④ JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. THÉODORESCO

Sur les solutions élémentaires des équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 329-343.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_329_0>

Sur les solutions élémentaires des équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples;

PAR N. THÉODORESCO.

1. INTRODUCTION. — Les travaux de M. Hadamard sur la théorie des équations aux dérivées partielles ont mis en lumière le rôle que doivent jouer *le conoïde caractéristique* et *la solution élémentaire* dans les problèmes aux limites, surtout dans ceux que l'on rencontre dans les applications physiques des équations et des systèmes d'équations linéaires.

Dans ses *Leçons sur la propagation des ondes*, il montre que l'intervention du conoïde caractéristique est imposée par des raisons d'économie naturelle, vu que la connaissance des données à l'intérieur de cette variété suffit pour la détermination de la solution au sommet. En même temps, c'est à l'aide de la solution élémentaire, singulière sur le conoïde issu d'un point arbitraire, qu'on obtient la solution satisfaisant aux « conditions définies » [1].

Dans ses *Leçons de Yale* sur le problème de Cauchy, il applique ces idées à la résolution du problème de Cauchy pour les équations linéaires du second ordre du type hyperbolique normal, en montrant que pour cette classe d'équations, le type de solution élémentaire, qui est utile et qui s'impose comme une généralisation naturelle des propriétés du potentiel élémentaire et de la fonction de Riemann, est

[1] Terme que M. Hadamard propose de substituer à celui plus restrictif de « conditions aux limites ». Voir sa Conférence sur les équations aux dérivées partielles (*L'Enseignement mathématique*, t. 35, 1936).

celui qui possède *une singularité algébrique*. Le cas des équations d'ordre supérieur n'y est traité qu'en passant, mais les deux livres sont pleins de remarques et suggestions sur ce sujet.

Dans un mémoire publié dans la *Revue mathématique de l'Union Interbalkanique* (1), nous avons repris les idées de M. Hadamard, dans l'espoir de pouvoir contribuer, selon son désir, exprimé dans la préface de l'édition française de ses *Leçons de Yale*, à l'extension de ses méthodes aux systèmes d'équations linéaires. Nous y avons cherché des solutions élémentaires à singularité algébrique pour une classe de systèmes jouissant d'une particularité qu'on rencontre dans toutes les applications physiques : *la forme caractéristique n'est pas la plus générale, mais décomposable en deux facteurs simples ou multiples, dont l'un est quadratique en les dérivées partielles du premier ordre*.

Dans le cas où ce facteur quadratique est simple, la recherche de la solution singulière sur la nappe caractéristique conoïdale qu'il fournit en chaque point se poursuit de la même manière pour les systèmes comme pour les équations d'un ordre supérieur. Si, par contre, ce facteur quadratique est multiple, des dissemblances assez graves apparaissent, conduisant à ce résultat que, si pour les systèmes aucune difficulté nouvelle ne se présente, *une équation d'ordre* n *n'admet pas en général de solution singulière sur les nappes caractéristiques données par le facteur quadratique de la forme caractéristique*.

Ce résultat est une conséquence immédiate d'une remarque de M. Hadamard (2), remarque qui est à la base du présent travail dans lequel nous nous proposons de montrer sur une équation linéaire du quatrième ordre sous quelles conditions on peut entreprendre la recherche d'une solution à singularité algébrique, dans le cas où la forme caractéristique est le carré d'une forme quadratique générale en les dérivées partielles du premier ordre. Nous donnerons ensuite le calcul du premier terme de la solution élémentaire algébrique, afin d'esquisser la marche à suivre pour parvenir à cette solution.

---

(1) N. Théodoresco, *Les solutions élémentaires d'une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles* (*Revue mathématique de l'Union Interbalkanique*, t. 1, p. 59-81, 1936).

(2) *Leçons sur la propagation des ondes*, N° 347, p. 340.

2. Expression de la forme caractéristique. — Commençons par montrer que si une forme caractéristique A est décomposable en deux formes P et Q, dont P *quadratique à discriminant* $\neq 0$, il faut, pour que les caractéristiques données par cette forme quadratique soient doubles, que le facteur P soit double dans le produit.

En effet, soit la forme $A(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$, où l'on a posé $\pi_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}$, $G(x_1, x_2 \ldots, x_m)$ étant une fonction analytique des variables x_1, $x_2, \ldots, x_m$. $G = 0$ sera une caractéristique d'une certaine équation. Supposons que $A = P.\, Q$, avec

$$P = \sum_{i,j} p_{ij}\pi_i\pi_j,$$

Q étant une forme algébrique de l'ordre $n - 2$ en π_i.

La caractéristique G étant double, on aura sur $G = 0$, $P = 0$ et

$$\frac{\partial A}{\partial \pi_i} \equiv P\frac{\partial Q}{\partial \pi_i} + Q\frac{\partial P}{\partial \pi_i} = Q\frac{\partial P}{\partial \pi_i} = 0.$$

Par conséquent, ou bien $\frac{\partial P}{\partial \pi_i} = 0$, ou alors $Q = 0$. Mais dans le premier cas le système linéaire homogène $\sum_j p_{ij}\pi_j = 0$ n'a d'autres solutions que $\pi_i = 0$, soit $G = \text{const.}$, parce que, la forme P étant supposée générale, le discriminant Δ de P qui est aussi le déterminant du système ne peut s'annuler. Par conséquent, en admettant que la même circonstance se présente non seulement pour G mais aussi pour toutes les caractéristiques voisines, on aura $Q = P.\, R$ et $A = P^2 R$. Nous admettrons donc dès le début que la forme caractéristique de l'équation que nous allons étudier est de la forme $A = P^2$.

3. La forme de l'équation. — Considérons l'équation homogène

$$\mathcal{F}(u) \equiv \sum_{ijkl} a_{ijkl}\frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \sum_{ijk} b_{ijk}\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{ij} c_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + eu$$
$$(i, j, k, l = 1, 2, \ldots m),$$

les variables indépendantes étant $x_1, x_2, \ldots, x_m$, les coefficients étant des fonctions analytiques, holomorphes dans la région $\mathcal{R}$ de l'espace où l'on veut calculer la solution.

$G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ étant une fonction régulière des x_i (finie, continue et dérivable un certain nombre de fois), posons $\frac{\partial G}{\partial x_i} = \pi_i$

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{array}{ll}
A = \sum_{ijkl} a_{ijkl}\pi_i\pi_j\pi_k\pi_l, & B = \sum_{ijk} b_{ijk}\pi_i\pi_j\pi_k, \\
C = \sum_{ij} C_{ij}\pi_i\pi_j, & D = \sum_{i} d_i\pi_i.
\end{array}
\right.
$$

La permutation de deux indices d'une même lettre sera sans effet sur les coefficients respectifs (par exemple $a_{ijkl} = a_{jkil}$), de sorte que les termes seront comptés autant de fois qu'il est possible de faire des combinaisons distinctes avec les indices respectifs. Les quantités A, B, C, D seront donc des formes algébriques des variables π_i.

A est la forme caractéristique de l'équation, les intégrales $G = 0$ de l'équation $A = 0$ aux dérivées partielles du premier ordre et du quatrième degré en π_i, étant les caractéristiques de l'équation (1).

Nous supposerons

$$
(3) \qquad A = P^2 \qquad \text{avec} \quad P = \sum_{ij} p_{ij}\pi_i\pi_j.
$$

Dans ces conditions, les caractéristiques seront évidemment doubles. Cherchons pour l'équation (1) une solution de la forme

$$
(4) \qquad u = U F(G),
$$

où $F(G)$ est une fonction admettant une singularité $G = 0$, la fonction $U(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ étant régulière même sur G.

Calculons les dérivées partielles de u en posant

$$
u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad u_{ijk} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \qquad u_{ijkl} = \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}.
$$

On aura

$$
\begin{aligned}
u_i &= U_i F + U\pi_i F' \\
u_{ij} &= U_{ij} F + (\Sigma U_i \pi_j + U\pi_{ij}) F' + U\pi_i\pi_j F'' \\
u_{ijk} &= U_{ijk} F + (\Sigma U_{ij}\pi_k + \Sigma U_i \pi_{jk} + U\pi_{ijk}) F' \\
&\quad + (\Sigma U_i \pi_j \pi_k + U\Sigma \pi_{ij}\pi_k) F'' + U\pi_i\pi_j\pi_k F''' \\
u_{ijkl} &= U_{ijkl} F + (\Sigma U_{ijk}\pi_l + \Sigma U_{ij}\pi_{kl} + \Sigma U_i \pi_{jkl} + U\pi_{ijkl}) F' \\
&\quad + (\Sigma U_{ij}\pi_k\pi_l + \Sigma U_i \pi_{jk}\pi_l + U\Sigma \pi_{ij}\pi_{kl} + U\Sigma \pi_{ijk}\pi_l) F'' \\
&\quad + (\Sigma U_i \pi_j \pi_k \pi_l + U\Sigma \pi_{ij}\pi_k\pi_l) F''' + U\pi_i\pi_j\pi_k\pi_l F''''
\end{aligned}
$$

les sommes étant étendues à toutes les combinaisons possibles entre les indices pris à deux, à trois, ou à quatre, suivant le cas, les permutations des indices d'une même lettre n'étant pas distinctes. (Ex. $U_{ijk} = U_{kij}$, $\pi_{ij} = \pi_{ji}$).

Ces valeurs introduites dans l'équation (1) donneront des termes qui se répètent, par exemple des expressions de la forme

$$\sum_{ijkl} a_{ijkl} \Sigma \pi_j \pi_k \pi_l U_i,$$

qui devront être considérées autant de fois qu'il y a de termes dans les sommes Σ sans indices. On aura donc

$$\sum_{ijkl} a_{ijkl} \sum \pi_j \pi_k \pi_l U_i = 4 \sum_{ijkl} a_{ijkl} \pi_j \pi_k \pi_l U_i.$$

Par conséquent, il faudra écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{AUF^{IV}} &+ \left(4 \sum_{ijkl} a_{ijkl} \pi_j \pi_k \pi_l U_i + 6\,U \sum_{ijkl} a_{ijkl} \pi_{ij} \pi_k \pi_l + U \sum_{ijk} b_{ijk} \pi_i \pi_j \pi_k \right) F''' \\
&+ \left(6 \sum_{ijkl} a_{ijkl} \pi_k \pi_l U_{ij} + 12 \sum_{ijkl} a_{ijkl} \pi_{jk} \pi_l U_i + 3\,U \sum_{ijkl} \pi_{ij} \pi_{kl} \right. \\
&\quad \left. + 4\,U \sum_{ijkl} a_{ijkl} \pi_{ijk} \pi_l + 3 \sum_{ijk} b_{ijk} \pi_j \pi_k U_i + U \sum_{ijk} b_{ijk} \pi_{ij} \pi_k + U \sum_{ij} c_{ij} \pi_i \pi_j \right) F'' \\
&+ \left(4 \sum_{ijkl} a_{ijkl} \pi_l U_{ijk} + 6 \sum_{ijkl} a_{ijkl} \pi_{kl} U_{ij} + 4 \sum_{ijkl} a_{ijkl} \pi_{jkl} U_i \right. \\
&\quad + U \sum_{ijkl} a_{ijkl} \pi_{ijkl} + 3 \sum_{ijk} b_{ijk} \pi_k U_{ij} \\
&\quad + 3 \sum_{ijk} b_{ijk} \pi_{jk} U_i + U \sum_{ijk} b_{ijk} \pi_{ijk} + 2 \sum_{ij} c_{ij} \pi_j U_i \\
&\quad \left. + U \sum_{ij} c_{ij} \pi_{ij} + U \Sigma d_i \pi_i \right) F' + \mathcal{F}(U) F = 0.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\frac{\partial A}{\partial \pi_i} = 4 \sum_{jkl} a_{ijkl} \pi_j \pi_k \pi_l, \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial \pi_i \partial \pi_j} = 12 \sum_{kl} a_{ijkl} \pi_k \pi_l,$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial \pi_i \partial \pi_j \partial \pi_k} = 24 \sum a_{ijkl} \pi_l, \qquad \frac{\partial^4 A}{\partial \pi_i \partial \pi_j \partial \pi_k \partial \pi_l} = 24\, a_{ijkl},$$

la même observation s'étendant aux autres formes B, C et D, le résultat précédent se met sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
(5)\quad & \mathrm{AUF}^{\mathrm{IV}} + \left(\sum_i \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \pi_i} \mathrm{U}_i + \frac{\mathrm{U}}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \pi_{ij} + \mathrm{UB} \right) \mathrm{F}''' \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \mathrm{U}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{ijk} \frac{\partial^3 \mathrm{A}}{\partial \pi_i \partial \pi_j \partial \pi_k} \mathrm{U}_i \pi_{jk} \right. \\
& \qquad + \frac{\mathrm{U}}{8} \sum_{ijkl} \frac{\partial^4 \mathrm{A}}{\partial \pi_i \partial \pi_j \partial \pi_k \partial \pi_l} \pi_{ij} \pi_{kl} + \frac{\mathrm{U}}{6} \sum_{ijk} \frac{\partial^3 \mathrm{A}}{\partial \pi_i \partial \pi_j \partial \pi_k} \pi_{ijk} \\
& \qquad \qquad \left. + \sum_i \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \pi_i} \mathrm{U}_i + \frac{\mathrm{U}}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \pi_{ij} + \mathrm{CU} \right) \mathrm{F}'' \\
& + \left[\frac{1}{6} \sum_{ijk} \frac{\partial^3 \mathrm{A}}{\partial \pi_i \partial \pi_j \partial \pi_k} \mathrm{U}_{ijk} + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \frac{\partial^4 \mathrm{A}}{\partial \pi_i \partial \pi_j \partial \pi_k \partial \pi_l} \mathrm{U}_{ij} \pi_{kl} \right. \\
& \qquad + \frac{1}{6} \sum_{ijkl} \frac{\partial^4 \mathrm{A}}{\partial \pi_i \partial \pi_j \partial \pi_k \partial \pi_l} \pi_{jkl} \mathrm{U}_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \mathrm{U}_{ij} \\
& \qquad \left. + \frac{1}{2} \sum_{ijk} \frac{\partial^3 \mathrm{B}}{\partial \pi_i \partial \pi_j \partial \pi_k} \pi_{jk} \mathrm{U}_i + \sum_i \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \pi_i} \mathrm{U}_i + \mathrm{U} [\mathcal{F}(\mathrm{G}) - e\mathrm{G}] \right] \mathrm{F}' \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \mathcal{F}(\mathrm{U}) \mathrm{F} = 0,
\end{aligned}
$$

et doit avoir lieu sur la variété $\mathrm{G} = 0$. En prenant $\mathrm{F}(\mathrm{G}) = \mathrm{G}^p$, où p est un exposant constant donné, afin d'avoir des solutions à singularité algébrique de la forme

$$
(6) \qquad u = \mathrm{UG}^p,
$$

on voit que si les cas de $p = 1, 2, 3$ sont exclus, le premier terme du développement (5) est dans le voisinage de G de l'ordre $p - 4$, c'est-à-dire d'un ordre supérieur aux suivants. La somme (5) ne peut par conséquent être identiquement nulle, que si le coefficient de ce premier terme est nul sur G.

Par conséquent, il faudra avoir $\mathrm{A} = 0$, donc $\mathrm{G} = 0$ doit être une des caractéristiques de l'équation, soit une intégrale de $\mathrm{P} = 0$.

Dans ce cas, cette caractéristique trouvée, on aura

$$
(7) \qquad \mathrm{P}\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_m} \right) = \mathrm{P}'\mathrm{G} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \mathrm{P}'^2 \mathrm{G}^2.
$$

P' étant une fonction régulière.

Dans le développement (5), le premier terme sera, par conséquent, de l'ordre $p-2$ en G et pourra être englobé parmi les termes de cet ordre.

Le second terme devient maintenant le premier. Son ordre de grandeur est supérieur à celui des termes suivants. Il sera donc nécessaire que le coefficient en soit nul sur $G=0$, soit

$$\sum_i \frac{\partial A}{\partial \pi_i} U_i + \frac{U}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 A}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \pi_{ij} + UB = 0. \tag{8}$$

Mais puisque $A = P^2$,

$$\frac{\partial A}{\partial \pi_i} = 2P \frac{\partial P}{\partial \pi_i}; \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial \pi_i \partial \pi_j} = 2\left(P \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_j} + \frac{\partial P}{\partial \pi_i} \frac{\partial P}{\partial \pi_j}\right)$$
$$\frac{\partial^3 A}{\partial \pi_i \partial \pi_j \partial \pi_k} = 2\sum \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \frac{\partial P}{\partial \pi_k}; \qquad \frac{\partial^4 A}{\partial \pi_i \partial \pi_j \partial \pi_k \partial \pi_l} = 2\sum \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_k \partial \pi_l},$$

les sommes s'étendant comme précédemment à toutes les combinaisons distinctes des indices. Cela étant, la condition (8) devient par un calcul élémentaire

$$\sum_{ij} \frac{\partial P}{\partial \pi_i} \frac{\partial P}{\partial \pi_j} \pi_{ij} + B = 0, \tag{8'}$$

les autres termes contenant P en facteur et s'annulant sur $G=0$.

Considérons les courbes caractéristiques de l'équation $P=0$, qui sont données par le système différentiel

$$\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \pi_i} = \frac{dx_i}{ds}, \qquad -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{d\pi_i}{ds}. \tag{9}$$

La surface $G=0$ pourra être envisagée comme lieu d'une famille de ces courbes où s est un paramètre fixant un point de la courbe.

Sur chacune des courbes (9), qui sont en fait les bicaractéristiques de l'équation (1), on pourra tenir compte du système (9) et écrire

$$\sum_{ij} \frac{\partial P}{\partial \pi_i} \frac{\partial P}{\partial \pi_j} \pi_{ij} = 2\sum_{ij} \left(\frac{\partial P}{\partial \pi_j} \cdot \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} + \frac{\delta P}{\delta x_i}\right) \frac{dx_i}{ds} - 2\sum_i \frac{\delta P}{\delta x_i} \frac{dx_i}{ds}$$
$$= 2\frac{dP}{ds} - \sum_i \frac{\delta P}{\delta x_i} \frac{\partial P}{\partial \pi_i}.$$

Le symbole δ désignera dans ce qui suit des dérivations portant uniquement sur les coefficients p_{ij} de la forme P, qui sont des fonctions des x_i et, par conséquent, sur chaque bicaractéristique, des fonctions de s (et de certains paramètres).

En remarquant que P est une forme quadratique en π_i, on peut écrire

$$\sum_i \pi_i \frac{\partial P}{\partial \pi_i} = 2\sum \frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} \quad \text{donc} \quad P = \frac{dG}{ds},$$

et

$$\frac{dP}{ds} = G\frac{dP'}{ds} + P'\frac{dG}{ds} = G\left(P'^2 + \frac{dP'}{ds}\right).$$

Le terme $\frac{dP}{ds}$ contenant G en facteur s'annule et la condition (8) se réduit à

$$B - \sum \frac{\partial P}{\partial \pi_i}\frac{\partial P}{\partial x_i} = 0,$$

ce qui revient à dire que dans l'espace extérieur à G le premier membre doit contenir G en facteur. Comme c'est une forme cubique des variables π_i, nous poserons nécessairement

$$B = \mathcal{B}P + \sum_i \frac{\partial P}{\partial \pi_i}\frac{\partial P}{\partial x_i}, \tag{10}$$

$\mathcal{B}$ étant une forme linéaire en π_i, soit $\mathcal{B} = \Sigma\beta_i\pi_i$, et une fonction régulière des x_i.

Par conséquent, si l'on veut que l'équation (1) admette une solution à singularité algébrique sur G, le groupe des termes du troisième ordre ne peut plus être donné arbitrairement.

Posons

$$\Delta = \sum_{ij} p_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{et} \quad \Theta = \sum \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

auxquels opérateurs on peut associer les formes

$$P = \sum_{ij} p_{ij}\pi_i\pi_j \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \sum_i \beta_i\pi_i.$$

On aura

$$\Delta^2 = \sum_{ijkl} p_{ij}p_{kl}\frac{\partial x^4}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k\partial x_l} + 2\sum_{ijkl} p_{ij}\frac{\partial p_{kl}}{\partial x_i}\frac{\partial^3}{\partial x_j\partial x_k\partial x_l} + \sum_{ijkl} p_{ij}\frac{\partial^2 p_{kl}}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}$$

et

$$\Theta\Delta = \sum_{ijk} p_{ij}\beta_k \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{ijk} \beta_k \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

opérateurs auxquels on associe les formes

$$P^2 + \sum_i \frac{\partial P}{\partial \pi_i} \frac{\delta P}{\delta x_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \frac{\delta^2 P}{\delta x_i \delta x_j} \quad \text{et} \quad \varpi P + \sum_i \frac{\partial \varpi}{\partial \pi_i} \frac{\delta P}{\delta x_i}.$$

En remarquant que les groupes d'ordre 4 et 3 sont précisément ceux qui résultent de la forme de A et B, nous sommes conduit à la proposition suivante :

Pour que l'équation (1) *à caractéristiques doubles admette une solution à singularité algébrique, elle doit être de la forme*

$$\Delta^2 u + \Theta\Delta u + \Omega u = 0 \tag{11}$$

avec

$$\Omega u = \sum c_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + eu,$$

les coefficients c_{ij}, d_i *et* e *étant des fonctions holomorphes arbitraires des* x_i.

4. Le conoïde caractéristique. — Le conoïde caractéristique étant le lieu des bicaractéristiques issues de M, nous prendrons, avec M. Hadamard [1], un système de m quantités $p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0m}$, remplissant la condition $P(p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0m}) = 0$ et, avec les valeurs initiales $p_i = p_{0i}$ pour $s = 0$, nous formerons l'intégrale du système

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{14}$$

Les rapports mutuels des quantités p_{0i} dépendant de $m - 2$ paramètres, le lieu de la courbe obtenue sera une surface.

---

(1) *Voir* J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, p. 115 et suivantes.

Mais, en laissant de côté la condition $P(p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0m}) = 0$, les intégrales du système (14) peuvent être interprétées comme les géodésiques de l'élément linéaire $\Pi = \frac{1}{\Delta}\sum_{ij} \varpi_{ij} dx_i dx_j$, où ϖ_{ij} sont les mineurs des éléments p_{ij} dans le discriminant Δ de P. Aussi longtemps qu'il sera possible de joindre un point $N(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, à M par une de ces géodésiques, les considérations précédentes restent valables et nous supposerons que, le point M étant donné, la région $\mathcal{R}$ où se trouve le point N est telle que cette validité persiste.

Ceci fixé, posons

$$P_i = sp_i, \qquad q_i = sp_{0i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

et formons l'expression

$$\Gamma = P(P_1, P_2, \ldots, P_m; x_1, x_2, \ldots, x_m);$$

Γ est le carré de la distance géodésique du point N au point M, calculée à l'aide de l'élément linéaire Π. On aura $\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i} = \pi_i = 2P_i = 2sp_i$ et la fonction Γ sera une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$P\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}, \frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\Gamma}{\partial x_m}; x_1, x_2, \ldots, x_m\right) = 4\Gamma, \tag{12}$$

$\Gamma = 0$ *est l'équation du conoïde caractéristique.*

Nous utiliserons la première série d'équations des géodésiques sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial \pi_i} = 4s\frac{dx_i}{ds}. \tag{13}$$

5. La solution élémentaire. — Supposons maintenant qu'il s'agisse de trouver une solution élémentaire pour l'équation (11), que nous écrirons d'ailleurs sous la forme (1), en tenant compte de la condition (10). La forme de la solution sera

$$u = U\Gamma^p, \tag{14}$$

p étant un exposant constant donné, U étant une fonction régulière.

En introduisant l'expression de cette solution dans l'équation et en tenant compte de ce qu'on peut remplacer partout P par 4Γ, on aura

$$\begin{aligned}
&p(p-1)(p-2)\Gamma^{p-3}\left[\mathrm{U}\sum_{ij}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_i}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_j}\pi_{ij}+\mathrm{UB}\right]\\
&\quad+p(p-1)\Gamma^{p-2}\Bigg[\sum_{ij}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_i}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_j}\mathrm{U}_{ij}+8(p-2)\sum_{i}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_i}\mathrm{U}_i\\
&\qquad+\sum_{ijk}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_k}+\ldots\right)\pi_{jk}\mathrm{U}_i+\sum_{i}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \pi_i}\mathrm{U}_i\\
&\qquad+16(p-2)(p-3)\mathrm{U}+4(p-2)\mathrm{U}\sum_{ij}\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\pi_{ij}\\
&\qquad+\frac{\mathrm{U}}{4}\sum_{ijkl}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \pi_k \partial \pi_l}+\ldots\right)\pi_{ij}\pi_{kl}\\
&\qquad+\frac{\mathrm{U}}{3}\sum_{ijk}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_k}+\ldots\right)\pi_{ijk}\\
&\qquad\qquad+\frac{\mathrm{U}}{2}\sum\frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\pi_{ij}+\mathrm{CU}\Bigg]\\
&\qquad\qquad+\text{termes d'ordre supérieur en }\Gamma=0.
\end{aligned}$$

Un calcul facile à faire montrera que

$$\mathrm{U}\sum_{ij}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_i}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_j}\pi_{ij}+\mathrm{UB}=(8\mathrm{P}+\varpi\mathrm{P})\mathrm{U},$$

de sorte que le terme en Γ^{p-3} est en réalité de l'ordre de Γ^{p-2}, dont il enrichit le coefficient de la quantité

$$[32(p-2)+4(p-2)\varpi]\mathrm{U}.$$

En répétant un raisonnement déjà fait, on trouve que sur Γ on doit avoir

$$\begin{aligned}
(15)\quad&\sum_{ij}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_i}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_j}\mathrm{U}_{ij}+\sum_{ijk}\left[8(p-2)\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_i}+\left(\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_k}+\ldots\right)\pi_{jk}+\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \pi_i}\right]\mathrm{U}_i\\
&+\Bigg[32(p-2)+4(p-2)\varpi+16(p-2)(p-3)+\sum_{ij}\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\pi_{ij}\\
&\quad+\frac{1}{4}\sum_{ijkl}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \pi_k \partial \pi_l}+\ldots\right)\pi_{ij}\pi_{kl}\\
&\quad\quad+\frac{1}{3}\sum_{ijk}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \pi_k}+\ldots\right)\pi_{ijk}+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\pi_{ij}+\mathrm{C}\Bigg]\mathrm{U}=0.
\end{aligned}$$

L'avantage de l'introduction des géodésiques dans ces calculs apparaîtra plus clairement encore, si l'on adopte de nouvelles coordonnées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m-1}$ et s.

Les λ_i définissant la direction initiale de la géodésique, à chaque valeur de s correspondra un de ses points.

Calculons le long de chaque géodésique les termes en U_{ij}, U_i et U.

Terme en U_{ij}

$$\sum_{ij} \frac{\partial P}{\partial \pi_i}\frac{\partial P}{\partial \pi_j} U_{ij} = 16 s^2 \sum_{ij} U_{ij} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_j}{ds} = 16 s^2 \frac{d^2 U}{ds^2} - 16 s^2 \sum_i U_i \frac{d^2 x_i}{ds^2}.$$

Termes en U_i

$$8(p-2)\sum_i \frac{\partial P}{\partial \pi_i} U_i = 32(p-2)s \sum_i U_i \frac{dx_i}{ds} = 32(p-2)s\frac{dU}{ds}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\sum_{ijk} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\frac{\partial P}{\partial \pi_k}\pi_{jk} &= 4s \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial \pi_j}\left(\frac{\partial P}{\partial \pi_i}\right)\frac{\partial \pi_j}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds} \\
&= 4s \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) - 4s \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial P}{\partial \pi_i}\right) \\
&= 16 s \frac{d}{ds}\left(s \frac{\partial x_i}{\partial s}\right) - 4s \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial P}{\partial \pi_i}\right) \\
&= 16 s \frac{dx_i}{ds} + 16 s^2 \frac{d^2 x_i}{ds^2} - 4s \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial P}{\partial \pi_i}\right).
\end{aligned}$$

De même

$$\sum_{jk} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_k}\frac{\partial P}{\partial \pi_j}\pi_{jk} = 16 s \frac{dx_i}{ds} + 16 s^2 \frac{d^2 x_i}{ds^2} - 4s \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial P}{\partial \pi_i}\right).$$

On a, et en vertu de la relation de réciprocité entre les coefficients des deux formes P et Π,

$$\sum_{jk} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_j \partial \pi_k}\pi_{jk} = 2\sum_{jk} p_{jk}\pi_{jk} = \frac{4}{\Delta}\sum_{jk} p_{jk}(\varpi_{jk} + \ldots) = 4m + s\mathcal{L}(s),$$

la fonction $\mathcal{L}(s)$ étant holomorphe en s.

Cela permet d'écrire :

$$\sum_{jk} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_j \partial \pi_k}\pi_{jk}\frac{\partial P}{\partial \pi_i} = 4s\frac{dx_i}{ds}\sum_{jk}\frac{\partial^2 P}{\partial \pi_j \partial \pi_k}\pi_{jk} = 4s[4m + s\mathcal{L}(s)]\frac{dx_i}{ds},$$

et finalement

$$\sum_{ijk}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial\pi_i\partial\pi_j}\frac{\partial P}{\partial\pi_k}+\ldots\right)\pi_{jk}U_i$$
$$=32s\frac{dU}{ds}+32s^2\sum_i U_i\frac{d^2x_i}{ds^2}-8s\sum\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial P}{\partial\pi_i}\right)U_i+4s[4m+s\mathcal{L}(s)]\frac{dU}{ds}.$$

On se rend compte que l'équation (15) revient sur chaque géodésique à une équation différentielle ordinaire, à condition de pouvoir exprimer le terme

$$(16)\qquad \sum_i\left[\frac{\partial B}{\partial\pi_i}-8s\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial P}{\partial\pi_i}\right)+16s^2\frac{d^2x_i}{ds^2}\right]U_i$$

en fonction de $\frac{dU}{ds}$. On a

$$\frac{\partial B}{\partial\pi_i}=P\frac{\partial\varpi}{\partial\pi_i}+\varpi\frac{\partial P}{\partial\pi_i}+\sum_j\frac{\partial^2 P}{\partial\pi_i\partial\pi_j}\frac{\delta P}{\delta x_j}+\sum_j\frac{\partial P}{\partial\pi_j}\frac{\delta}{\delta x_j}\left(\frac{\partial P}{\partial\pi_i}\right)$$

et

$$-8s\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial P}{\partial\pi_i}\right)=-8s\sum_j\frac{\delta}{\delta x_j}\left(\frac{\partial P}{\partial\pi_i}\right)\frac{dx_j}{ds}=-2\sum_j\frac{\partial P}{\partial\pi_j}\frac{\delta}{\delta x_j}\left(\frac{\partial P}{\partial\pi_i}\right).$$

Donc

$$\frac{\partial B}{\partial\pi_i}-8s\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial P}{\partial\pi_i}\right)=P\frac{\partial\varpi}{\partial\pi_i}+\varpi\frac{\partial P}{\partial\pi_i}+\sum_j\frac{\partial^2 P}{\partial\pi_i\partial\pi_j}\frac{\delta P}{\delta x_i}-\sum_j\frac{\partial P}{\partial\pi_j}\frac{\delta}{\delta x_j}\left(\frac{\partial P}{\partial\pi_i}\right).$$

Mais, en même temps,

$$\frac{\delta P}{\delta x_j}=\frac{\partial P}{\partial x_j}-\sum_k\frac{\partial P}{\partial\pi_k}\pi_{jk}=4\frac{\partial\Gamma}{\partial x_j}-\sum_k\frac{\partial P}{\partial\pi_k}\pi_{jk}=4\pi_j-\sum_k\frac{\partial P}{\partial\pi_k}\pi_{jk},$$

et, par suite,

$$\sum_j\frac{\partial^2 P}{\partial\pi_i\partial\pi_j}\frac{\delta P}{\delta x_j}=4\sum_j\frac{\partial}{\partial\pi_j}\left(\frac{\partial P}{\partial\pi_i}\right)\pi_j-\sum_{jk}\frac{\partial}{\partial\pi_j}\left(\frac{\partial P}{\partial\pi_i}\right)\frac{\partial P}{\partial\pi_k}\pi_{jk}$$
$$=4\frac{\partial P}{\partial\pi_i}-\sum_{jk}\frac{\partial^2 P}{\partial\pi_i\partial\pi_j}\frac{\partial P}{\partial\pi_k}\pi_{jk}.$$

Un calcul analogue donne

$$\sum \frac{\partial P}{\partial \pi_j} \frac{\delta}{\delta x_j}\left(\frac{\partial P}{\partial \pi_i}\right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial P}{\partial \pi_i}\right)\frac{\partial P}{\partial \pi_j} - \sum_{jk} \frac{\partial P}{\partial \pi_j} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_k} \pi_{jk}$$
$$= 4s \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial P}{\partial \pi_i}\right) - \sum_{jk} \frac{\partial P}{\partial \pi_k} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \pi_{jk}$$
$$= 16 s^2 \frac{d^2 x_i}{ds^2} + 16 s \frac{dx_i}{ds} - \sum_{jk} \frac{\partial P}{\partial \pi_k} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \pi_{jk}.$$

Finalement, on peut écrire

$$\frac{\partial B}{\partial \pi_i} - 8s \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\partial P}{\partial \pi_i}\right) = P \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \pi_i} + \mathcal{B} \frac{\partial P}{\partial \pi_i} - 16 s^2 \frac{d^2 x_i}{ds^2},$$

et, compte tenu du fait que sur $\Gamma = 0$, $P = 0$, l'expression (16) se réduit à $4s\mathcal{B}\frac{dU}{ds}$.

Termes en U. — Nous calculerons maintenant les premiers termes des développements suivant les puissances de s des termes du coefficient de U.

$$\sum_{ijkl} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_k \partial \pi_l} \pi_{ij} \pi_{kl} = 16 m^2 + \ldots$$
$$\sum_{ijkl} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_k} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_j \partial \pi_l} \pi_{ij} \pi_{kl} = 16 m + \ldots$$
$$\sum_{ijkl} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_i \partial \pi_l} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_j \partial \pi_k} \pi_{ij} \pi_{kl} = 16 m + \ldots.$$

Les autres termes commencent par des puissances plus élevées de s. $\mathfrak{L}(s)$ et $\mathfrak{Q}(s)$ désignant des fonctions holomorphes de s, l'équation différentielle qui détermine les valeurs de U *sur le conoïde* sera

$$(17) \qquad 16 s^2 \frac{d^2 U}{ds^2} + 16 s\,[2(p-1) + m + s\mathfrak{L}(s)]\frac{dU}{ds}$$
$$+ [16(p-2)(p-3) + 32(p-2)$$
$$+ 16(p-2)m + 8m + 4m^2 + s\mathfrak{Q}(s)]\,U = 0,$$

donc une équation du type de Fuchs.

En posant

$$a = 2(p-1) + m \qquad \text{et} \qquad b = (p-2)^2 + (p-2)(m+1) + \frac{m(m+2)}{4},$$

on aura comme équation caractéristique $r(r-1)+ar+b=0$ dont les racines sont

$$r_1 = -\frac{m}{2} - p + 1; \qquad r_2 = -\frac{m}{2} - p + 2.$$

Or, *nous avons besoin d'une intégrale particulière finie et régulière à l'origine*, ce qui nous permettra de prendre $r_1 = 0$ ou $r_2 = 0$. Par conséquent, *l'exposant p sera de l'une des formes*

$$(18) \qquad p_1 = -\frac{m}{2} + 1 \quad \text{ou} \quad p_2 = -\frac{m}{2} + 2.$$

6. Conclusions. — En conclusion, nous avons obtenu la forme des équations du quatrième ordre à caractéristiques doubles, qui admettent une intégrale à singularité algébrique, et avons montré ensuite comment il convient de conduire les calculs pour réaliser une solution élémentaire de ces équations, notre méthode étant, bien entendu, applicable aussi à d'autres cas plus généraux. Il est à peu près évident que l'opération définie par la formule (17) est invariante par rapport à toute transformation ponctuelle effectuée sur les variables indépendantes.

On peut néanmoins montrer qu'elle s'exprime à l'aide des paramètres de Beltrami $\Delta_1(U, \Gamma)$.

En effet, on a, comme l'a montré M. Hadamard (¹),

$$\Delta_1(U, \Gamma) = 2s\frac{dU}{ds}.$$

Par conséquent

$$\Delta_1[\Delta_1(U, \Gamma), \Gamma] = 2s\frac{d}{ds}\left(2s\frac{dU}{ds}\right) = 4s^2\frac{d^2U}{ds^2} + 4s\frac{dU}{ds},$$

donc

$$4s^2\frac{d^2U}{ds^2} = \Delta_1[\Delta_1(U, \Gamma), \Gamma] - 2\Delta_1(U, \Gamma).$$

D'ailleurs, nous aurions pu mettre dès le début l'équation (11) sous forme invariante par rapport à toute transformation ponctuelle et donner à nos calculs un nouvel aspect. Nous nous réservons cette tâche pour un mémoire ultérieur.

(¹) *Le problème de Cauchy*, p. 126.