JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Représentation des déplacements autour d'un point fixe (dans l'espace à trois dimensions) par un couple de points de cet espace

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 345-348.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_345_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Représentation des déplacements autour d'un point fixe (dans l'espace à trois dimensions) par un couple de points de cet espace ;

PAR BERTRAND GAMBIER.

M. Hadamard s'est plu à développer des recherches géométriques d'une finesse remarquable. Je publie ici, en hommage à M. Hadamard, un travail sur la géométrie anallagmatique pour laquelle il a manifesté tant d'affection et j'arrive ainsi à retomber dans un domaine cher à Darboux.

1. Dans un travail précédent (*Journal de Math.*, t. IX, 1930, p. 179-199) j'ai montré comment l'ensemble des cycles orthogonaux à la sphère $(\Sigma) x^2+y^2+z^2+1=0$ peut être représenté par l'ensemble de deux feuillets sphériques portés par la sphère réelle (S) $x^2+y^2+z^2-1=0$. *Chaque cycle est remplacé par deux images :* a (romaine) point de (S), l'autre α (grecque) point de (S). Je ne m'occupe ici que de cercles ou cycles orthogonaux à Σ. Le cycle opposé a pour images a', α', respectivement opposés sur S à a, α. Les cycles, opposés entre eux conjugués au précédent ont pour image (a, α'), (a', α). *Deux cycles sécants* (a, α), (b, β) *sont tels que* $\widehat{ab}=\widehat{\alpha\beta}$, $\widehat{ab}$ *signifiant l'arc de grand cercle, inférieur* π, *joignant* a, b *sur* S ; *la valeur commune de* $\widehat{ab}$, $\widehat{\alpha\beta}$ *est l'angle des deux cycles;* en particulier, pour deux cycles opposés, on trouve ainsi π. Deux cycles (a, α), (b, β) sont *paratactiques* (*romains ou grecs*) si leurs images (romaines ou grecques) coïncident, *antitactiques* (romains ou grecs) si ces images sont opposées. La construction que j'ai indiquée revient à prendre les génératrices de Σ issues des pieds sur Σ du cycle et à les transporter parallèlement sur S; il est bon de remarquer que le cycle (a, a), d'images confondues, et le cycle (α, α) sont les *droites focales réelles* du cône de sommet O s'appuyant sur le cycle; cette conception, plus intuitive, ne dispense pas des constructions plus précises que j'ai indiquées pour distinguer l'une de l'autre ces deux focales et pour chacune, séparer a de a', α de α' et associer a à α plutôt que α'. Par chaque point de l'espace passe un cycle paratactique (et un seul), romain ou grec, au cycle (a, α); quand le cycle passe en O, il se réduit à une droite; on retrouve ainsi les deux focales en jeu.

2. Ces préliminaires rappelés, *que faut-il pour que trois cycles* (a, α), (b, β), (c, γ) *soient deux à deux sécants?* Le fait qu'ils appartiennent tous les trois à la catégorie des cercles orthogonaux à Σ entraîne que deux d'entre eux ne peuvent être sécants sans être bisécants.

Les deux triangles sphériques (abc), $(\alpha\beta\gamma)$ *sont égaux et réciproquement;* par raison de continuité, si (abc), $(\alpha\beta\gamma)$ sont *directement égaux*, les trois cycles ont deux points communs à eux trois : en effet, si même α, β, γ coïncidaient respectivement avec a, b, c, nous aurions, en fait de trois cycles, trois rayons Oa, Ob, Oc de la sphère, se coupant en O et au point à l'infini. Si $(\alpha\beta\gamma)$ est directement égal à un symétrique de (abc), les trois cycles sont sur une même sphère orthogonale à Σ [1].

Mais alors imaginons un déplacement quelconque, autour de O, de l'espace euclidien E à trois dimensions. Une manière simple de le représenter consiste à envisager la sphère S, invariablement liée à E, et à indiquer les positions $a, b, c, \ldots$, des points de S *avant* le mouvement, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, des mêmes points *après*. Mais alors, il nous est permis d'envisager les cycles d'images (a, α) (b, β), (c, γ), ..., respectivement et les deux points communs à ces cycles : U, V. *A tout déplacement correspond un couple* U, V, *et un seul; à tout couple de points* U, V (*inverses l'un de l'autre dans l'inversion* Σ) *correspond un*

[1] Il résulte de là que si les cycles (a, α), (b, β), (c, γ) ont deux points communs, les cycles (a, α'), (b, β'), (c, γ') respectivement conjugués des précédents sont sur une même sphère et inversement.

déplacement et un seul. Il reste maintenant à indiquer la position précise des points U, V. Les plans médiateurs de a, α et b, β se coupent suivant une droite OI, axe de la rotation qui doit amener ab en coïncidence avec $\alpha\beta$; cette rotation, quand on a orienté la droite OI, est définie à 2π près; changer l'orientation de OI ferait changer de signe les déterminations de cet angle de rotation. Adoptons donc un certain sens positif OI sur cet axe de rotation et soit φ, la grandeur, de la rotation $(\mathrm{OI}a, \mathrm{OI}\alpha)$; d'après le mémoire déjà cité, les points U, V sont portés par OI. *D'autre part ce couple* U, V *est celui qui se déduit du couple* (O, ∞) *par la transformation paratactique résultant d'une rotation anallagmatique d'amplitude* $\frac{\varphi}{2}$ *autour du cycle* (I, I), *puis de la rotation de même amplitude autour du cycle* (I, J), I désignant *le point à l'unité de distance sur* OI *et* J *le point diamétralement opposé à* I *sur* OI. Le cycle (I, I) n'est autre d'ailleurs que la droite orientée OI; le cycle (I, J) est porté par la section diamétrale de la sphère S par le plan perpendiculaire en O sur OI. Dans la première rotation ni O ni ∞ ne changent; la seconde rotation est une succession de deux inversions, d'abord par rapport au plan perpendiculaire en O sur OI, puis par rapport à une sphère passant par le cycle (I, J), coupant le plan en question suivant l'angle $\frac{\varphi}{4}$; la première de ces deux inversions ne change ni O ni ∞, la seconde remplace O par un point U situé à la distance $\mathrm{O}u = \varepsilon \operatorname{tang}\frac{\varphi}{4}$ sur OI, où ε est l'un des nombres $+1$ ou -1 (je laisse de côté ici la détermination exacte de ε) et ∞ par le centre V de la sphère d'inversion, à la distance $\mathrm{OV} = -\varepsilon \cot\frac{\varphi}{4}$.

Ce résultat est d'accord avec mon travail précédent, car en appelant x et y les valeurs absolues de OU et OV, j'ai montré qu'on a

$$|x-y| = 2\left|\cot\frac{\varphi}{2}\right|, \qquad x+y = \frac{2}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|}, \qquad \cdots\cdot$$

Il est assez remarquable d'avoir signalé cette correspondance biunivoque entre les déplacements autour du point fixe et un couple de deux points U, V portés par l'axe de rotation et inverses l'un de l'autre par rapport à la sphère $x^2+y^2+z^2+1=0$. *Le groupe des déplacements est isomorphe au groupe des opérations paratactiques* (*telles que les deux cercles conjugués, axes des rotations associées, soient orthogonaux à* Σ).

On peut remarquer maintenant que le couple U, V est parfaitement déterminé par son milieu u, situé à une distance $\frac{|x-y|}{2}$ ou $\left|\cot\frac{\varphi}{2}\right|$ de O. Nous retrouvons alors la représentation signalée par Darboux (*Théorie des surfaces*, t. 4, Note V, p. 433); si même on remplace ensuite u par son *opposé* relativement à O($\overline{Ou}.\overline{O\sigma}=-1$), on retrouve une transformation indiquée par Darboux (*Principes de Géométrie analytique*, Livre V, Chap. VII) : les angles des lignes en U et V sont égaux aux angles cayleyens des lignes homologues en σ (l'absolu étant la sphère $x^2+y^2+z^2+1=0$).