

([1]) *Voir* H. WEYL, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* (*Math. Zeitschr.*, 24, 1925, p. 380); *voir* aussi E. CARTAN, *La Géométrie des groupes simples* (*Ann. di Mat.*, 1926-1927, p. 211-218).