JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES BOULIGAND

# Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre infiniment voisines d'une équation non intégrable aux différentielles totales

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 251-266.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_251_0>

# *Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre infiniment voisines d'une équation non intégrable aux différentielles totales;*

PAR GEORGES **BOULIGAND**.

L'attention constante du Maître si justement célébré à toutes relations de voisinage a eu un rôle indéniable dans l'éclosion des parties les plus nouvelles de l'Analyse et de la Géométrie. C'est pourquoi je me suis décidé à revenir ici sur un problème particulier de voisinage, en théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre (¹). Que celui à qui je dois tant veuille bien excuser la modestie de cette contribution au volume à lui dédié.

**1.** J'appellerai *transformation* $T_1$ toute transformation opérant dans une région, en général limitée, et y détenant les attributs suivants : la biunivocité, la continuité, l'existence d'une transformation linéaire tangente continûment répartie et non dégénérescente (jacobien non nul). Les transformations $T_1$ forment *le groupe de la topologie restreinte du premier ordre*. Cette terminologie fait de suite évoquer les voisinages du premier ordre, si fréquemment distingués d'autres voisinages par M. Hadamard dans ses cours comme dans ses œuvres. J'indique en passant le lien entre ces deux idées.

Soit une surface S vers laquelle tendent les surfaces d'une suite $\{S_n\}$, dans les conditions suivantes : S a pour paratingent en chacun de ses

(¹) *Voir* mon récent Mémoire, *Sur le problème de Cauchy pour l'équation* $F(x, y, z, p, q) = 0$ (*Bull. des Sciences Math.*, 2ᵉ série, t. LX, juillet 1936, p. 203-224). Je signale qu'il y a lieu d'apporter à ce texte la rectification suivante : dans la relation (7) du nᵒ 12 et la relation (10) du nᵒ 13, *remplacer le cosinus par un sinus*.

points l'ensemble des directions d'un plan; en outre, soit une suite de points dont le $n^{\text{ième}}$ $M_n$ appartient à $S_n$, suite pour laquelle existe l'unique point limite M appartenant à S; les directions des paratingentes à $S_n$ en $M_n$ sont toutes extérieures à un cône du second degré, lequel tend, pour $n$ infini, à s'aplatir sur le plan paratingent de S en M. On suppose que cette convergence est uniforme pour toutes les suites ponctuelles du genre indiqué. Chaque $S_n$ sera donc, à partir d'un certain rang, une surface à paratingent incomplet. Sur l'ensemble ponctuel formé par S et par les $S_n$, il y aura, pour les points de S pris comme éléments originels, continuité du paratingent. Le voisinage qui existe dès lors entre $S_n$ et S est précisément ce qu'on peut appeler un *voisinage uniforme du premier ordre*. La liaison entre cette notion et celle de la topologie restreinte du premier ordre est maintenant évidente : en effet, toute transformation $T_1$ de ce groupe conserve les propriétés des coïncidences du paratingent de deux ensembles en un point et aussi bien les propriétés de répartition continue du paratingent.

**2.** Je dois encore rappeler l'usage qu'on peut faire de transformations $T_1$ pour ramener à une forme canonique, dans une portion d'espace, l'équation non intégrable aux différentielles totales

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0. \tag{1}$$

J'en tirerai une forme canonique solidaire pour une équation aux dérivées partielles

$$f(x, y, z, p, q; m) = 0, \tag{2}$$

dépendant d'un paramètre $m$ dont l'évanescence aplatit le cône élémentaire contre le plan attaché à son sommet par l'équation (1) : cela signifie que toute génératrice est en dehors d'un cône du second degré infiniment voisin de ce plan. J'ai montré dans mon travail cité qu'on peut donner à (2) l'une des formes

$$\frac{(ap + bq - c)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(1 + p^2 + q^2)} = \cos^2\varepsilon,$$

ou

$$(cp + a)^2 + (cq + b)^2 = \eta^2, \tag{3}$$

où $\varepsilon$, $\eta$ sont des fonctions de $x, y, z, p, q$ tendant uniformément vers zéro avec $m$.

C'est la forme (3) que nous adopterons, en remarquant la possibilité de faire en sorte que $c$ ne s'annule pas dans une certaine région. Vu l'invariance de la propriété d'aplatissement du cône élémentaire par les $T_1$, la transformée de (3) par une $T_1$ pourra elle-même s'écrire sous la forme (3).

**3.** Pour l'équation (1), en restreignant suffisamment la région d'efficacité, on démontre par des méthodes classiques (voir *les Leçons de M. Goursat sur le problème de Pfaff*, Chap. I), la possibilité de la réduire à la forme

$$dZ - Y\,dX = 0,$$

X, Y, Z étant les coordonnées du point transformé de $(x, y, z)$ par la $T_1$ mise en œuvre. Toutefois, est-il nécessaire de reprendre le raisonnement pour s'assurer qu'il s'accorde avec nos hypothèses, nettement délimitées? Tout d'abord, si le jeu d'une $T_1$ conduit à écrire

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = dZ - Y\,dX, \tag{4}$$

il est facile d'apercevoir pour les lignes parallèles à l'un des axes, dans l'espace (X, Y, Z), des propriétés remarquables. Supposons essentiellement qu'il existe pour $a$, $b$, $c$ des dérivées premières continues soumises, quant à l'ensemble des variables $x$, $y$, $z$, à la condition de Lipschitz. Ces fonctions $a$, $b$, $c$ sont les composantes d'un vecteur covariant, c'est-à-dire subissent la contragrédiente de la transformation linéaire tangente à notre $T_1$. Nous supposons essentiellement que l'on a

$$a\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) + b\left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) + c\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) \neq 0; \tag{5}$$

dans les parenthèses interviennent trois composantes du covariant bilinéaire, tenseur alterné et deux fois covariant. A ce tenseur on peut attacher, par une convention d'orientation, le vecteur tourbillon, dont la direction subit la transformation linéaire tangente [1].

Si donc une $T_1$ conduit à la relation (4), elle transformera les lignes de tourbillon du champ $(a, b, c)$ en celles du champ $(-Y, 0, 1)$, c'est-à-dire en les droites parallèles à l'axe des Z. D'autre part, sur les surfaces de tourbillon $X = \text{const.}$, les lignes $Z = \text{const.}$ annuleront notre forme différentielle : elles en seront des lignes intégrales. La recherche équivaut donc à celle d'un système de coordonnées curvilignes dans les conditions suivantes :

1° L'une des familles de surfaces coordonnées est faite avec des surfaces de tourbillon;

2° Les lignes intégrales portées par ces surfaces forment une famille de lignes de coordonnées;

3° Les lignes de tourbillon en forment une autre.

Cherchons d'abord ces lignes, au moyen du système différentiel $\mathcal{D}$ qui les définit. Vu la non-annulation du tourbillon résultant de (5), vu en outre le caractère lipschitzien de ses composantes, il passe par chaque point de la région utile une ligne de tourbillon et une seule. Considérons celles de ces lignes rencontrant, sous un angle non nul, une petite portion de surface plane. Nous pourrons les définir, dans la région qu'elles balayent, au moyen de deux intégrales premières de $\mathcal{D}$, soient

$$x_1(x, y, z) = \text{const.}, \qquad y_1(x, y, z) = \text{const.},$$

intégrales douées de dérivées premières continues et telles que les déterminants

$$\frac{D(x_1, y_1)}{D(y, z)}, \quad \frac{D(x_1, y_1)}{D(z, x)}, \quad \frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)}$$

définissent un vecteur non nul et colinéaire au tourbillon de $(a, b, c)$. Nous supposerons encore $a$, $b$, $c$ soumis à une condition supplémentaire permettant de choisir $x_1$ de manière que cette intégrale première

[1] Bien que la chose soit facile, j'ai détaillé le calcul dans un court article à l'impression au *Bull. de Math. de l'Éc. Polyt. du roi Carol*, Bucarest, 1936. J'y renvoie le lecteur.

ait ses premières dérivées elles-mêmes lipschitziennes [1]. Alors, en intégrant le système

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial x}dx + \frac{\partial x_1}{\partial y}dy + \frac{\partial x_1}{\partial z}dz = 0,$$

nous trouverons des lignes dont il passe par chaque point une et une seule, vu l'intervention, assurée par notre condition supplémentaire, de la condition de Lipschitz et vu qu'il ne peut y avoir colinéarité du gradient de $x_1$ au vecteur $(a, b, c)$, car le premier membre de (5) n'étant pas nul, on a nécessairement

$$(5')\qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0.$$

L'intégrale du nouveau système différentiel peut alors s'écrire :

$$x_1(x, y, z) = \text{const.}, \qquad z_1(x, y, z) = \text{const.},$$

$z_1$ étant une fonction douée de dérivées premières continues, de la forme

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = h\frac{\partial x_1}{\partial x} + ga, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial y} = h\frac{\partial x_1}{\partial y} + gb, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial z} = h\frac{\partial z_1}{\partial z} + gc$$

avec $g$ non nul, d'où

$$\frac{D(x_1, y_2, z_1)}{D(x, y, z)} = g \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'après le théorème fondamental sur l'inversion locale d'une transformation ponctuelle, pour un jacobien non nul, nous sommes maintenant assurés de l'existence d'une transformation $T_1$, dans une région

[1] Il serait intéressant de rechercher si cette condition supplémentaire est réellement indépendante de celles qui précèdent.

suffisamment restreinte; par cette transformation $T_1$ nous passerons du point $x$, $y$, $z$ au point $x_1$, $y_1$, $z_1$ dont les coordonnées sont nos trois fonctions

$$x_1(x, y, z), \quad y_1(x, y, z), \quad z_1(x, y, z),$$

et cela de manière que les lignes de tourbillon deviennent les droites parallèles à l'axe des $z_1$, tandis que les parallèles à l'axe des $y_1$ vont jouer le rôle de lignes intégrales.

4. Mais le résultat final n'est pas encore atteint : avec cette transformation $T_1$, il faut encore, pour ramener $a\,dx + b\,dy + c\,dz$ à la forme $dZ - Y\,dX$, faire intervenir une nouvelle transformation $T_1$ qu'il sera maintenant facile d'obtenir. En effet, notre forme différentielle initiale s'écrit maintenant

$$a_1\,dx_1 + b_1\,dy_1 + c_1\,dz_1$$

avec

$$b_1 = 0\,\frac{\partial c_1}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial a_1}{\partial z_1} - \frac{\partial c_1}{\partial x_1} = 0.$$

Nous avons donc une forme $a_1\,dx_1 + c_1\,dz_1$ qui, d'après la dernière des relations ci-dessus, est pour chaque valeur de $y_1$ une différentielle totale, celle d'une fonction somme d'une fonction de $z_1$ et $x_1$ seuls et d'une fonction de $x_1$, $y_1$ seuls (cela vu que $c_1$ est indépendant de $y_1$). Notre première réduction nous amène donc à

$$dZ(x_1, z_1) - Y(x_1, y_1)\,dx_1 \qquad \left(\text{avec } \frac{\partial Z}{\partial z_1} = c_1\right).$$

La relation (5) implique d'ailleurs ici

$$c_1\,\frac{\partial a_1}{\partial y_1} \neq 0,$$

d'où $c_1 \neq 0$. Par suite, en posant

$$X = x_1, \qquad Y = Y(x_1, y_1), \qquad Z = Z)x_1, z_1),$$

et remarquant que $\frac{\partial Y}{\partial y_1} = -\frac{\partial a_1}{\partial y_1}$ n'est pas nul, nous définirons une nouvelle transformation $T_1$, laquelle, composée avec la précédente, nous amène dans une certaine région à la réduction demandée.

**5.** A la suite de ces redites, nécessaires à un exposé rigoureux du sujet, nous obtenons, sous les mêmes réserves que ci-dessus, la forme canonique d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, laquelle dépend d'un paramètre $m$, et avoisine pour $m$ infiniment petit une équation aux différentielles totales. En ramenant cette dernière à la forme

$$dz - y\,dx = 0, \tag{6}$$

nous aurons la famille d'équations

$$(p - y)^2 + q^2 = \varphi^2(x, y, z, p, q; m), \tag{7}$$

où le second membre tend uniformément vers zéro avec $m$. Notons que l'axe des $y$ est une ligne intégrale de l'équation limite (6), et que lorsqu'il s'agira d'étudier le problème de Cauchy relatif à (2) pour une ligne intégrale de l'équation limite (1), on pourra toujours se ramener au problème de Cauchy relatif à (7) et pour l'axe des $y$.

**6.** M'étant acquitté de ces préliminaires topologiques, je puis maintenant, sans inconvénient, revenir au style usuel en disant par exemple que les lignes intégrales de (1) sont les trajectoires orthogonales du champ vectoriel $(a, b, c)$, que la non-intégrabilité de (1) revient à la non-orthogonalité de ce champ et de son tourbillon, etc. Mais nous n'avons plus à considérer ces notions que pour les équations (6) et (7). Grâce à cette circonstance se trouve notablement simplifiée la démonstration du théorème suivant :

*Étant données une trajectoire orthogonale* L *du champ* $(a, b, c)$ *et une surface douée en chaque point d'un paratingent formé par les directions d'un plan tangent au cône élémentaire correspondant de* $f = 0$, *surface contenant la trajectoire* L, *le maximum de la distance d'un point de cette surface à la courbe* L *tend vers zéro avec le paramètre* $m$.

Cet énoncé souligne le fait suivant : cherchons à obtenir un prolongement, à partir de la courbe d'appui L, d'une petite bande de surface intégrale passant par cette courbe, si ce prolongement doit satisfaire à la planéité du paratingent, il ne pourra se réaliser qu'en restant à une faible distance de la courbe L, distance dont le maximum tendra vers zéro avec $m$. La recherche de surfaces répondant à la condition indiquée se ramène en effet à celle de surfaces coupant sous un angle tendant vers un droit les lignes de la congruence

$$z = rx + s, \qquad y = -\frac{1}{r}. \tag{8}$$

Il suffit alors, pour établir le résultat annoncé, d'appliquer un mode de raisonnement déjà présenté au n° 16 de mon travail cité. Définissons un tube de la congruence précédente en assujettissant $r$ et $s$ à dépendre périodiquement d'un paramètre $u$, de manière que le point $r(u)$, $s(u)$ décrive un cycle simple K dans le plan des $yz$, cycle auquel nous supposons une tangente continue (au sens : paratingente unique). Les trajectoires orthogonales des droites de la congruence précédente sur la surface du tube s'obtiennent en intégrant l'équation

$$dx + r\,dz = 0$$

ou

$$(1 + r^2)\,dx + xr\,dr + r\,ds = 0.$$

Ces trajectoires, au lieu de se fermer, ont un sens d'enroulement permanent sur les tubes, lié au signe de l'intégrale curviligne

$$\int_K \frac{r\,ds}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

Cela posé, une petite nappe de surface dont le paratingent remplirait la condition de l'énoncé donné en italique dans le présent paragraphe, jouirait évidemment, si sa largeur ne tendait pas vers zéro, de la propriété suivante : il y aurait certains des tubes considérés à l'instant, tubes ayant pour section un cycle fixe du plan des $yz$, qui seraient coupés par la dite surface suivant un autre cycle fermé rencontrant sous un angle infiniment voisin d'un droit les lignes de la congruence (8). Or, la propriété de non-fermeture des trajectoires orthogonales de ces lignes sur la surface d'un tube, propriété liée à la non-intégrabitité de

$$\frac{r\,ds}{\sqrt{1 + r^2}},$$

est *une propriété stable* comme on pourrait le montrer directement.

Cette stabilité découle aussi des résultats donnés par M. S. K. Zaremda dans son important Mémoire : *Sur les équations au paratingent* (*Bull. des Sc. Math.*, 6e série, t. LX, mai 1936, p. 139-160). Il s'agit, somme toute, des inégalités différentielles (exprimées ici sous forme intrinsèque, par l'intermédiaire du paratingent) entre lesquelles on peut, d'une manière de plus en plus étroite, enserrer une équation différentielle donnée (équation qui correspond à la recherche des lignes intégrales sur la surface du tube), étant donné qu'il passe une seule ligne intégrale $l$ par un point, on localise les lignes satisfaisant aux conditions d'inégalité données dans une sorte de pinceau comprenant $l$, pinceau qui se rétrécit indéfiniment lorsque les inégalités différentielles se resserrent pour tendre vers l'équation différentielle elle-même. On est ainsi conduit à tracer sur la surface du tube un pinceau qui, pour une minceur suffisante, s'enroule en sens constant et sans se recouper lui-même. Et cela suffit à prouver l'impossibilité, pour la portion de surface considérée, de cloisonner pour $m$ arbitrairement petit, un tube engendré par les lignes de la congruence (8) s'appuyant sur un cycle fixe tel que K, la cloison étant établie de manière à couper toute ligne de la congruence intérieure au tube.

Plus généralement, le même raisonnement permet d'énoncer le résultat suivant :

Considérons l'équation (1) et une courbe intégrale J de cette équation. Supposons donnée une répartition continue de cônes du second ordre, dépendant continûment d'un paramètre $m$, de telle sorte que $m$ tendant vers zéro, le cône attaché à un point quelconque tende uniformément vers le plan attaché à ce même point par l'équation (1). Considérons dès lors une surface passant par la courbe J telle qu'en chacun de ses points, son paratingent se compose de droites toutes extérieures au cône correspondant. Lorsque le paramètre $m$ tend vers zéro, une telle surface a tous ses points infiniment voisins de la courbe J ; ou encore J est l'ensemble limite de nos surfaces pour $m$ évanescent.

**7.** Une conséquence immédiate de ces remarques est la répercussion importante que peut avoir le sens attribué au mot *surface* lorsqu'on aborde l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Le fait d'imposer à une surface intégrale d'avoir son paratingent réduit à un plan unique, restreint l'extension de l'intégrale obtenue. C'est un genre de singularité bien déterminé, à savoir la présence d'arêtes de rebroussement (présence que mon Mémoire cité a justifiée dans les cas étendus) qui interdit le prolongement, et il est remarquable de trouver dans cette branche de la géométrie réelle un phénomène analogue à celui qui provient, en cas de données analytiques, du recours à des séries entières pour la représentation des intégrales.

Pour les équations aux dérivées partielles $f = 0$, dont le premier membre a les attributs de dérivabilité permettant d'appliquer la théorie usuelle des caractéristiques, une surface intégrale peut être considérée comme une courbe de Jordan (arc simple ou réunion de tels arcs) dans l'espace ayant les multiplicités caractéristiques comme éléments [1]. On peut alors définir dans cette voie des surfaces dont le contingent en chaque point est formé de demi-droites d'un plan, plan qui sera partout tangent au cône élémentaire. Ces surfaces présenteront en général des arêtes de rebroussement. Le point de vue qui permet de les lier à l'équation aux dérivées partielles est tout différent du précédent. Et l'on voit par cet exemple quelles suggestions peuvent donner dans les recherches de géométrie qualitative les problèmes classiques de l'analyse.

**8.** Je dois enfin rappeler qu'après entente sur le sens du mot surface, il n'y a pas qu'une manière de concevoir l'intégration. En prenant l'équation

$$p^2 + q^2 = 1$$

et une ellipse du plan $xOy$, si l'on considère une surface intégrale ayant sa cote uniforme et positive à l'intérieur de cette ellipse, nulle sur l'ellipse, on peut distinguer entre les deux cas suivants :

1° Le paratingent de la surface en chaque point est réduit à un

(1) Ces multiplicités s'obtiennent de suite dans le cas de l'équation

$$(y - p)^2 + q^2 = m^2.$$

plan, astreint à toucher le cône élémentaire : en ce cas, il est impossible de prolonger la surface au delà d'une certaine ligne, projetée suivant la développée de l'ellipse ([1]).

2° Ce paratingent n'est pas nécessairement réduit à un plan : aussi bien que le contingent, il est formé de droites situées en dehors du cône élémentaire ou sur sa surface, l'une au moins de ces droites se trouvant dans ce dernier cas. En prenant pour cote de la surface la plus courte distance d'un point à l'ellipse, cette surface est une intégrale, au nouveau sens, qui est la réunion de la portion de surface S obtenue ci-dessus et d'un autre morceau de surface, prolongeant S au delà de la ligne d'arrêt (ou arête de rebroussement de l'intégrale envisagée comme courbe dans l'espace de multiplicités caractéristiques).

Ce second point de vue est celui de l'*intégration contingente* que j'ai signalé en 1929 aux *Comptes rendus*, t. 189, p. 449, et précisé en 1930 aux *Lincei*, Vol. XII, p. 27-30, et dans diverses publications ultérieures ([2]).

**9.** A la suite de ces généralités, revenons à l'équation (7) pour chercher, lorsque $m$ tend vers zéro, l'allure de ses caractéristiques. Admettons (par adjonction d'hypothèses) que l'on puisse écrire

$$\varphi = m\,\psi(x, y, z, p, q\,; m),$$

$\psi$ et ses dérivées $\psi_x$, $\psi_y$, $\psi_z$, $\psi_p$, $\psi_q$ étant continues par rapport à l'ensemble des variables $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $m$.

Cherchons la structure d'un arc $(\alpha)$ de caractéristique dont la corde maxima tend vers zéro, tout point de $(\alpha)$ tendant vers un point donné

---

([1]) Avec cette conception de l'intégration, le problème de Cauchy n'admet pas une solution pour toute courbe d'appui du plan des $xy$. Pour que la solution existe, il faut et il suffit (dans le cas de $p^2 + q^2 = 1$), que la courbe d'appui soit à courbure bornée (*voir* le n° 6 de mon Mémoire cité au début du présent travail).

([2]) *Voir* le fascicule 71 *du Mémorial des Sciences Mathématiques* (chap. III), et mon article : *Applications de notions infinitésimales directes à la Mécanique* (*Bull. de la Soc. Roy. des Sc. de Liège*, 4e année, février 1935, p. 51-54).

$(x_0, y_0, z_0)$ quand $m$ tend vers zéro. En vertu de (7), le long de ($\alpha$), les quantités $p - y_0$ et $q$ tendent vers zéro. Ceci nous engage à mettre l'équation (7) sous la forme (comportant modification de $m$) :

$$(y - p)^2 + q^2 = m^2(1 + 2\omega), \tag{9}$$

$\omega$ s'annulant sur l'élément de contact $(x_0, y_0, z_0, y_0, 0)$ et possédant d'ailleurs, d'après ce qui précède, des dérivées partielles continues.

Les multiplicités caractéristiques de (9) satisfont à (9) et au système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= p - y - m^2\omega_p, & \frac{dy}{du} &= q - m^2\omega_q, \\ \frac{dq}{du} &= p - y + m^2(\omega_y + q\omega_z), & \frac{dp}{du} &= m^2(\omega_x + p\omega_z). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Le long de l'arc ($\alpha$), les termes en $m^2$ ont leurs coefficients sensiblement constants avec $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, ce qui ouvre la voie à l'application d'inégalités différentielles ou de considérations connexes (*cf.* n° 11).

**10.** Soit $s$ l'abscisse curviligne le long de ($\alpha$). Nous aurons

$$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2.$$

En posant

$$\begin{aligned} R^2 = {} & (1 + p^2)(p - y - m\omega_p)^2 + 2pq(p - y - m^2\omega_p)(q - m^2\omega_q) \\ & + (1 + q^2)(q - m^2\omega_q)^2, \end{aligned}$$

il nous vient

$$\frac{dp}{ds} = \frac{m^2}{R}(\omega_x + p\omega_z), \qquad \frac{dq}{ds} - \frac{dx}{dz} = \frac{m^2}{R}(\omega_y + q\omega_z + \omega_p). \tag{11}$$

Le radical R est de l'ordre de $m$. En effet, d'après (9), la quantité

$$(p - y)^2 + q^2$$

est de l'ordre de $m^2$ : il en est de même pour toute forme quadratique définie et positive par rapport aux variables

$$p - y - m^2\omega_p, \quad q - m^2\omega_q.$$

Mais, dans les seconds membres des relations (11), les numérateurs sont de l'ordre de $m^2$. Il suit de là que les rapports

$$\frac{dq}{ds} - \frac{dx}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{dp}{ds}$$

sont de l'ordre de $m$, et, par suite, tendent uniformément vers zéro avec $m$.

Soit maintenant $l = s_2 - s_1$ un intervalle constant de variation de $s$. L'oscillation de $p$ dans cet intervalle est de l'ordre de $m$, comme $p - y$ est de l'ordre de $m$, l'oscillation de $y$ dans $(s_1, s_2)$ sera de l'ordre de $m$. Et pareillement pour l'oscillation de $q - x$, et, par suite, $q$ étant de l'ordre de $m$, pour celle de $x$. Ainsi les oscillations de $x, y, p, q$ seront de l'ordre de $m$ le long de l'arc $(\alpha)$ si la longueur de cet arc a une valeur $l$ indépendante de $m$. Il en sera de même de l'oscillation de $z$, car l'équation (9) avoisine indéfiniment $dz = y\,dx$, donc $\frac{dz}{ds}$ tend à équivaloir à $y\frac{dx}{ds}$, avec $y$ sensiblement constant.

Finalement, un arc de caractéristique de longueur donnée, lorsque $m$ tend vers zéro, s'enroule en se ramassant sur lui-même, son diamètre tendant vers zéro et ayant l'ordre de $m$.

**11**. Si l'on avait $\omega = 0$, le système [(9), (10)] aurait la solution

$$x - x_0 = m\cos u, \qquad y - y_0 = m \sin u,$$
$$p = y_0, \qquad q = m\cos u,$$
$$z = z_0 + m_0 y \cos u + \frac{m^2}{4}(2u + \sin 2u).$$

Lorsque $u$ croît de $2\pi$, le déplacement du point $(x, y, z)$ a pour composantes

$$\Delta x = 0, \qquad \Delta y = 0, \qquad \Delta z = \pi m^2.$$

Écrivons maintenant les équations (10) comme suit :

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq}{du} - (p - y) = m^2(\omega_y + q\,\omega_z), \\[2mm] \dfrac{d}{du}(p - y) + q = m^2(\omega_x + p\,\omega_z + \omega_q), \end{cases}$$

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{du} = q - m^2\omega_q, \\[2mm] \dfrac{dx}{du} = p - y - m^2\omega_p \end{cases}$$

On tire des relations (12)

$$(14)\qquad \begin{cases} q = m\cos u + m^2(\omega_x + y_0\omega_z + \omega_q)^*, \\ p - y = -m\sin u - m^2\omega_y^*, \end{cases}$$

chaque astérisque indiquant, pour la fonction qu'il accompagne, le fait d'adopter une valeur infiniment voisine de celles prises par cette fonction dans l'intervalle utile.

Des deux équations (13), nous tirons alors

$$\Delta x = -2\pi m^2(\omega_y^* + \omega_p^*), \qquad \Delta y = 2\pi m^2(\omega_x^* + y_0\omega_z^*),$$

cherchons de même $\Delta z$. A cet effet, écrivons

$$\frac{dz}{du} = p\frac{dx}{du} + q\frac{dy}{du} = m^2(1 + 2\omega) + y(p - y) - m^2(p\omega_p + q\omega_q).$$

En formant le produit $y(p - y)$ et intégrant de 0 à $2\pi$, on trouve pour $\Delta z$ une expression dont le terme principal (abstraction faite des termes en $m^3$, $m^4$, ...) est $\pi m^2 - m^2 y_0 \omega_p$ [1].

**12.** Je n'approfondirai pas davantage la structure limite des caractéristiques. Dans le cas de l'équation

$$(\mathrm{E}_m)\qquad (y - p)^2 + q^2 = m^2,$$

les courbes caractéristiques avoisinent indéfiniment les lignes de tourbillon du champ vectoriel attaché à l'équation aux différentielles totales $dz = y\,dx$, limite de $(\mathrm{E}_m)$. Mais [2] le résultat n'est pas général, comme on le voit, avec l'équation

$$(y - p)^2 + q^2 = 2m^2x \qquad (x > 0),$$

qui admet l'intégrale complète

$$z = (x - \alpha)y + \int_\alpha^x \sqrt{2m^2x - (x - \alpha)^2}\,dx + \beta \qquad (\alpha > 0),$$

[1] On calculerait de même des expressions approchées de $x$, $y$, $z$, valables dans un intervalle de variation de $u$ de l'ordre de $m^{-1}$, en adjoignant aux relations (14) les résultats d'intégration approchée des relations (13).

[2] Contrairement à ce que j'avais cru tout d'abord [*cf. C. R. Acad. Sc.*, t. **200**, 1935, p. 1054, note [1]].

et dont les courbes caractéristiques se projettent sur le plan $xOy$ suivant les intégrales de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm(x-\alpha)}{\sqrt{2m^2x-(x-\alpha)^2}},$$

lesquelles sillonnent toute une bande parallèle à $Oy$ et de largeur infiniment petite avec $m$; donc les caractéristiques n'ont pas un voisinage uniforme avec une parallèle à l'axe des $z$.

De cet exemple, nous pouvons tirer une autre information. Cherchons la surface intégrale de l'équation

$$(y-p)^2+q^2=2m^2x,$$

passant par l'axe des $y$. Elle a pour équation

$$z = xy + \varphi(x),$$

en appelant $\varphi(x)$ une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\varphi'^2(x) = 2m^2x - x^2.$$

La surface intégrale ainsi obtenue tend vers une surface de tourbillon (le plan $x=0$), bien que les lignes caractéristiques ne tendent pas ici vers les lignes de tourbillon.

**13.** Il reste à dire quelques mots du voisinage indéfini entre une équation aux dérivées partielles du premier ordre dépendant d'un paramètre $m$ et une équation aux différentielles totales complètement intégrable, ne serait-ce que pour montrer la nécessité de délimiter la question d'une manière précise, comme au début.

La question est simple dans le cas d'une équation

$$a_1\,dx_1 + b_1\,dy_1 + c_1\,dz_1 = 0,$$

qui peut se ramener à la forme $dz=0$ par une transformation de la topologie restreinte du premier ordre. En effet, une équation $(E_m)$ infiniment voisine peut s'écrire, d'après les considérations rappelées au n° 2,

$$(15) \qquad 1+p^2+q^2 = \frac{1}{\cos^2\varepsilon} \qquad \text{ou} \qquad p^2+q^2 = \operatorname{tang}^2\varepsilon,$$

$\varepsilon$ étant une fonction de l'élément de contact $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, laquelle tend uniformément vers zéro avec le paramètre $m$. Or, sous la seconde forme, on montre aisément, que dans une région bornée, l'oscillation de la cote d'une surface intégrale tend vers zéro avec $m$.

Mais la réductibilité à la forme $dz = 0$ par une transformation topologique restreinte du premier ordre n'a pas lieu en général pour des équations aux différentielles totales pouvant se ramener à une équation différentielle ordinaire. En particulier, cette réductibilité n'a pas lieu pour une équation telle que

$$dz - f(y, z)\,dy = 0, \tag{16}$$

la fonction $f$ étant continue sans plus. Alors $(E_m)$ n'est plus susceptible de la forme ci-dessus et le problème de voisinage se complique [1].

**14.** On peut se représenter l'aspect géométrique de la question. Soit $\vec{V}(M)$ un vecteur non nul, dans une certaine région de l'espace, où il dépend continûment du point M. Admettons l'existence d'une famille de surfaces, telle que par un point M de cette région, il passe une et une seule de ces surfaces, normale à $\vec{V}(M)$ en ce point. Si l'on songe au cas classique où les composantes de $\vec{V}$ sont $\left(0,\ 1,\ y^{\frac{2}{3}}\right)$, on voit que les surfaces précédentes ne sont pas nécessairement les seules possédant partout l'orthogonalité à $\vec{V}(M)$. Il se peut qu'on puisse tracer sur l'une d'elles une ligne L telle qu'il y ait une famille infinie d'intégrales de $\vec{V}.dM = 0$ passant par cette ligne : alors, en cherchant, pour une $(E_m)$ infiniment voisine de $\vec{V}.dM = 0$, une intégrale passant par L, il est clair que la famille des surfaces ainsi obtenues pourra présenter une dispersion du même genre : on n'obtiendra pas le voisinage uniforme du premier ordre de ces intégrales avec une surface fixe, tel que nous l'avions défini au n° 1 de ce travail.

[1] Cela montre donc bien que les précautions prises au début pour la réduction de l'équation non intégrable $\vec{V}.dM = 0$ ou d'une $(E_m)$ infiniment voisine à des formes canoniques n'ont rien de superflu.