JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. VRANCEANU

La géométrisation des équations aux dérivées partielles du second ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 361-374.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_361_0>

La géométrisation des équations aux dérivées partielles du second ordre;

PAR G. VRANCEANU.

Dans l'étude des équations aux dérivées partielles, on peut distinguer deux problèmes importants. Le problème d'*intégration*, problème qui a fait l'objet d'importantes recherches de M. J. Hadamard, en particulier en ce qui concerne les équations linéaires hyperboliques. L'autre, c'est le problème d'équivalence, ou bien la recherche des invariants de l'équation par rapport à des transformations, de contact ou plus générales.

Ce second problème, qui est en même temps un problème de classification des équations aux dérivées partielles, peut aider lui aussi à la résolution du premier problème. En effet, on connaît les contributions que M. Ed. Goursat a portées au problème de l'intégration des équations du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

en conduisant la recherche des intégrales de cette équation à celle des multiplicités intégrales M_2 à deux dimensions du système de Pfaff

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} ds^1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ ds^2 = dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ ds^3 = dq - s\,dx - t\,dy = 0, \end{cases}$$

où les trois dérivées du second ordre r, s, t de la fonction z, sont considérées comme des fonctions de deux variables u, v et des x, y, z, p, q satisfaisant à l'équation (1). M. Goursat s'est occupé en particulier des équations (1), qui possèdent une famille de caractéristiques du premier ordre, pour lesquelles la recherche des intégrales peut être conduite à la recherche des multiplicités M_2 d'un sous-système du système (S) de deux équations à six variables ([1]), ou à cinq variables. Ce dernier cas peut se présenter seulement si les caractéristiques de l'équation sont confondues, et nous avons une étude complète de ces systèmes à cinq variables et des équations correspondantes, au point de vue de l'équivalence par une transformation de contact, due à M. E. Cartan ([2]). Dans un Mémoire qui va paraître, j'ai considéré le problème d'équivalence des systèmes de Pfaff de deux équations à six variables à caractéristiques distinctes, comme application d'une méthode d'équivalence, qui cherche à géométriser le système, ou bien à lui associer une connexion affine. On peut classer ces systèmes suivant que leurs deux résolvantes de première espèce sont des équations de Monge-Ampère ou des équations ayant une seule famille de caractéristiques du premier ordre ([3]) qu'on peut appeler équations de M. Goursat. Ainsi, si les deux résolvantes sont des équations de M. Goursat, les formules d'équivalence peuvent contenir au plus six constantes arbitraires, et si une ou toutes les deux sont des équations de Monge-Ampère et si les systèmes des caractéristiques ont des combinaisons intégrables, il peut y avoir, dans les formules d'équivalence, une ou deux fonctions arbitraires.

Maintenant nous allons démontrer que si l'équation (1) est à caractéristiques distinctes et du second ordre; ce qui revient à dire si aucun des sous-systèmes de deux équations de S

$$ds^1 = 0, \qquad \alpha\, ds^2 + \beta\, ds^3 = 0,$$

où α et β sont des fonctions convenablement choisies des variables x, y, z, p, q, u, v, n'est pas de classe six, ce qui est évidemment le cas général, le système S est aussi géométrisable et les formules d'équi-

---

([1]) Ed. Goursat, *Le problème de Bäcklund* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, Vol. VI).

([2]) E. Cartan, *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 3e série, XXVII, 1910, p. 109).

([3]) On sait qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre peut avoir : les deux familles de caractéristiques du second ordre, une famille du second ordre et une autre du premier ordre et enfin les deux familles du premier ordre (Monge-Ampère). *Voir* Ed. Goursat, *Équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, p. 197 (Hermann, Paris, 1896).

valence contiennent au plus 9 constantes arbitraires [1]. Nous allons déterminer aussi toutes les structures des covariants bilinéaires des systèmes S, qui admettent un groupe continu de transformations en eux-mêmes, à huit ou à neuf paramètres, de même que les équations aux dérivées partielles (1) qui admettent un groupe continu maximum de transformations en elles-mêmes à 9 paramètres. Nous allons voir que ces équations dépendent d'une seule constante arbitraire, deux de ces équations étant équivalentes, si les constantes correspondantes sont égales et que ces équations peuvent se mettre, d'une manière très simple, en relation avec une famille de cubiques planes.

1. En effet, on sait que, si les deux familles des caractéristiques de Monge de l'équation (1) sont distinctes, ce qui arrive si l'équation

$$(1') \qquad \frac{\partial F}{\partial r}\lambda^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\lambda + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

a deux racines distinctes en λ, les covariants bilinéaires de ce système peuvent se réduire par des combinaisons convenables des équations $ds^2 = ds^3 = 0$ à la forme canonique

$$(2) \qquad \Delta s^1 = 0, \qquad \Delta s^2 = ds^5 ds^6, \qquad \Delta s^3 = ds^4 ds^7 \qquad (\text{mod } ds^1, ds^2, ds^3),$$

où ds^4, ds^5, ds^6, ds^7 sont des nouvelles formes de Pfaff formant avec ds^1, ds^2, ds^3, sept formes indépendantes dans les sept variables x, y, z, p, q, u, v et où l'on indique avec Δ l'opérateur $\delta d - d\delta$ et par $ds^a ds^b$ l'expression $ds^a \delta s^b - ds^b \delta s^a$. Cette forme canonique nous montre que le système S possède les deux systèmes invariants à deux équations

$$S_1(ds^1 = ds^2 = 0), \qquad S_2(ds^1 = ds^3 = 0),$$

les transformations des formes ds^1, ds^2, ds^3, qui conservent la forme canonique (2), étant données par les formules

$$(2') \qquad d\bar{s}^1 = \alpha\, ds^1, \qquad d\bar{s}^2 = \beta\, ds^2 + a\, ds^1, \qquad d\bar{s}^3 = \gamma\, ds^3 + b\, ds^1.$$

Si l'on considère les covariants bilinéaires du système S_1, ils s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}\Delta s^1 &= ds^3(\alpha_4 ds^4 + \alpha_5 ds^5 + \alpha_6 ds^6 + \alpha_7 ds^7)\\ \Delta s^2 &= ds^5 ds^6 + ds^3(\beta_4 ds^4 + \beta_5 ds^5 + \beta_6 ds^6 + \beta_7 ds^7)\end{aligned}\right. \qquad (\text{mod } ds^1, ds^2),$$

[1] *Voir* aussi G. Vranceanu, *Sur un théorème d'équivalence* (*C. R. de l'Ac. des Sc. de Roumanie*, t. I, 1936).

mais si l'on tient compte des identités fondamentales

$$(abcd) = \frac{\partial\omega^a_{bc}}{\partial s^d} + \frac{\partial\omega^a_{cd}}{\partial s^b} + \frac{\partial\omega^a_{db}}{\partial s^c} + \omega^a_{bf}.\omega^f_{cd} + \omega^a_{cf}.\omega^f_{db} + \omega^a_{df}.\omega^f_{bc} = 0,$$

auxquelles satisfont les coefficients ω^a_{bc} des covariants

$$\Delta s^a = \omega^a_{bc}\, ds^b\, \delta s^c$$

de n formes de Pfaff à n variables, on trouve pour les valeurs (1547) et (1647) des a, b, c, d que $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$. De même, en observant que ds^5, ds^6 sont déterminées par la forme canonique (2), abstraction faite de termes en ds^3, on peut se servir de ces termes pour annuler β_5, β_6. Cela fait, comme les deux formes

$$(2'') \qquad \alpha_4\, ds^4 + \alpha_7\, ds^7, \quad \beta_4\, ds^4 + \beta_7\, ds^7$$

doivent être indépendantes, autrement le système S_1 serait de classe six, on peut prendre des nouvelles formes

$$d\overline{s}^4 = \alpha_4\, ds^4 + \alpha_7\, ds^7, \qquad B\, d\overline{s}^7 = \beta_4\, ds^4 + \beta_7\, ds^7,$$

de façon à écrire les covariants de S_1 sous la forme

$$(3) \qquad \Delta s^1 = ds^3\, ds^4, \qquad \Delta s^2 = ds^5\, ds^6 + B\, ds^3\, ds^7 \qquad (\text{mod}\ ds^1,\ ds^2),$$

et ce changement conserve la forme canonique de Δs^3 si l'on choisit B égal à $\alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4$.

Si l'on considère maintenant les covariants du système S_2 et si l'on tient compte aussi des identités (1456), (1756), puis qu'on ajoute à ds^4, ds^7 des termes convenables en ds^2 et que l'on fasse un changement convenable des ds^5, ds^6, on peut écrire ces covariants sous la forme

$$(3') \qquad \Delta s^1 = ds^2\, ds^5, \qquad \Delta s^3 = ds^4\, ds^7 + C\, ds^2\, ds^6 \qquad (\text{mod}\ ds^1,\ ds^3),$$

où C est comme B une certaine fonction des variables $x, y, \ldots, u, v$. Cela fait, le covariant Δs^1 (mod ds^1), qui est aussi un invariant de notre système S, l'équation $ds^1 = 0$ étant la seule équation du système dérivé S', doit avoir la forme

$$(3'') \qquad \Delta s^1 = ds^3\, ds^4 + ds^2\, ds^5 + A\, ds^2\, ds^3 \qquad (\text{mod}\ ds^1),$$

mais de l'identité (2647) on trouve que $\omega^5_{47} = 0$ et puis de l'identité (1247) on trouve que $A = 0$. De même, on peut réduire B et C à l'unité, en prenant d'autres formes de Pfaff

$$d\overline{s}^1 = \alpha\, ds^1,\quad d\overline{s}^2 = \beta\, ds^2,\quad d\overline{s}^3 = \gamma\, ds^3,\quad d\overline{s}^4 = \lambda\, ds^4,$$
$$d\overline{s}^5 = \mu\, ds^5,\quad d\overline{s}^6 = \nu\, ds^6,\quad d\overline{s}^7 = \rho\, ds^7,$$

où les coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \rho$ sont choisis à satisfaire aux équations

$$\alpha = \gamma\lambda = \beta\mu,\quad \beta = \mu\nu,\quad \beta B = \gamma\rho,\quad \gamma = \lambda\rho,\quad \gamma C = \beta\nu,$$

ce qui revient à prendre

$$\nu = (BC^3)^{\frac{1}{4}},\quad \rho = (B^3 C)^{\frac{1}{4}},\quad \lambda = \frac{\mu C}{\nu},\quad \alpha = \lambda^2\rho,\quad \beta = \mu\nu,\quad \gamma = \lambda\rho.$$

Il en résulte que si les deux systèmes invariants S_1, S_2 de notre système S sont de classe sept, on peut réduire les covariants de ces systèmes, de même que le covariant du premier système dérivé S′ de S a la forme canonique

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta s^1 = ds^3\, ds^4 + ds^2\, ds^5 & (\mathrm{mod}\ ds^1) \\ \Delta s^2 = ds^5\, ds^6 + ds^3\, ds^7 & (\mathrm{mod}\ ds^1,\ ds^2) \\ \Delta s^3 = ds^4\, ds^7 + ds^2\, ds^6 & (\mathrm{mod}\ ds^1,\ ds^3). \end{cases}$$

Cela étant, si l'on considère les deux systèmes singuliers, ou bien les deux systèmes des caractéristiques de notre système S

$$\Sigma_1(ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^5 = ds^6 = 0),\qquad \Sigma_2(ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = ds^7 = 0),$$

on trouve des identités fondamentales (2547), (3456), (3756) que $\omega^6_{47} = \omega^7_{56} = \omega^4_{56} = 0$, et comme nous avons aussi $\omega^5_{47} = 0$, les premiers systèmes dérivés Σ'_1, Σ'_2 sont donnés par les équations

$$\Sigma'_1(ds^1 = ds^2 = ds^5 = ds^6 = 0),\qquad \Sigma'_2(ds^1 = ds^3 = ds^4 = ds^7 = 0).$$

Il en résulte que les covariants du système Σ'_1 seront donnés par les formules de la forme

$$\Delta s^1 = ds^3\, ds^4,\quad \Delta s^2 = ds^3\, ds^7,\quad (\mathrm{mod}\ ds^1,\ ds^2,\ ds^5,\ ds^6)$$
$$\Delta s^5 = A\, ds^3\, ds^4 + B\, ds^3\, ds^7,\quad \Delta s^6 = C\, ds^3\, ds^4 + D\, ds^3\, ds^7,$$

mais parce que ds^5, ds^6 sont encore déterminées seulement abstraction faite des termes en ds^1 et ds^2, on peut se servir de ces termes pour réduire A, B, C, D à zéro, de façon que le second système dérivé Σ''_1 du système Σ_1 est donné alors par les équations $ds^5 = ds^6 = 0$. D'une manière analogue on peut s'arranger de façon que le système Σ''_2 soit donné par les équations $ds^4 = ds^7 = 0$.

Cela fait, le groupe de transformations des formes de Pfaff, qui conserve cette situation, doit conserver les trois systèmes

$$S(ds^1 = ds^2 = ds^3 = 0), \qquad \Sigma''_1\,(ds^5 = ds^6 = 0), \qquad \Sigma''_2\,(ds^4 = ds^7 = 0),$$

systèmes qui n'ont pas d'équations communes, ce qui nous dit que notre groupe possède une connexion affine, ou bien que notre système S est géométrisable ([1]). En général, on peut affirmer que la connexion affine est complète, seulement si les systèmes tels que S, Σ''_1, Σ''_2 n'ont pas de combinaisons intégrables, ce qui revient à dire, dans notre cas, si les systèmes des caractéristiques ou bien les systèmes Σ''_1, Σ''_2 n'ont pas de combinaisons intégrables. Mais si l'on remarque que parmi les coefficients du groupe de transformations de nos formes, qui conservent la forme canonique (4) et les systèmes Σ''_1, Σ''_2

$$\begin{aligned} &d\bar{s}^1 = \alpha\, ds^1, \qquad d\bar{s}^2 = \beta\, ds^2 + a\, ds^1, \qquad d\bar{s}^3 = \gamma\, ds^3 + b\, ds^1,\\ &d\bar{s}^4 = \lambda\, ds^4, \qquad d\bar{s}^5 = \mu\, ds^5,\\ &d\bar{s}^6 = \nu\, ds^6 + c\, ds^5, \qquad d\bar{s}^7 = \rho\, ds^7 + f\, ds^4, \end{aligned}$$

on doit avoir les relations

$$\alpha = \gamma\lambda = \beta\mu, \qquad \beta = \mu\nu = \gamma\rho, \qquad \gamma = \lambda\rho = \beta\nu, \qquad a = \gamma f, \qquad b = \beta c,$$

on trouve que ce groupe peut être écrit sous la forme

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &d\bar{s}^1 = \lambda^2\, ds^1, \qquad d\bar{s}^2 = \lambda\, ds^2 + \lambda a\, ds^1, \qquad d\bar{s}^3 = \lambda\, ds^3 + \lambda b\, ds^1,\\ &d\bar{s}^4 = \lambda\, ds^4, \qquad d\bar{s}^5 = \lambda\, ds^5,\\ &d\bar{s}^6 = \quad ds^6 + b\, ds^5, \qquad d\bar{s}^7 = ds^7 + a\, ds^4, \end{aligned}\right.$$

où λ, a, b sont des fonctions des variables $x, y, \ldots, u, v$. Ce groupe possède une connexion affine complète, même dans le cas où les systèmes Σ''_1, Σ''_2 ont des combinaisons intégrables, et cela à cause du fait que les coefficients λ, a, b n'interviennent pas seulement dans les transformations des équations de Σ''_1, Σ''_2, mais aussi dans les transformations de S, ce qui a comme conséquence qu'on obtient alors, en tous cas, toutes les dérivées des λ, a, b en fonction de ω^a_{bc} et $\overline{\omega}^a_{bc}$. Nous pouvons énoncer ainsi le théorème suivant :

([1]) *Voir* G. VRANCEANU, *Les espaces non holonomes* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 76, p. 14-18).

Si l'équation aux dérivées partielles du second ordre (1) *est à caractéristiques distinctes et les systèmes* S_1 *et* S_2 *sont de classe sept, on peut associer à cette équation une connexion affine complète* A_7 *qui opère dans l'espace des sept variables* x, y, z, p, q, u, v.

2. Il en résulte que le problème d'équivalence de deux de ces équations par une transformation de contact, se réduit ainsi au problème d'équivalence des espaces à connexion affine correspondants, problème qu'on sait qu'il dépend de la résolution d'un système d'équations aux différentielles totales, de façon qu'on peut affirmer que les formules d'équivalence contiennent seulement des constantes arbitraires, dont le nombre ne peut pas être supérieur à $7+3=10$, le nombre des variables et des trois fonctions λ, a, b du groupe (5).

Mais, si l'on considère aussi les covariants

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} \Delta s^5 = \omega^5_{\beta\alpha}\, ds^\beta\, ds^\alpha \\ \Delta s^6 = \omega^6_{\beta\alpha}\, ds^\beta\, ds^\alpha \end{array} \right. & (\operatorname{mod} ds^5), \qquad (\beta = 1, 2, 6;\ \alpha = 1, 2, \ldots, 7) \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta s^4 = \omega^4_{\gamma\alpha}\, ds^\gamma\, ds^\alpha \\ \Delta s^7 = \omega^7_{\gamma\alpha}\, ds^\gamma\, ds^\alpha \end{array} \right. & (\operatorname{mod} ds^4), \qquad (\gamma = 1, 3, 7;\ \alpha = 1, 2, \ldots, 7) \end{array} \right.$$

qui sont aussi des invariants de notre groupe (5), on trouve des identités (1264) et (1357) que $\omega^5_{64} = 1$ et $\omega^4_{75} = 1$, et si l'on se sert de a et b pour annuler ω^6_{64} et ω^7_{75}, les a et b du groupe (5) qui conservent cette situation, doivent satisfaire aux relations

$$b = \omega^6_{67} . a, \qquad a = \omega^7_{76} . b,$$

qui nous disent que a et b doivent être nuls, sauf le cas où nous avons

$$\omega^6_{67} . \omega^7_{76} = 1,$$

quand elles sont liées par une seule relation, ce qui nous montre que le nombre des constantes arbitraires dans les formules d'équivalence est au plus égal à 9. Nous allons voir que ce nombre est effectivement atteint.

En effet, on peut remarquer que si λ était égal à l'unité on pourrait réduire a, et par conséquent aussi b, à zéro, en annulant dans le covariant Δs^4 le terme ω^4_{45} à l'aide du coefficient a. Cela signifie que pour avoir a, b différents de zéro, on doit avoir $\lambda \neq 1$, et par conséquent les systèmes pour lesquels on ne peut réduire a et b à zéro se trouvent parmi ceux pour lesquels $\lambda \neq 1$, $a = b = 0$, et l'on ne peut pas réduire λ à l'unité. Or, il est facile de voir que pour ces systèmes on doit avoir dans les formules (6) tous les coefficients nuls, sauf ω^5_{26}, ω^5_{27}, ω^5_{63}, $\omega^5_{64} = 1$, ω^6_{67}, ω^4_{36}, ω^4_{37}, ω^4_{72}, $\omega^4_{75} = 1$, ω^7_{76}, et de même on doit avoir $\omega^2_{3\alpha} = 0\ (\alpha \neq 2)$, $\omega^3_{2\alpha} = 0\ (\alpha \neq 3)$.

Si l'on tient compte des identités (1237), (1236), (5637) qui nous donnent $\omega^4_{27} = \omega^5_{36} = 0$, $\omega^4_{37} = \omega^5_{26}$, on peut écrire nos covariants sous la forme

$$
(6')\quad
\left\{
\begin{aligned}
\Delta s^1 &= \quad ds^3\,ds^4 + ds^2\,ds^5 + A_\alpha\,ds^1\,ds^\alpha,\\
\Delta s^2 &= \quad ds^5\,ds^6 + ds^3\,ds^7 + B_\alpha\,ds^2\,ds^\alpha,\\
\Delta s^3 &= \quad ds^4\,ds^7 + ds^2\,ds^6 + C_\alpha\,ds^3\,ds^\alpha,\\
\Delta s^4 &= -\,ds^5\,ds^7 + A\,ds^3\,ds^6 + B\,ds^3\,ds^7 + F_\alpha\,ds^4\,ds^\alpha,\\
\Delta s^5 &= -\,ds^4\,ds^6 + B\,ds^2\,ds^6 + C\,ds^2\,ds^7 + G_\alpha\,ds^5\,ds^\alpha,\\
\Delta s^6 &= m\,ds^6\,ds^7, \qquad \Delta s^7 = n\,ds^6\,ds^7,
\end{aligned}
\right.
$$

et ces covariants seront conservés par le groupe (5) $(a \neq 0)$ seulement si $mn + 1 = A = B = C = 0$. Pour avoir maintenant d'une manière plus vite les autres identités que nous n'avons pas considérées et qui sont satisfaites par les coefficients $A, B, C, m, n, A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, F_\alpha, G_\alpha$, on peut se servir de la méthode connue du calcul symbolique de M. Cartan, que les dérivées extérieures d'un covariant sont identiquement nulles. On trouve alors, en égalant à zéro les

$$
d\Delta s^\alpha \pmod{ds^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \qquad d\Delta s^4 \pmod{ds^3, ds^4}, \qquad d\Delta s^5 \pmod{ds^2, ds^5},
$$

les relations suivantes en termes finis :

$$
(7)\quad
\left\{
\begin{array}{lll}
A_\alpha - F_\alpha - C_\alpha = 0\ (\alpha = 2, 5, 6, 7), & A_\alpha - B_\alpha - G_\alpha = 0\ (\alpha = 3, 4, 6, 7), & \\
G_\alpha - B_\alpha = 0\ (\alpha = 1, 3, 4), & G_\alpha - B_\alpha = 0\ (\alpha = 1, 4, 5), & \\
F_\alpha - C_\alpha = 0\ (\alpha = 1, 2, 5), & F_\alpha - G_\alpha = 0\ (\alpha = 1, 2, 3), & \\
G_7 - B_7 + m = 0, & B_7 - C_7 + m = 0, & F_7 - G_7 + m = 0,\\
C_6 - B_6 - n = 0, & F_6 - C_6 - n = 0, & G_6 - F_6 - n = 0.
\end{array}
\right.
$$

Si l'on tient compte de ces relations, l'identité (4423) s'écrit

$$
\frac{\partial F_2}{\partial s^3} - \frac{\partial F_3}{\partial s^2} = 0,
$$

ce qui nous montre que si l'on prend λ comme solution commune des équations

$$\frac{\partial\lambda}{\partial s^2}+\lambda F_2=0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial s^3}+\lambda F_3=0,$$

les nouvelles F_2, F_3 sont nulles, et en vertu des relations (7) nous avons aussi $A_2=C_2=G_2=A_3=B_3=G_3=0$. De même, à l'aide des autres dérivées $\frac{\partial\lambda}{\partial s^1}, \frac{\partial\lambda}{\partial s^4}, \frac{\partial\lambda}{\partial s^5}, \frac{\partial\lambda}{\partial s^6}, \frac{\partial\lambda}{\partial s^7}$, on peut aussi annuler F_1, B_1, C_1, G_1, G_4, A_4, B_4, C_4, F_5, A_5, B_5, C_5, A_6 et A_7. Cela fait, les dernières identités ($\alpha\alpha$ 67), ($\alpha=1,2,3,4,5$), (4367), (5267) nous donnent les relations

$$(7') \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial n}{\partial s^7}+\frac{\partial m}{\partial s^6}-\frac{C-A}{2}=0, \qquad \frac{\partial n}{\partial s^7}-\frac{\partial m}{\partial s^7}-A-C+2+2mn=0,\\ &\frac{\partial A}{\partial s^7}-\frac{\partial B}{\partial s^6}+4Am+2Bn=0,\\ &\frac{\partial B}{\partial s^7}-\frac{\partial C}{\partial s^6}+2Bm+4Cn=0, \end{aligned}\right.$$

λ devient alors une constante, si a est égal à zéro, et nous avons la composition

$$(8) \quad \left\{\begin{aligned} \Delta s^1 &= ds^3 ds^4+ds^2 ds^5,\\ \Delta s^2 &= ds^5 ds^6+ds^3 ds^7-\frac{3n}{2}ds^2 ds^6+\frac{m}{2}ds^2 ds^7,\\ \Delta s^3 &= ds^4 ds^7+ds^2 ds^6-\frac{n}{2}ds^3 ds^6+\frac{3}{2}m\,ds^3 ds^7,\\ \Delta s^4 &= -ds^5 ds^7+A\,ds^3 ds^6+B\,ds^3 ds^7+\frac{n}{2}ds^4 ds^6-\frac{3}{2}m\,ds^4 ds^7,\\ \Delta s^5 &= -ds^4 ds^6+B\,ds^2 ds^6+C\,ds^2 ds^7+\frac{3n}{2}ds^5 ds^6-\frac{m}{2}ds^5 ds^7,\\ \Delta s^6 &= m\,ds^6 ds^7, \qquad \Delta s^7=n\,ds^6 ds^7. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas où $A=B=C=0$, $n=-\frac{1}{m}$, m est une constante et le système admet un groupe continu de transformations en lui-même à 9 paramètres, car les coefficients de la composition sont des constantes, et les deux fonctions λ et a ($b=ma$) satisfont au système complètement intégrable

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s^{\alpha}} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 6, 7), \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial s^4} = \frac{1}{2} m\lambda a, \qquad \frac{\partial \lambda}{d s^5} = \frac{1}{2} \lambda a,$$

$$\frac{\partial a}{\partial s^{\alpha}} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3), \qquad \frac{\partial a}{\partial s^4} = m a^2,$$

$$\frac{\partial a}{\partial s^5} = a^2, \qquad \frac{\partial a}{\partial s^6} = \frac{3}{2} \frac{a}{m}, \qquad \frac{\partial a}{\partial s^7} = \frac{3}{2} m a.$$

Si ces conditions $A = B = C = mn + 1 = 0$ ne sont pas satisfaites, le système admet un groupe à 8 paramètres seulement si A, B, C, m, n, qui sont des invariants du système, sont des constantes, autrement ils constituent des relations entre les deux variables, disons u et v, du système complètement intégrable $ds^6 = ds^7 = 0$. Si ce sont des constantes ils doivent satisfaire aux équations

$$(7'') \quad A = C, \qquad A - 1 - mn = 0, \qquad 2Am + Bn = 0, \qquad 2An + Bm = 0,$$

qui possèdent deux séries de solutions dépendant chacune d'une constante arbitraire

$$(8') \qquad \begin{cases} m = n = 0, & A = C = 1, & B \text{ quelconque}, \\ n = \pm m, & A = 1 \pm m^2, & B = \pm 2(1 \pm m^2). \end{cases}$$

5. Nous avons déterminé ainsi la structure (8) qui admet un groupe de transformations en elle-même à 9 paramètres et deux structures (8′) qui admettent un groupe à 8 paramètres. Chacune de ces structures dépendent d'un seul invariant constant, deux structures d'une même catégorie étant équivalentes, si les invariants ont la même valeur. Les structures qui nous restent encore à déterminer, au point de vue des invariants, appartiennent, soit au cas (6′) où les invariants A, B, C, m, n, ne sont pas tous des constantes, le groupe de transformations en lui-même du système étant alors un groupe intransitif ayant 7 ou 6 paramètres, suivant qu'un ou deux de ces invariants sont indépendants, soit au cas général où le groupe (5) peut être réduit à l'identité, quand nous avons comme invariants tous les coefficients ω^a_{cb} des covariants des formes ds^a de ce groupe (5) réduit à l'identité et la connexion A_7 est alors riemannienne. En ce cas le groupe de transformations en lui-même du système, est un groupe simplement transitif, si les ω^a_{bc} sont des constantes, autrement il est un groupe intransitif ayant au plus 6 paramètres. Dailleurs, il est facile de déterminer les équations aux dérivées partielles ayant la structure (8), car si u, v sont les variables des formes ds^6, ds^7 et si l'on considère ds^1 réduit à la forme canonique

$$ds^1 = dz - p\,dx - q\,dy, \tag{7'''}$$

on peut prendre

$$ds^\alpha = A^\alpha dp + B^\alpha dq + C^\alpha dx + D^\alpha dy \qquad (\alpha = 2, 3, 4, 5),$$

où les coefficients A^α, B^α, C^α, D^α sont des fonctions de u et v seulement. Cela nous dit que r, s, t seront elles-mêmes fonctions de u et v seulement, de façon que par l'élimination de ces variables on a une équation de la forme

$$F(r, s, t) = 0. \tag{8''}$$

La réciproque est vraie, car ces équations admettent, quelle que soit la fonction F, un groupe de transformations en elles-mêmes à six paramètres

$$z' = \alpha^2 z + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1, \qquad x' = \alpha x + a, \qquad y' = \alpha y + b.$$

Pour satisfaire maintenant à la composition (8), avec

$$A = B = C = 0,\ n = -\frac{1}{m},$$

on remarque que nous avons

$$\frac{\Delta s^6}{m} + m\,\Delta s^7 = 0,$$

ce qui nous dit que la forme $\dfrac{ds^6}{m} + m\,ds^7$ est une différentielle totale exacte, de façon qu'on peut poser

$$\frac{ds^6}{m} + m\,ds^7 = \frac{du}{u}, \qquad ds^7 = u\,dv.$$

De même, comme nous avons

$$m\,\Delta s^4 + \Delta s^5 = -\frac{3}{2}(m\,ds^4 + ds^5).\left(\frac{ds^6}{m} + m\,ds^7\right),$$

on peut poser

$$m\,ds^4 + ds^5 = u^{-\frac{3}{2}}dx, \qquad ds^1 = u^{-\frac{1}{2}}(dy - v\,dx),$$

et de cette manière on satisfait aux quatre covariants Δs^4, Δs^5, Δs^6, Δs^7. Cela fait, on peut écrire ds^1 sous la forme $(7''')$, et si l'on considère le covariant Δs^1 on trouve que

$$ds^2 = u^{\frac{3}{2}}(dp + v\,dq) + \lambda\,ds^1 + \mu\,ds^5,$$

$$ds^3 = u^{\frac{3}{2}}m(dp + v\,dq) + u^{\frac{1}{2}}dq + \rho\,ds^1 + \lambda\,ds^5,$$

où λ, μ, ρ sont des fonctions quelconques dans les variables $x, y, \ldots, u, v$. Si l'on tient compte des covariants Δs^2 et Δs^3 on trouve que ces fonctions, qu'on peut supposer fonctions de u et v seulement, doivent satisfaire au système aux différentielles totales

$$\frac{\partial\lambda}{\partial s^6} = \mu + \frac{2\lambda}{m}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial s^7} = \rho + 2\lambda m, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial s^6} = 1 + \frac{3\mu}{m},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial s^7} = 2\lambda + m\mu, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial s^6} = \frac{\rho}{m} + 2\lambda, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial s^7} = 1 + 3\rho m.$$

En intégrant ce système, on trouve que les formes ds^2, ds^3 sont données par les formules

$$(9)\left\{\begin{aligned} ds^2 &= u^{\frac{3}{2}}(dp + v\,dq) + \left(-\frac{m}{3} + \frac{\alpha(uv)^3}{3}\right)u^{-\frac{3}{2}}dx \\ &\quad + \left(\frac{m^2}{2} + \frac{\alpha(uv)^2}{2}\right)u^{-\frac{1}{2}}(dy - v\,dx) \qquad (\alpha = 1 - m^4), \\ ds^3 - m\,ds^2 &= u^{\frac{1}{2}}dq + \left(\frac{m^2}{2} + \frac{\alpha(uv)^2}{2}\right)u^{-\frac{3}{2}}dx + (-m^3 + \alpha uv)u^{-\frac{1}{2}}(dy - v\,dx), \end{aligned}\right.$$

et nous avons ainsi un système de sept formes $ds^1, \ldots, ds^7$, satisfaisant à notre composition.

Pour arriver à l'équation (1) correspondant à cette composition, il faut introduire dans le système $ds^2 = ds^3 = 0$, au lieu de dp et dq, $r\,dx + s\,dy$, $s\,dx + t\,dy$, et puis annuler les coefficients de dx et dy, ce qui nous donne trois équations entre r, s, t et u, v qu'on peut écrire

$$(9')\qquad \begin{cases} ut = m^3 - \alpha uv, \\ u^2 s = -\dfrac{m^2}{2} - m^3 uv + \dfrac{\alpha(uv)^2}{2}, \\ u^3 r = \dfrac{m}{3} + m^2 uv + m^3 (uv)^2 - \dfrac{\alpha}{3}(uv)^3. \end{cases}$$

Ces équations nous permettent de tirer r, s, t comme fonctions de u et de v et l'équation (1) s'obtient en éliminant u, v entre ces équations. Si la constante m satisfait à l'équation $m^4 - 1 = 0$, par exemple si $m = 1$, on peut faire immédiatement cette élimination et l'on trouve l'équation

$$(10)\qquad \frac{r}{t^3} - \frac{s^2}{t^4} - \frac{1}{12} = 0,$$

et si l'on fait une transformation de contact d'Ampère, cette équation se réduit à la forme plus simple [1]

$$\mathrm{RT}^3 + \frac{1}{12} = 0.$$

Si $\alpha \neq 0$, on peut prendre $m^3 - \alpha uv$ comme paramètre $\frac{1}{\lambda}$, et l'on peut écrire

$$(11)\qquad \frac{s}{t^2} = -\frac{m^2}{2\alpha}\lambda^2 + \frac{1}{2\alpha}, \qquad \frac{r}{t^3} = \frac{m(1+m^4)}{3\alpha^2}\lambda^3 - \frac{m^2}{\alpha^2}\lambda^2 + \frac{1}{3\alpha^2}.$$

En faisant la transformation de variables $x' = ax$, $y' = by$, $z' = cz$, et en imposant aux constantes a, b, c la condition $ac\alpha = b^3$, on peut faire disparaître α de ces formules, de façon qu'en éliminant λ entre les deux équations (11), on trouve notre équation sous la forme

$$(12)\qquad \left(\frac{s}{t^2} - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{9m^4}{8(1+m^4)^2}\left(\frac{r}{t^3} - \frac{s}{t^2} + \frac{2}{3}\right)^2 = 0$$

qui représente, si l'on prend $\frac{s}{t^2}$ et $\frac{r}{t^3}$ comme des coordonnées dans le plan, l'équation d'une famille de cubiques unicursales, ayant le point

---

[1] Sous cette forme l'équation a été intégrée par M. de Boer (*voir* E. Goursat, *Équations aux dérivées partielles*, déjà cité, t. II, p. 130).

$\frac{s}{t^2}=\frac{1}{2}, \frac{r}{t^3}=\frac{1}{3}$ comme point double. Si l'on pose $X=\frac{s}{t^2}-\frac{1}{2}, Y=\frac{r}{t^3}-\frac{1}{3}$ cette famille de cubiques prend la forme simple

$$X^3+\frac{9m^4}{8(1+m^4)^2}(X-2Y)^2=0, \tag{11'}$$

la constante m^4 étant différente de zéro et de l'unité. Il est intéressant de remarquer que le point double $s=\frac{t^2}{2}, r=\frac{t^3}{3}$ représente deux équations en involution qui possèdent un groupe maximum de transformations en elles-mêmes à 14 paramètres ([1]).

On peut appliquer à ces équations aux dérivées partielles (12), ayant un groupe d'applicabilité maximum à 9 paramètres, la méthode d'intégration de Darboux, chaque système des caractéristiques ayant deux combinaisons intégrables. Nous reviendrons sur ces questions, de même que sur la détermination des équations (8″) qui admettent un groupe continu à 8, ou à 7 paramètres. Nous allons observer seulement que toutes les équations aux dérivées partielles, qui s'obtiennent par une relation entre $\frac{s}{t^2}$ et $\frac{r}{t^3}$, ont la propriété importante de posséder un groupe de transformations en elles-mêmes à 7 paramètres donné par les formules

$$x'=ax+a_1, \qquad y'=bx+b_1, \qquad z'=cz+a_2x+b_2y+c_2, \tag{12'}$$

qui transforment $\frac{s}{t^2}$ et $\frac{r}{t^3}$ en elles-mêmes, si nous avons entre a, b, c la relation $ac=b^3$. En posant $t=v$, $s=v^2u$, $r=v^3\varphi(u)$, notre groupe conserve la même valeur pour la variable u et par conséquent il est un groupe intransitif par rapport à l'espace A_7, ce qui nous montre que toutes ces équations, si elles sont à caractéristiques distinctes, et les systèmes S_1 et S_2 sont de classe 7, ce qui est le cas général, appartiennent à la composition (8), pour laquelle un au plus des invariants A, B, C, m, n est une fonction indépendante des variables u, v. Une propriété analogue est vérifiée aussi pour les équations qui sont données par une relation entre $\frac{s}{t^\lambda}$, $\frac{r}{t^{2\lambda-1}}$, λ étant une constante.

([1]) *Voir* E. Cartan, *Les systèmes de Pfaff à cinq variables*, déjà cité.