JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRI LEBESGUE

Sur la méthode de Carl Neumann (suite)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 421-423.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_421_0>

Sur la méthode de Carl Neumann (suite);

Par Henri LEBESGUE.

N. d. l. R. — Les cinq premiers paragraphes de ce Mémoire ont paru dans ce *Journal* (ce présent Tome, p. 205-218). Par suite d'une malencontreuse erreur de transmission il n'a pu être tenu compte que d'une partie des corrections et additions faites par l'auteur sur les épreuves. En particulier, ont été omises des indications bibliographiques et des observations qui, légèrement développées, ont été réunies dans le paragraphe supplémentaire que nous donnons ici.

6. J'ai dit, à plusieurs reprises, que pour atteindre tous les cas il fallait utiliser des généralisations de l'intégrale mais que le lecteur pouvait cependant se borner à l'examen de domaines simples et à l'emploi d'intégrales ordinaires. Cela demande des explications : on peut n'utiliser que les intégrales ordinaires et constater, comme au paragraphe **2**, l'existence d'une lacune dans le raisonnement de Neumann, comme au paragraphe **3** l'inexactitude du lemme avec certains énoncés, ou comprendre la marche des démonstrations des paragraphes **4** et **5**. Mais ces démonstrations exigent, même pour les domaines les plus simples et les fonctions à la frontière les plus simples, l'emploi d'intégrales étendues aux parties A_i et B_i de la frontière et nous avons dit que tout ce qu'on savait sur ces ensembles c'était que A_i est fermé et B_i ouvert. Ainsi, supposons que le domaine soit un cercle, B_i pourra être formé d'une infinité dénombrable d'arcs de circonférence. Si l'on veut, avec Neumann, n'utiliser que les intégrales ordinaires le raisonnement présente une lacune grave qui a été signalée depuis longtemps par M. Volterra [*Sul principio di Dirichlet* (*Rend. dei Circ. di Pal.*, t. XI, 1897)]. M. Volterra a indiqué commment lever cette difficulté qui se rencontrait aussi dans d'autres problèmes.

On voit combien ces questions simples sont délicates et que l'objection examinée ici n'est pas la seule qu'on puisse faire au raisonnement de Neumann. L'objection de Weierstrass n'est pas non plus la seule qu'on puisse faire au raisonnement de Riemann : M. Hadamard a montré qu'il existait des cas où les données sont telles que le problème de Dirichlet ait une solution et que, pourtant, le problème de minimum envisagé par Riemann n'ait même aucun sens; toutes les intégrales intervenant dans ce problème étant infinies (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. XXXIV, 1906). Et l'exemple de M. Hadamard est aussi simple que possible; le domaine est un cercle sur la frontière duquel est donnée une fonction continue convenablement choisie. *Il n'y a donc pas équivalence entre le problème de Dirichlet et le problème de Riemann.*

On peut préciser la relation entre ces deux problèmes en disant que toutes les fois que le problème de Riemann a une solution, celle-ci fournit aussi la solution du problème de Dirichlet. Mais, pour démontrer ce fait, il ne faut pas compter sur le raisonnement classique de Riemann basé sur la formule de Green et ses généralisations, car celui-ci suppose qu'on puisse parler d'intégrales étendues à la frontière, — donc que celle-ci soit assez simple —, et qu'on ne rencontre que des fonctions dérivables encore à la frontière, — ce qui n'a pas lieu en général même pour un domaine circulaire. Il m'a fallu pour arriver au résultat [*Sur le problème de Dirichlet* (*Rend. del Circ. Mat. di Pal.*, t. XXIV, 1907)] faire un assez long détour. M. Zaremba [*Sur le principe du minimum* (*Bull. de l'Ac. de Cracovie*, juillet 1909)] a obtenu ce résultat tout autrement.

Peut-il arriver que le problème de Riemann ait un sens mais n'ait pas de solution et que le problème de Dirichlet en ait une ? Non, cela découle facilement des travaux cités et d'autres au sujet desquels on se reportera avec fruit à un Mémoire de M. F. Vasilesco, couronné récemment par l'Académie de Belgique (*Mémoires de l'Ac. roy. de Belgique*, t. XVI, 1937). L'hypothèse que le problème de Riemann ait un sens et pas de solution que je viens d'envisager, donc de cas tels que le problème de Dirichlet n'ait pas non plus de solution, se présente effectivement comme je l'ai montré (*Comptes rendus des Séances de la Soc. Math. de France*, t. XXXXI, 1912). En d'autres termes, l'objection de Weierstrass n'est pas relative seulement à la forme du raisonnement, *la circonstance prévue par Weierstrass : une quantité variable n'atteignant pas son minimum, se rencontre effectivement pour l'intégrale de Riemann, comme nous avons vu au paragraphe* **3** *qu'elle se rencontre effectivement pour la quantité* Λ *de Neumann.*

La contribution de M. Hadamard au problème de Dirichlet rappelée ci-dessus occupe certes peu de place dans l'œuvre considérable de M. Hadamard, son intérêt n'en est pas moins fort grand; elle m'a été très utile mathématiquement jadis, aujourd'hui elle sera pour moi prétexte à lui dédier cette petite étude critique [1].

---

[1] J'indiqne ici celles des corrections typographiques dont il n'avait pu être tenu compte et qui sont relatives à des fautes qui pourraient dérouter le lecteur :

page 209, ligne 2, *au lieu de* $k\mathrm{A}_i$, *lire* $k\Lambda^i$;
page 210, ligne 28, *au lieu de* φ, *lire* ζ;
page 211, ligne 4, *au lieu de* spécialiwerth, *lire* specialwerth;
page 212, ligne 13, *au lieu de* prenons dans, *lire* prenons ξ dans;
page 212, ligne 29, *au lieu de* $\mathcal{B}$D, *lire* BD.

Dans la dernière formule de la page 212, *il faut lire* x_i et y_i *au lieu de* x et y.