JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. BRELOT

Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique (suite)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 285-306.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_285_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique (suite);

PAR M. BRELOT.

(Alger.)

1. Je poursuis ici, avec les mêmes notations, l'étude sur la « standard deviation » σ entreprise dans le Mémoire du même titre (et qui sera désigné par M) paru dans ce journal en 1936 (fasc. II). La « méthode directe » (concernant une probabilité relative à σ) sera perfectionnée par de meilleures approximations du champ d'intégration R (dans l'espace euclidien à n dimensions) précisé n° 7 de (M), et l'on traitera de même la probabilité analogue relative à σ^2. L'idée directrice sera d'utiliser cette curieuse propriété bien connue des espaces à un grand nombre de dimensions [1] que l'aire de la sphère y est presque entièrement localisée au voisinage d'un plan diamétral. D'une part, seront établis des résultats théoriques [2] concernant le cas $n \to \infty$

[1] *Voir*, par exemple, BOREL, *Introduction géométrique à quelques théories physiques* (Gauthier-Villars), Chap. V et plus spécialement page 65.

Des considérations géométriques dans l'espace à n dimensions, similaires à celles que j'ai introduites dans cette étude, ont été faites, comme me l'a signalé au Congrès d'Oslo M. Gumbel, par R.-A. Fisher (*voir*, par exemple, *Biometrika*, X, 1914-1915, p. 507), dans des travaux qui ont une certaine parenté avec les recherches ci-dessus, puisqu'ils concernent, bien qu'à un tout autre point de vue, le cas particulier où tous les y_i (ou x_i) seraient égaux, c'est-à-dire σ_{y_i} (ou σ_{x_i}) nul.

[2] Ils ont été annoncés en partie dans des notes en bas de page d'un article du *Bulletin de la Station d'Aquiculture et de Pêche de Castiglione* (1935, fasc. I, paru en 1936), dans une Communication au Congrès d'Oslo (15 juillet 1936) et dans une Note du *Bull. de la Soc. de Physique* (déc. 1936).

auquel je faisais allusion en terminant (M); leur intérêt ne sera pas seulement mathématique, puisqu'ils fournissent en un sens des bornes aux limites pratiques d'erreur qu'on peut espérer. D'autre part, on donnera des procédés semi-géométriques, contenant comme cas particuliers les méthodes de (M) et fournissant en un certain sens les meilleures limitations pratiques possibles.

I. — Résultats théoriques ($n \to +\infty$).

2. Considérons d'abord, dans chacune des hypothèses G_a ou G_p, la probabilité (antérieure ou postérieure) désignée par $P(\lambda, n)$ pour que $|\sigma_{x_i} - \sigma_{y_i}| < \lambda$.

Dans le cas *antérieur*, d'après G_a

$$(1) \qquad P(\lambda, n) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int \cdots \int e^{-k^2 \Sigma (x_i - y_i)^2} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

étendue (dans l'espace à n dimensions) au champ R contenant le point fixe $M_0(y_1, y_2, \ldots, y_n)$; et il est immédiat que P ne dépend que de k, λ, n et σ_{y_i}.

De même dans le cas *postérieur*, d'après G_p

$$(1') \qquad P(\lambda, n) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int \cdots \int e^{-k^2 \Sigma (x_i - y_i)^2} dy_1\, dy_2 \ldots dy_n,$$

étendue au même champ, les y_i devenant les coordonnées courantes et le point fixe M_0 analogue étant $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; cet autre P ne dépend que de k, λ, n et σ_{x_i}.

On va démontrer que, *dans les deux cas*, λ *et* k *étant fixés*, σ *désignant respectivement* σ_{y_i} *ou* σ_{x_i}, *et* $n \to \infty$, on a, en posant $\varepsilon_q = \frac{1}{k\sqrt{2}}$:

1° Si $\begin{cases} \sigma \geqq \sigma_0 \text{ fixe} \geqq 0, \\ \lambda > \sqrt{\sigma_0^2 + \varepsilon_q^2} - \sigma_0 \quad \text{ou} \quad \sigma_0 > \dfrac{\varepsilon_q^2 - \lambda^2}{2\lambda}, \end{cases}$ $\qquad P \to 1$; *uniformément en* σ

2° Si $\begin{cases} \sigma \leqq \sigma_0 \text{ fixe} > 0, \\ \lambda < \sqrt{\sigma_0^2 + \varepsilon_q^2} - \sigma_0 \quad \text{ou} \quad \sigma_0 < \dfrac{\varepsilon_q^2 - \lambda^2}{2\lambda}, \end{cases}$ $\qquad P \to 0$; *uniformément en* σ

3° Si $\lambda = \sqrt{\sigma^2 + \varepsilon_q^2} - \sigma \quad \text{ou} \quad \sigma = \dfrac{\varepsilon_q^2 - \lambda^2}{2\lambda} \geqq 0, \qquad P \to \dfrac{1}{2}.$

En particulier, si $\lambda > \varepsilon_q$, on peut prendre $\sigma_0 = 0$ et $P \to 1$ uniformément par rapport à σ quelconque; c'est un résultat de (M) n° 8.

3. LEMME. — S_n *étant l'aire de la sphère unité dans l'espace à n dimensions*

$$\text{(L)} \qquad \frac{S_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\sqrt{\frac{n+\nu}{2}}+\alpha} e^{-u^2} u^{n-1}\, du \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha\sqrt{2}} e^{-u^2}\, du,$$

quand α *et* ν *étant fixés quelconques réels*, $n \to +\infty$.

Cela résulte, comme cas particulier, d'une proposition générale établie dans les *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* de Polya et Szegö (Tome I, Section II, n° 212, p. 80).

On en déduit immédiatement que, $\beta > 0$ et ν quelconque étant fixés alors que $n \to +\infty$,

$$\text{(L')} \qquad \frac{S_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\beta\sqrt{\frac{n+\nu}{2}}} e^{-u^2} u^{n-1}\, du$$

tend vers zéro, $\frac{1}{2}$ ou 1 suivant que $\beta < 1$, $\beta = 1$, $\beta > 1$ [1].

4. Considérons alors le champ R d'intégration. Sa section droite (S) passant par le point M_0 est une région sphérique de centre Ω dans un plan à $(n-1)$ dimensions [si $\sigma \leq \lambda$, sphère de rayon $(\sigma+\lambda)\sqrt{n}$; si $\sigma > \lambda$ couche sphérique de rayons $(\sigma+\lambda)\sqrt{n}$ et $(\sigma-\lambda)\sqrt{n}$]. Soit ρ la distance du point courant à ce centre Ω

$$(2) \qquad P(\lambda, n) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int_{(S)} e^{-k^2\rho^2}\, dv,$$

dv désignant l'élément de volume dans l'espace à $(n-1)$ dimensions où se trouve S. Raisonnons maintenant dans cet espace à $(n-1)$ dimensions.

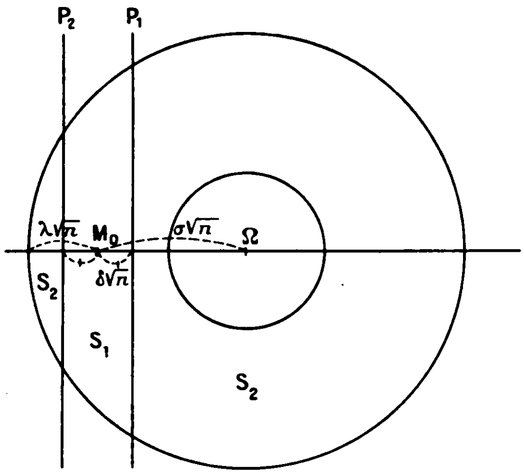
---

[1] Ce résultat L' pour $\beta \neq 1$ peut se déduire du n° 6 de (M); c'est aussi un cas particulier d'un autre énoncé (Exercice 201, page 78, Tome I) de l'Ouvrage précité de Polya et Szegö.

Menons deux plans $P_1 P_2$ perpendiculaires à la droite $M_0\Omega$ et à une même distance $\delta\sqrt{n}$ de M_0 (δ fixé, $0 < \delta < \lambda$). Le champ S est partagé en une portion (S_1) comprise entre ces plans et le reste (S_2)

$$(3) \qquad P(\lambda, n) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int_{(S_1)} e^{-k^2\rho^2}\, dv + \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int_{(S_2)} e^{-k^2\rho^2}\, dv.$$

Fig. 1.



Champ S dans un espace à $(n-1)$ dimensions.

On voit d'abord, en majorant S_2 par l'espace entier non compris entre les plans, que le second terme est moindre que

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_{\delta\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-k^2x^2}\, dx,$$

donc tend uniformément vers zéro quand $n \to \infty$.

Passons au premier terme T_1. Coupons la sphère de centre Ω et rayon $(\sigma + \lambda)\sqrt{n}$ par un plan variable parallèle à $P_1 P_2$, à la distance algébrique x de M_0. Soit $R(x)$ le rayon de la section. Alors

$$(4) \qquad T_1 = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} e^{-k^2x^2} \left[\int_0^{R(x)} \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-2} e^{-k^2r^2}\, S_{n-2}\, r^{n-3}\, dr \right] dx,$$

où

$$R(x) = \sqrt{(\sigma+\lambda)^2 n - (\sigma\sqrt{n} + x)^2} = \sqrt{2\sigma\left(\lambda - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \lambda^2 - \frac{x^2}{n}}\,\sqrt{n}.$$

Le crochet de l'expression (4) s'écrit donc

$$\frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon_q}\sqrt{2\sigma\left(\lambda - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \lambda^2 - \frac{x^2}{n}}\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-u^2} u^{n-3}\, du,$$

où le coefficient de $\sqrt{\frac{n}{2}}$ dans la limite supérieure est compris entre

$$\frac{1}{\varepsilon_q}\sqrt{2\sigma(\lambda-\delta)+\lambda^2-\delta^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_q}\sqrt{2\sigma(\lambda+\delta)+\lambda^2}.$$

Supposons alors $\sigma \geqq \sigma_0 > \dfrac{\varepsilon_q^2 - \lambda^2}{2\lambda}$.

Puisque $2\lambda\sigma_0 + \lambda^2 > \varepsilon_q^2$, on peut choisir δ assez petit pour que

$$2\sigma_0(\lambda-\delta)+\lambda^2-\delta^2 > \varepsilon_q^2,$$

d'où

$$\frac{1}{\varepsilon_q}\sqrt{2\sigma(\lambda-\delta)+\lambda^2-\delta^2} \geqq \frac{1}{\varepsilon_q}\sqrt{2\sigma_0(\lambda-\delta)+\lambda^2-\delta^2},$$

nombre fixe > 1.

D'après le lemme (L'), avec un tel δ, le crochet de (4) tend uniformément vers 1, donc aussi T_1, donc enfin P.

Supposons au contraire $\sigma \leqq \sigma_0 < \dfrac{\varepsilon_q^2 - \lambda^2}{2\lambda}$.

On peut choisir δ assez petit pour que

$$2\sigma_0(\lambda+\delta)+\lambda^2 < \varepsilon_q^2,$$

d'où

$$\frac{1}{\varepsilon_q}\sqrt{2\sigma(\lambda+\delta)+\lambda^2} \leqq \frac{1}{\varepsilon_q}\sqrt{2\sigma_0(\lambda+\delta)+\lambda^2},$$

nombre fixe < 1.

Alors le crochet de (4) tend uniformément vers zéro, donc T_1, donc aussi P.

Reste le cas intermédiaire $\sigma = \dfrac{\varepsilon_q^2 - \lambda^2}{2\lambda} \geqq 0$.

Alors

$$\frac{1}{\varepsilon_q}\sqrt{2\sigma\left(\lambda-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)+\lambda^2-\frac{x^2}{n}}\sqrt{\frac{n}{2}}=\sqrt{\frac{n}{2}}-\frac{\sigma x}{\varepsilon_q^2\sqrt{2}}+\varepsilon,$$

où ε tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quand x est fixé comme σ.

D'après le lemme (L) le crochet de (4) a comme limite, pour chaque valeur de x, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{\sigma x}{\varepsilon_q^2}} e^{-u^2}du$.

Passant à la limite sous le signe $\int$ de (4) pris au sens de Lebesgue, il vient, comme limite de T_1, donc de P

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{\sigma x}{\varepsilon_q^2}} e^{-u^2}\,du\right]dx$$

ou

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-u^2}\,du\right]dx+\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{-\frac{\sigma x}{\varepsilon_q^2}} e^{-u^2}\right]dx.$$

Le premier terme vaut $\frac{1}{2}$; le second est nul puisque la fonction intégrée est impaire. La limite cherchée est donc bien $\frac{1}{2}$.

5. Études maintenant de la même manière, sous les mêmes hypothèses G_a ou G_p, *la probabilité antérieure ou postérieure* $W(\mu, n)$ *pour que*

$$|\sigma_{x_i}^2-\sigma_{y_i}^2|<\mu.$$

Dans le cas antérieur, d'après G_a

$$W(\mu, n)=\left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^n\int\cdots\int e^{-k^2\Sigma(x_i-y_i)^2}\,dx_1\ldots dx_n, \tag{5}$$

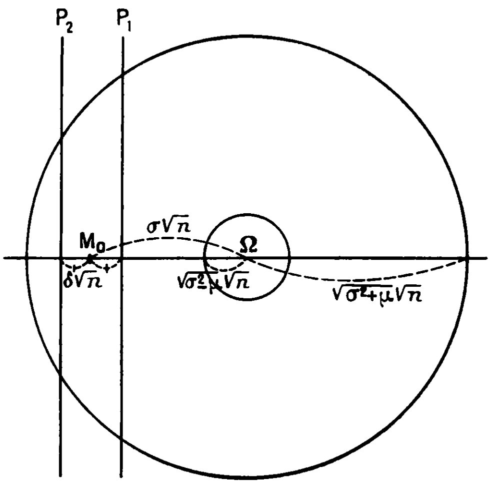
étendue à un champ R′ analogue à R. En se reportant à (M) n° 7, on voit que (R′) est, dans l'espace à n dimensions, une région cylindrique indéfinie dont la section droite (S′) passant par le point $M_0(y_1, \ldots, y_n)$ est une région sphérique de centre Ω $\left(\Omega M_0=\sigma_{y_i}\sqrt{n}\right)$: ou bien la sphère entière de rayon $\sqrt{\sigma_{y_i}^2+\mu}\sqrt{n}$ (cas de $\sigma_{y_i}^2\leq\mu$) dans le plan à $(n-1)$ dimensions de section droite, ou bien la couche sphérique de rayons extrêmes $\sqrt{\sigma_{y_i}^2+\mu}\sqrt{n}$ et $\sqrt{\sigma_{y_i}^2-\mu}\sqrt{n}$ (cas de $\sigma_{y_i}^2>\mu$).

Dans le cas postérieur avec G_p

$$W(\mu, n)=\left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^n\int\cdots\int e^{-k^2\sum(x_i-y_i)^2}dy_1\,dy_2\ldots dy_n$$

étendue à un champ analogue à R′ autour du point fixe $M_0(x_1, \ldots, x_n)$, les y_i devenant les coordonnées courantes.

Fig. 2.



Champ δ′ de l'espace à $(n-1)$ dimensions.

Il est immédiat que W *ne dépend que de* k, μ, n *et de* σ, *c'est-à-dire* σ_{y_i} *ou* σ_{x_i} *respectivement. On va démontrer que, dans les deux cas, si* k, μ *sont fixes et* σ *borné, on a lorsque* $n\to\infty$,

$$\begin{array}{lll} \text{si} & \mu>\varepsilon_q^2, & W\to 1;\\ \text{si} & \mu<\varepsilon_q^2, & W\to 0;\\ \text{si} & \mu=\varepsilon_q^2, & W\to \frac{1}{2}, \end{array}$$

avec uniformité de convergence par rapport à σ *borné.*

Sauf pour le cas intermédiaire, il y a peu à changer à la démonstration relative à $P(\lambda, n)$. On la reprendra en s'aidant de la figure correspondante ci-dessus (tracée dans le cas $\sigma^2>\mu$) et observant que $R(x)$

vaut alors

$$R(x)=\sqrt{\sigma^2+\mu-\left(\sigma+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2}\sqrt{n}=\sqrt{\mu-\frac{2\sigma x}{\sqrt{n}}-\frac{x^2}{n}}\sqrt{n}.$$

La borne supérieure imposée à σ permet le choix d'un δ fixe moindre que $\sqrt{\sigma^2-\mu}-\sigma$ (qui, si $\sigma^2>\mu$, est lui-même moindre que $\sigma-\sqrt{\sigma^2-\mu}$).

Mais l'uniformité de convergence du cas intermédiaire demande une démonstration nouvelle. Il s'agit de voir que (k, δ étant fixes) et $n\to+\infty$,

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}}e^{-k^2x^2}\left[\frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^{\sqrt{1-\frac{2\sigma x}{\varepsilon_q^2\sqrt{n}}-\frac{x^2}{\varepsilon_q^2 n}}\sqrt{\frac{n}{2}}}e^{-u^2}u^{n-3}\,du\right]dx\to\frac{1}{2},$$

uniformément par rapport à σ borné (¹).

Il suffit, grâce à (L′) que, dans les mêmes conditions (k, δ fixés, σ borné) et A étant un nombre fixe >0 quelconque,

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-A}^{A}e^{-k^2x^2}\left[\frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}\int_{\sqrt{\frac{n-3}{2}}}^{\sqrt{1-\frac{2\sigma x}{\varepsilon_q^2\sqrt{n}}-\frac{x^2}{\varepsilon_q^2 n}}\sqrt{\frac{n}{2}}}e^{-u^2}u^{n-3}\,du\right]dx\to 0.$$

Mais alors $|x|$ est borné comme σ, de sorte que pour n assez grand

$$\sqrt{1-\frac{2\sigma x}{\varepsilon_q^2\sqrt{n}}-\frac{x^2}{\varepsilon_q^2 n}}\sqrt{\frac{n}{2}}=\sqrt{\frac{n-3}{2}}-\frac{\sigma x}{\varepsilon_q^2\sqrt{2}}+\varepsilon,$$

où ε tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

En remarquant que

$$\frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}\max e^{-u^2}u^{n-3}\to\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \text{limite finie},$$

(¹) Observer que, *dans le cas intermédiaire du premier théorème,* sous les hypothèses : k fixe, λ et σ variables assujettis à $\sigma=\frac{\varepsilon_q^2-\lambda^2}{2\lambda}$ et σ borné, l'*uniformité de convergence* résulte aussi de cette même proposition, *donc s'étend en ce sens à* $P(\lambda, n)$

tout revient à établir que

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-A}^{+A} e^{-k^2x^2}\left[\frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}\int_{\sqrt{\frac{n-3}{2}}}^{\sqrt{\frac{n-3}{2}}-\frac{\sigma x}{\varepsilon_\eta^2\sqrt{2}}} e^{-u^2}u^{n-3}\,du\right]dx \to 0 \text{ uniformément.}$$

Or, cette expression s'écrit encore,

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_0^{A} e^{-k^2x^2}\left[\frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^{\frac{\sigma x}{\varepsilon_\eta^2\sqrt{2}}}\left\{ e^{-\left(\sqrt{\frac{n-3}{2}}+v\right)^2}\left(\sqrt{\frac{n-3}{2}}+v\right)^{n-3} - e^{-\left(\sqrt{\frac{n-3}{2}}-v\right)^2}\left(\sqrt{\frac{n-3}{2}}-v\right)^{n-3}\right\}dv\right]dx.$$

Pour n assez grand, la quantité entre $\{\ \}$ est >0 puisque (*voir* M, n° **8**) pour la courbe $e^{-x^2}x^{n-3}$, à équidistance de l'abscisse $\sqrt{\frac{n-3}{2}}$ du maximum, l'ordonnée de droite est supérieure à celle de gauche. Il suffit donc de voir que, B étant fixe >0

$$\frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^{B}\{\ \}\,dv \to 0.$$

Cela résulte (¹) de la décomposition de cette expression en les deux termes additifs

$$\frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}\int_{\sqrt{\frac{n-3}{2}}}^{\sqrt{\frac{n-3}{2}}+B} e^{-u^2}u^{n-3}\,du \quad \text{et} \quad \frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}\int_{\sqrt{\frac{n-3}{2}}}^{\sqrt{\frac{n-3}{2}}-B} e^{-u^2}u^{n-3}\,du,$$

qui, d'après (L), ont des limites opposées.

(¹) On peut établir directement que $\frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}\{\ \}$ tend uniformément vers zéro pour $v \geqq 0$ et borné. Cela dispense donc de l'emploi ultérieur de (L). Toute cette dernière démonstration du texte s'appliquant au cas intermédiaire de P, on peut donc, dans toute cette étude ($n \to \infty$) se dispenser de (L) lui-même et s'appuyer seulement sur (L′) moins précis.

Ainsi les démonstrations relatives à P et W sont très voisines. De plus, il est facile d'établir directement des relations entre les deux énoncés, par exemple en se ramenant à comparer les intégrales dans des bandes (P_1, P_2). C'est ainsi qu'en fixant σ on voit l'équivalence des deux énoncés restreints ainsi obtenus.

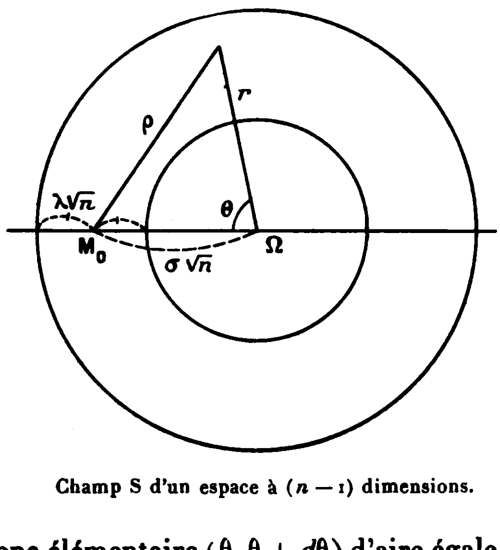
II. — Recherche de limitations pratiques d'erreur.

6. *Examinons d'abord* P et les divers moyens qui se présentent naturellement pour faire une intégration approchée numérique. *Une première intégration nous ramène dans un espace à* $(n-1)$ *dimensions* à l'expression

$$P(\lambda, n) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int_{(S)} e^{-k^2\rho^2}\, dv. \tag{2}$$

Utilisons d'abord des coordonnées sphériques de centre Ω et mettons en évidence perpendiculairement à $M_0\Omega$, dans la sphère de rayon

Fig. 3.



Champ S d'un espace à $(n-1)$ dimensions.

variable r, la zone élémentaire $(\theta, \theta + d\theta)$ d'aire égale à

$$S_{n-2}\, r^{n-2} \sin^{n-3}\theta\, d\theta,$$

il vient

$$P(\lambda, n) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} S_{n-2} \int_{\frac{\sigma-\lambda+|\sigma-\lambda|}{2}\sqrt{n}}^{(\sigma+\lambda)\sqrt{n}} \left[\int_0^{\pi} e^{-k^2\rho^2} \sin^{n-3}\theta \, d\theta\right] r^{n-2} \, dr,$$

où

$$\rho^2 = \sigma^2 n + r^2 - 2\sigma r\sqrt{n}\cos\theta.$$

D'où

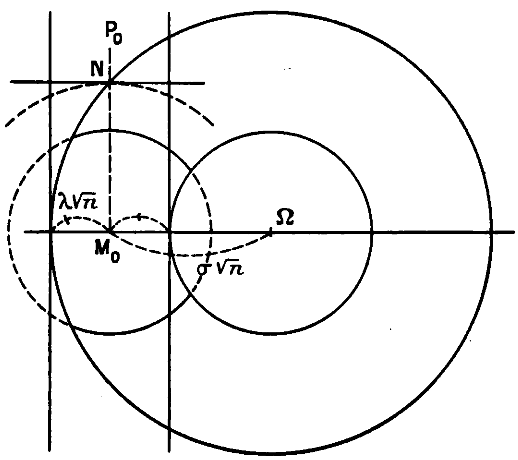
$$(6)\quad P(\lambda, n) = \frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}} e^{-k^2\sigma^2 n} \int_{\frac{\sigma-\lambda+|\sigma-\lambda|}{2}\sqrt{n}}^{(\sigma+\lambda)\sqrt{n}} e^{-u^2} u^{n-2} \left(\int_0^{\pi} e^{2k\sigma\sqrt{n}\,u\cos\theta} \sin^{n-3}\theta \, d\theta\right) du.$$

Si n est pair, on peut effectuer et exprimer ainsi P *exactement* au moyen de fonctions élémentaires et de la fonction Θ, mais d'une façon bien compliquée si n dépasse quelques unités.

Utilisons alors des coordonnées sphériques de centre M_0. En désignant par $\Sigma_\rho \rho^{n-2}$ l'aire de la zone contenue dans S, appartenant à la sphère de centre M_0 et rayon ρ

$$(7)\qquad P(\lambda, n) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int_0^{(2\sigma+\lambda)\sqrt{n}} e^{-k^2\rho^2} \Sigma_\rho \rho^{n-2} \, d\rho.$$

Fig. 4.



Champ S d'un espace à $(n-1)$ dimensions.

On pourra calculer des valeurs approchées par excès et par défaut en partageant l'intervalle de variation de ρ en segments où Σ_ρ serait remplacé par une constante.

En particulier on pourra n'intégrer qu'entre o et $\lambda\sqrt{n}$, où Σ_ρ est alors justement une constante égale à S_{n-1} ; on obtient ainsi la limite inférieure fondamentale de M [§ III, formule (7)].

De même, en introduisant pour ρ la valeur intermédiaire

$$M_0N = \sqrt{(\sigma+\lambda)^2-\sigma^2}\sqrt{n}$$

et remplaçant avant et après Σ_ρ par S_{n-1} et $\frac{1}{2}S_{n-1}$, il vient la limite supérieure simple

$$P(\lambda, n) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{S_{n-1}}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^{k\sqrt{(\sigma+\lambda)^2-\sigma^2}\sqrt{n}} e^{-u^2}u^{n-2}\,du. \tag{8}$$

D'autre part, on démontre aisément que la zone considérée est de hauteur $\leqq 2\lambda\sqrt{n}$ (avec égalité lorsque la sphère qui la porte rencontre la sphère fixe intérieure de centre M_0 quand celle-ci existe). L'aire d'une zone de hauteur fixe dans une sphère donnée (d'espace à $n > 3$ dimensions) étant maxima quand le plan médian est diamétral, on voit en comparant P avec l'intégrale dans la bande totale des deux plans perpendiculaires à $M_0\Omega$ et à la distance $\lambda\sqrt{n}$ de M_0, que

$$P(\lambda, n) < \Theta(\lambda k\sqrt{n}) = \Theta\left(\frac{\lambda}{\varepsilon_q}\sqrt{\frac{n}{2}}\right), \tag{9}$$

expression *indépendante* de σ et qui est la limite de P quand σ seul variable tend vers ∞, enfin qu'on peut améliorer, en introduisant σ, par combinaison avec l'autre procédé de majoration.

Bien remarquer que, pour n assez grand, si la zone considérée coupe le plan P_0 (normal en M_0 à $M_0\Omega$) ou en est voisine, son aire est presque entièrement localisée au voisinage de P_0; sinon Σ_ρ est très petit; de sorte que presque toute la valeur de P vient de l'intégration dans S au voisinage du plan P_0.

Cela nous amène à l'idée, déjà naturelle en soi, *d'utiliser les coordonnées cylindriques d'axe* $M_0\Omega$, mais en prévoyant que le voisinage du plan P_0 pourra être une approximation commode du champ (S). De là, d'ailleurs, la démonstration du paragraphe I de ce mémoire

On partira donc de

$$(10)\qquad P(\lambda, n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\lambda k \sqrt{n}}^{(2\sigma+\lambda)k\sqrt{n}} e^{-k^2 x^2} \left[\frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}} \int_{kR_i(x)}^{kR(x)} e^{-u^2} u^{n-3}\, du \right] dx,$$

où, pour la section sphérique du champ S par le plan normal à $M_0\Omega$ au point d'abscisse x sur l'axe $\overrightarrow{\Omega M_0}$ d'origine M_0, $R(x)$ est le rayon extérieur et $R_i(x)$ le rayon intérieur ou zéro.

On aura des valeurs approchées par défaut et par excès en partageant l'intervalle de variation de x en intervalles où l'on prendra R et R_i constants. Traitons un exemple le plus simplement possible et sans chercher une grande approximation.

Supposons

$$\lambda = \frac{3}{4}\varepsilon_q, \qquad \frac{\varepsilon_q}{\sigma} \leqq \frac{1}{6} \qquad (n \geqq 25).$$

On commencera par établir que ($n \geqq 25$)

$$E(n, A) = \frac{S_{n-2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^{A\sqrt{n}} e^{-u^2} u^{n-3}\, du \left\{ \begin{array}{ll} > 1 - 10^{-4} & \text{si } A^2 \geqq 2,3, \\ > 0,9 & \text{si } A^2 \geqq 1,32. \end{array} \right.$$

On le voit d'après les tables de la fonction incomplète Γ en partant des relations

$$E(2p, A) = \frac{1}{(p-2)!} \int_0^{A^2 p} e^{-v} v^{p-2}\, dv,$$

$$E(2p+1, A) > 1 - \frac{1}{A} \frac{1}{(p-1)!} \int_{A^2\left(p+\frac{1}{2}\right)}^{+\infty} e^{-v} v^{p-1}\, dv,$$

analogues à (8) et (9) de (M), et où les seconds membres sont pour A fixé > 1, des fonctions croissantes de p quand p est assez grand, en particulier, ce qui suffira, pour : $A \geqq 1,1$; $p \geqq 9$.

Puis on intégrera dans les deux cylindres figurés ci-après en hachures, de rayons $R(\delta_1\sqrt{n})$, $R(\delta_2\sqrt{n})$ tels que

$$kR(\delta_1\sqrt{n}) = k\sqrt{(\sigma+\lambda)^2 - (\sigma+\delta_1)^2}\sqrt{n} \geqq \sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{2,3},$$

$$kR(\delta_2\sqrt{n}) = k\sqrt{(\sigma+\lambda)^2 - (\sigma+\delta_2)^2}\sqrt{n} \geqq \sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{1,32}.$$

La première inégalité s'écrit encore

$$\delta_1 \leqq -\sigma + \sqrt{(\lambda+\sigma)^2 - 2{,}3\,\varepsilon_q^2},$$

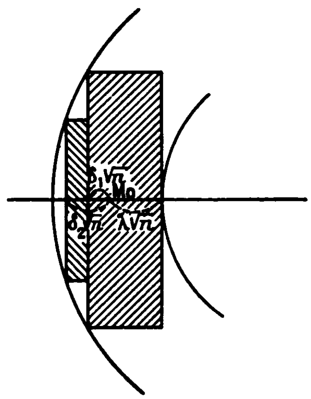
et n'est satisfaite quel que soit σ ($\geqq 6\varepsilon_q$) que si l'on prend

$$\delta_1 \leqq \left(-6 + \sqrt{(6{,}75)^2 - 2{,}3}\right)\varepsilon_q = 0{,}57\ldots\varepsilon_q.$$

La seconde inégalité impose de même.

$$\delta_2 \leqq \left(-6 + \sqrt{(6{,}75)^2 - 1{,}32}\right)\varepsilon_q = 0{,}65\ldots\varepsilon_q.$$

Fig. 5.



Espace à $(n-1)$ dimensions.

Donc sous les hypothèses initiales $\left(\lambda = \dfrac{3}{4}\varepsilon_q,\ \sigma \geqq 6\varepsilon_q,\ n \geqq 25\right)$

$$(11) \qquad P(\lambda, n) > \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-0{,}75\sqrt{\frac{n}{2}}}^{0{,}57\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-u^2}\,du - 10^{-4}\right] + \left[\frac{9}{10}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0{,}57\sqrt{\frac{n}{2}}}^{0{,}65\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-u^2}\,du\right] \geqq 0{,}9990\ldots.$$

On notera pour $n = 25$ l'importance relative des deux crochets $0{,}9976\ldots$ et $0{,}0014\ldots$, et la valeur de la limite supérieure

$$\Theta\left(0{,}75\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 0{,}9998\ldots.$$

7. Ainsi pour $n \geqq 25$, $\frac{\varepsilon_q}{\sigma} \leqq \frac{1}{6}$, la probabilité P d'une erreur moindre que $\frac{3}{4}\varepsilon_q$ dépasse $1 - 10^{-3}$.

Dans le cas des probabilités postérieures le σ de la condition $\frac{\varepsilon_q}{\sigma} \leqq \frac{1}{6}$ est alors la valeur expérimentale σ_{x_i}, et c'est avec une probabilité postérieure $> 1 - 10^{-3}$ que la standard deviation exacte cherchée σ_{y_i} diffère de ce σ_{x_i} de moins de $\frac{3}{4}\varepsilon_q$. Cette limitation qu'on peut adopter comme limitation pratique d'erreur $\left(\text{sous les conditions } n \geqq 25, \frac{\varepsilon_q}{\sigma_{x_i}} \leqq \frac{1}{6}\right)$ est meilleure que celle voisine de ε_q obtenue précédemment (M, formule 23) dans les mêmes conditions.

Dans le cas des probabilités antérieures, il s'agit, dans les hypothèses, de σ_{y_i} en fait inconnu. Si l'on peut affirmer que $\sigma_{y_i} \geqq 6\varepsilon_q$, il y a une probabilité (antérieure) $> 1 - 10^{-3}$ pour que toute détermination expérimentale du σ fournisse un nombre différent de σ_{y_i} de moins de $\frac{3}{4}\varepsilon_q$. Avec un risque correspondant, comme on voit, à une probabilité $< 10^{-3}$, on peut espérer que si l'on a trouvé la valeur expérimentale σ_{x_i}, la valeur vraie cherchée σ_{y_i} en diffère de moins de $\frac{3}{4}\varepsilon_q$.

Encore faut-il être sûr que $\sigma_{y_i} \geqq 6\varepsilon_q$. On a vu (M, n° 13) comment on peut l'admettre pratiquement si la valeur expérimentale trouvée dépasse $10\varepsilon_q$.

8. *Occupons-nous maintenant de* $W(\mu, n)$. On part de

$$W(\mu, n) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int_{(S')} e^{-k^2\rho^2}\, dv, \tag{12}$$

étendue au champ (S′) (*voir* n° 5 et *fig.* 2) d'un espace à $(n-1)$ dimensions.

En introduisant des coordonnées sphériques de centre Ω, on obtient une formule pour W semblable à (6); seules diffèrent les expressions des rayons extrêmes du champ.

Avec des coordonnées sphériques de centre M_0 on obtient une formule analogue à (7) et une limite supérieure analogue à (8)

$$\text{(13)} \qquad W(\mu, n) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{S_{n-1}}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^{k\sqrt{\mu n}} e^{-u^2} u^{n-2}\,du,$$

indépendante de σ.

D'autre part, en raisonnant comme pour établir (9), on trouve, si $\sigma \neq 0$,

$$\text{(14)} \qquad W(\mu, n) < \Theta\left(\frac{k\mu}{2\sigma}\sqrt{n}\right) = \Theta\left(\frac{\mu}{2\sigma\varepsilon_n}\sqrt{\frac{n}{2}}\right).$$

Enfin avec des coordonnées cylindriques d'axe $M_0\Omega$, on établira une formule analogue à (10) permettant, μ, σ, k, n étant donnés, de calculer W avec toute approximation. Dans le cas des probabilités antérieures, il y a, comme pour P, la difficulté de la non-connaissance pratique de σ_{y_i}; on devra donc se borner d'abord à chercher une limite inférieure de W sachant que σ_{y_i} est compris entre certaines limites dont on peut être pratiquement sûr.

9. Ainsi, *dans le cas antérieur*, on ne peut songer à un calcul arbitrairement approché de P ou de W puisqu'on ne connaît pas σ_{y_i}. Mais on peut imaginer qu'on résolve en λ ou μ l'équation obtenue en égalant W ou P à une valeur fixe comme $1 - 10^{-3}$; on aurait ainsi, en un sens, une limite supérieure d'erreur sur σ ou σ^2 avec une probabilité fixe, limite d'erreur qui serait fonction de k, σ_{y_i}, n. En négligeant la probabilité complémentaire on aurait une inégalité qu'on pourrait songer à considérer comme pratiquement vérifiée; il n'y aurait plus qu'à la résoudre en σ_{y_i} pour avoir des limitations pratiques pour ce σ_{y_i} en fait inconnu. A cause de la difficulté de résolution même approchée par rapport à λ ou μ des équations de plus haut, on cherchera pour ces solutions des limites supérieures simples fonctions de k, σ_{y_i}, n.

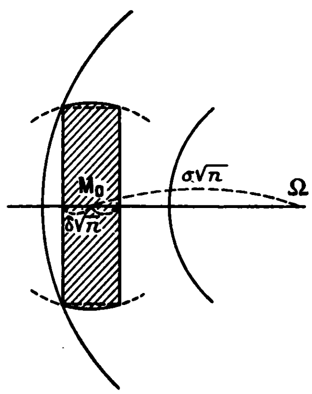
Ainsi on cherchera de telles fonctions, limites d'erreur sur σ ou σ^2, telles que la probabilité complémentaire soit moindre qu'une quantité fixe négligeable comme 10^{-3}. On résoudra alors les inégalités (exprimant ces limitations) par rapport à σ_{y_i}, d'où des limites à proposer pour ce σ_{y_i} et, si l'on veut, pour $|\sigma_{x_i} - \sigma_{y_i}|$. C'est ce qui a été fait dans la seconde méthode de (M).

Voici un procédé de ce type, basé géométriquement sur W, l'idée analogue à partir de P ne se développant pas si facilement.

Considérons dans (S′) une portion de cylindre centré cette fois sur M_0, ou mieux, pour augmenter l'approximation, le segment sphérique en hachures ci-contre, de centre M_0, de demi-hauteur $\delta\sqrt{n}$ et de rayon

$$\sqrt{\delta^2 + (\sigma^2 + \mu) - (\sigma + \delta)^2}\sqrt{n} = \sqrt{\mu - 2\sigma\delta}\sqrt{n}.$$

Fig. 6.



δ′ dans l'espace à $(n-1)$ dimensions.

Si I est l'intégrale correspondante, il est évident géométriquement que

$$\Theta(k\delta\sqrt{n}) + \frac{S_{n-1}}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^{k\sqrt{\mu - 2\sigma\delta}\sqrt{n}} e^{-u^2} u^{n-2}\,du - I < 1.$$

Donc

$$W > I > \Theta(k\delta\sqrt{n}) + \frac{S_{n-1}}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^{k\sqrt{\mu - 2\sigma\delta}\sqrt{n}} e^{-u^2} u^{n-2}\,du - 1.$$

Autrement dit, en posant

$$\rho = k\delta\sqrt{n},$$
$$\sqrt{\beta} = k\sqrt{2}\sqrt{\mu - 2\sigma\delta},$$

on a l'inégalité

$$(15)\qquad |\sigma_{x_i}^2 - \sigma_{y_i}^2| < \beta\varepsilon_q^2 + \rho\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\sigma\varepsilon_q,$$

avec une probabilité supérieure à

$$\Theta(\rho)+\frac{S_{n-1}}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^{\sqrt{\frac{n\beta}{2}}} e^{-u^2}u^{n-2}\,du-1,$$

expression indépendante de σ et qui sera supérieure à tout nombre donné <1 à partir de toute valeur donnée de n, si β et ρ sont pris convenablement. En se plaçant dans le cas antérieur et faisant au second membre $\sigma=\sigma_{y_i}$, il n'y aura plus qu'à résoudre (15) en σ_{y_i}.

Mais (15) est justement, à très peu près, l'inégalité fondamentale (19) ou (20) de la seconde méthode de (M). Notre dernier résultat est même un peu meilleur puisque

$$\frac{S_{n-1}}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^{\sqrt{\frac{n\beta}{2}}} e^{-u^2}u^{n-2}\,du>\Pi(\beta,n)=\frac{S_n}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_0^{\sqrt{\frac{n\beta}{2}}} e^{-u^2}u^{n-1}\,du,$$

comme il résulte d'une interprétation géométrique.

D'ailleurs, il y a peu à changer au raisonnement pour obtenir exactement les limitations (19), (20) de (M). Il n'y a qu'à se placer dans l'espace à n dimensions et considérer (R′) au lieu de (S′). On prendra comme domaine approché le segment sphérique (d'espace à n dimensions) limité par les deux plans normaux à $M_0\Omega$ à la distance $\delta\sqrt{n}$ de M_0 et la sphère de centre M_0 et rayon $\sqrt{\mu-2\sigma\delta}\sqrt{n}$. De sorte que dans le raisonnement de plus haut, il n'y a qu'à remplacer l'intégrale

$$\frac{S_{n-1}}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^{k\sqrt{\mu-2\sigma\delta}\sqrt{n}} e^{-u^2}u^{n-2}\,du,$$

correspondant à une sphère d'espace à $(n-1)$ dimensions par

$$\frac{S_n}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_0^{k\sqrt{\mu-2\sigma\delta}\sqrt{n}} e^{-u^2}u^{n-1}\,du=\Pi(\beta,n),$$

correspondant à une sphère de même rayon dans l'espace à n dimensions.

Remarque. — Achevons l'interprétation géométrique des calculs et résultats de (M). D'abord on traduira géométriquement les inégalités fondamentales (1) et (1′) de (M); leur nouvelle forme s'établit directement par une simple relation de trigonométrie des triangles en se ramenant d'abord au cas où les points $(x_i)(y_i)$ sont dans un même plan normal à la droite Δ, lieu des points d'égales coordonnées dans l'espace à n dimensions. Cette interprétation de (1), (1′) met de plus en évidence, dans le raisonnement même de la seconde méthode de (M), la sphère de rayon $\sqrt{\beta}\,\varepsilon_q$ et les deux plans parallèles à distance $\frac{\rho}{k}$ de M_0, qui définissent justement le segment sphérique de plus haut.

Quant au théorème fondamental sur les limitations absolues, il résulte immédiatement de l'interprétation de $\sigma_{y_i}\sqrt{n}$ et $\sigma_{x_i}\sqrt{n}$ comme les distances de (y_i), (x_i) à Δ, en remarquant que les conditions $|x_i - y_i| \leqq \varepsilon$ entraînent que chacun des points (x_i), (y_i) est dans la sphère de rayon $\varepsilon\sqrt{n}$ centrée sur l'autre point.

III. Critiques et compléments.

10. Nous avons donc beaucoup complété, et dans le même sens, les premiers développements du mémoire antérieur M. La recherche de limites pratiques a été basée sur les deux idées naturelles suivantes : 1° en s'appuyant sur G_p, chercher directement des limites pour σ_{y_i} avec une probabilité « postérieure » assez voisine de 1 ; 2° en s'appuyant sur G_a, trouver certaines inégalités, vraies avec une probabilité « antérieure » assez voisine de 1, puis les résoudre en σ_{y_i} en donnant à σ_{x_i} la valeur expérimentale trouvée.

Or, le *premier procédé*, basé sur G_p, exige donc, pour une interprétation objective de la probabilité postérieure négligée, que les éléments qu'on mesure aient été choisis dans une famille déterminée par une technique comportant une probabilité élémentaire *a priori* (par exemple l'équiprobabilité).

Le *deuxième procédé* comporte des difficultés plus graves. La résolution en σ_{y_i} des inégalités considérées, faite sous prétexte que leur probabilité antérieure de validité est très voisine de 1, sort tout à fait du domaine du calcul des probabilités; c'est là un procédé *empirique* analogue au procédé courant dans la mesure d'une grandeur y, de calculer une limite ε d'erreur correspondant à une probabilité *a priori* voisine de 1, puis de reporter de part et d'autre d'*une* valeur expérimentale x cette quantité ε pour avoir un intervalle $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ où l'on admet pratiquement que se trouve y. Cette dernière opération revient en effet à résoudre en y l'inégalité $|x-y| < \varepsilon$ établie d'abord avec une condition de probabilité *a priori*.

De tels procédés empiriques sont de valeur discutable, car l'idée de résolution sur laquelle ils sont basés peut conduire à des contradictions. C'est ce que j'explique avec plus de détails et en développant toutes les difficultés rapidement soulignées dans ce paragraphe, dans un article à l'impression pour le tome XIII de *Mathematica*.

Enfin, si nous avons obtenu jusqu'à présent des résultats concordants par les deux méthodes, cela tient à ce qu'on a considéré des valeurs de n relativement petites et à ce qu'on s'est attaché à étudier, plutôt que σ_{y_i} isolément, la différence $|\sigma_{x_i} - \sigma_{y_i}|$. Un perfectionnement des résultats du paragraphe I va nous montrer que dans certains cas, les deux méthodes peuvent conduire à des « résultats pratiques » fort différents et même incompatibles.

Il y a, en effet, peu à ajouter aux démonstrations du paragraphe I pour obtenir les résultats suivants :

I. *a*. D'après G_a, la probabilité *antérieure* pour que

$$\sigma_{y_i}^2 + \varepsilon_q^2 - \alpha < \sigma_{x_i}^2 < \sigma_{y_i}^2 + \varepsilon_q^2 + \alpha \qquad (\alpha > 0),$$

est pour α, k fixés (α arbitrairement petit) une fonction de σ_{y_i} et n seuls, qui tend vers 1 quand $n \to +\infty$, *uniformément* par rapport à σ_{y_i} *borné*.

b. D'après G_a, la probabilité *antérieure* pour que

$$\sqrt{\sigma_{y_i}^2 + \varepsilon_q^2} - \beta < \sigma_{x_i}^2 < \sqrt{\sigma_{y_i}^2 + \varepsilon_q^2} + \beta \qquad (\beta > 0)$$

est, pour β, k fixés (β arbitrairement petit) une fonction de σ_{y_i} et

n seuls, qui tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, *uniformément* par rapport à σ_{y_i} *quelconque*.

II. *a*. D'après G_p, la probabilité *postérieure* pour que

$$\sigma_{x_i}^2 + \varepsilon_q^2 - \alpha < \sigma_{y_i}^2 < \sigma_{x_i}^2 + \varepsilon_q^2 + \alpha \qquad (\alpha > 0)$$

est, pour α, k fixés (α arbitrairement petit) une fonction de σ_{x_i} et n seuls, qui tend vers 1 quand $n \to +\infty$, *uniformément* par rapport à σ_{x_i} *borné*.

b. D'après G_p, la probabilité *postérieure* pour que

$$\sqrt{\sigma_{x_i}^2 + \varepsilon_q^2} - \beta < \sigma_{y_i} < \sqrt{\sigma_{x_i}^2 + \varepsilon_q^2} + \beta \qquad (\beta > 0)$$

est, pour β, k fixés (β arbitrairement petit) une fonction de σ_{x_i} et n seuls qui tend vers 1 quand $n \to \infty$, *uniformément* par rapport à σ_{x_i} *quelconque*.

Le premier procédé utilisant II. *a* ou *b* conduit à admettre pratiquement pour n assez grand : $\sigma_{y_i} \# \sqrt{\sigma_{x_i}^2 + \varepsilon_q^2}$.

Le second procédé utilisant I. *a* ou *b* conduit pour n assez grand à $\sigma_{x_i} \# \sqrt{\sigma_{y_i}^2 + \varepsilon_q^2}$ et $\sigma_{y_i} \# \sqrt{\sigma_{x_i}^2 - \varepsilon_q^2}$, et cela est contenu, comme je m'en suis aperçu récemment, dans des résultats, sommairement justifiés, de l'ouvrage de Yule (1), qui souligne que l'effet des erreurs d'observations est d'accroître la « standard deviation ».

On peut toujours prendre pour σ_{y_i} *des limites pratiques assez larges pour contenir les intervalles que pourraient fournir les deux méthodes*. Justement les premières recherches faites, en étudiant $|\sigma_{x_i} - \sigma_{y_i}|$, c'est-à-dire en cherchant pour σ_{y_i} des intervalles *centrés* sur σ_{x_i}, cachaient la difficulté et le désaccord qui apparaissent en perfectionnant les procédés et qui d'ailleurs n'ont d'importance numérique que pour n assez grand.

Il y aurait lieu pour approfondir la question, par exemple dans les conditions courantes du problème biométrique, de dresser par les

---

(1) G. U. YULE, *An introduction to the Theory of Statistics* (Ch. Griffin and C°, London), Chap. XI, p. 211, n° 3.

deux procédés un peu modifiés des tableaux assez riches de « limites pratiques », *séparément inférieures et supérieures*, de σ_{y_i}.

D'autre part, s'impose l'introduction d'*hypothèses plus générales que celles de Gauss :* il est possible dans des cas étendus de se ramener à l'application de certains de nos résultats.

Enfin, il convient de combiner ces effets des erreurs de mesure avec ceux dus à la pratique courante des *groupements* de mesures voisines.

Ce sont là des recherches que je développe un peu dans un article à l'impression dans le *Bulletin de la Station d'Aquiculture et de Pêche de Castiglione* (Algérie), 1935, fasc. II.