JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRI LEBESGUE

Sur la méthode de Carl Neumann

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 205-217.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_205_0>

Sur la méthode de Carl Neumann;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

On sait qu'au début de ses recherches sur les fonctions abéliennes, Riemann résout le problème de Dirichlet par une méthode fautive, car elle suppose que toute quantité variable atteint sa borne inférieure; *il confond borne inférieure et minimum.*

Weierstrass releva la faute. A Weierstrass nous devons la démonstration du fait que toute fonction continue de variables atteint sa borne inférieure et les célèbres conditions suffisantes pour le calcul des variations. Mais le problème de Dirichlet n'était pas résolu par ces recherches; l'existence d'intégrales de première espèce pour une surface de Riemann quelconque, que Riemann avait déduit du problème de Dirichlet, restait en question.

Carl Neumann s'est occupé avec succès de ces questions; il a notamment donné pour la résolution du problème de Dirichlet une méthode restée justement célèbre; Neumann se bornait à l'étude des domaines convexes, Poincaré a justifié la méthode pour des cas étendus de domaines non convexes; les recherches de Fredholm ont fait mieux comprendre encore l'importance de cette méthode et les raisons de son succès. La critique que j'en veux faire ici ne portera que sur sa légitimation classique pour le cas des domaines convexes.

Celle-ci repose en effet sur un lemme géométrique dont la prétendue démonstration donnée est basée uniquement sur la même confusion entre borne inférieure et minimum. Cette faute est de Neumann; mais elle est aussi celle des Auteurs qui opposent Riemann et Neumann, celle des Professeurs qui ont exposé le raisonnement de Neumann et de tous ceux qui ont lu ce raisonnement sans protester. Bref, nous avons tous fait cette faute; aussi mérite-t-elle qu'on s'arrête un instant pour l'examiner.

Sans doute, maintenant qu'est faite la distinction entre borne inférieure et minimum, il n'y a plus guère de profit mathématique précis à tirer de cet examen; mais il y a un profit, certain quoique d'un autre ordre, à constater avec quelle facilité nous errons et qu'il suffit d'avoir donné un aspect géométrique à une erreur classique et ancienne pour que personne ne la reconnaisse plus.

Il s'agit bien d'une erreur ancienne; quelque cinquante ans avant l'objection de Weierstrass, Servois opposait la même objection à Argand qui croyait avoir démontré entièrement le théorème de d'Alembert, alors qu'il n'avait construit qu'une partie de la démonstration en prouvant que, si le module d'un polynome atteint une valeur non nulle, il atteint aussi des valeurs plus petites. Servois, dans un langage imagé et suggestif, déclare [1] :

« Ce n'est point assez, ce me semble, de trouver des valeurs de x qui donnent au polynome des valeurs sans cesse décroissantes; il faut de plus que la loi des décroissements amène nécessairement le polynome à zéro, ou qu'elle soit telle que zéro ne soit pas, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'asymptote du polynome ».

Plus anciennement encore, on avait compris qu'il fallait distinguer, quand on étudie la convergence d'une série, entre

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda < 1;$$

et, comme la quantité à majorer dans le raisonnement de Neumann est précisément le rapport de deux termes consécutifs d'une série, c'est cette faute de débutant que nous ne reconnaissons pas.

Le lemme est d'ailleurs facile à démontrer rigoureusement en s'aidant de la méthode directe du calcul des variations et de calculs qui remontent à Neumann lui-même. On le démontre ici pour tous les domaines convexes non biétoilés; condition restrictive essentielle pour l'exactitude du lemme, sous quelque forme qu'on l'énonce.

---

(1) *Voir*, à ce sujet, *Géomètres français sous la Révolution*, par Niels Nielsen; Copenhague et Paris, 1929.

Un *autre* lemme, *nettement différent*, nous permettra d'ailleurs de légitimer les développements en série de Neumann pour tous les domaines convexes, sans aucune espèce de restriction.

1. La méthode de Carl Neumann pour la résolution du problème de Dirichlet est basée, comme l'on sait, sur les propriétés des potentiels de double couche : on recherche la densité $\delta(s)$ d'une double couche répartie sur la frontière F du domaine donné et dont le potentiel se réduise sur cette frontière, du côté intérieur au domaine, à la fonction donnée $f(x)$. Ceci conduit à l'équation

$$[E - A(x)]\delta(x) + \int_F \delta(s)\, d\theta_x^s = f(x),$$

dans laquelle x et s désignent deux points de la frontière; E, $A(x)$, θ_x^s sont les mesures, faites avec les unités trigonométriques normales, d'angles solides. Pour E, il s'agit de tout l'espace; pour $A(x)$, de l'angle sous lequel on voit le domaine, supposé convexe, du point x; pour θ_x^s, de l'angle sous lequel, de x, on voit un domaine découpé sur la frontière et parcouru par le point s. L'intégrale est ce qu'on appelle maintenant une intégrale de Stieltjes.

Sous cette forme, l'équation convient aux domaines convexes les plus généraux; mais cela suppose qu'on a étudié les propriétés des doubles couches réparties sur la frontière de tels domaines; je ne m'y arrêterai pas car mes observations s'appliquent tout aussi bien aux domaines les plus simples, à un polygone et tout spécialement à un quadrilatère. On pourra donc supposer qu'on est dans le plan, interpréter x et s comme des paramètres; E sera 2π, $A(x)$ l'angle du contour F au point x et, si l'on suppose que F n'a qu'un nombre fini de points singuliers, comme le faisait Neumann, l'intégrale se transformera en une intégrale ordinaire; mais on pourra aussi, au contraire, conserver aux symboles leur portée générale.

Pour résoudre l'équation du problème, Neumann l'écrit sous la forme équivalente

$$f(x) = E\,\delta(x) + \int_F [\delta(s) - \delta(x)]\, d\theta_x^s,$$

et, par approximations successives, il trouve

$$\delta(x) = \nu_0(x) + \nu_1(x) + \nu_2(x) + \ldots$$

avec

$$\nu_0(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{E}}, \qquad \nu_i(x) = -\frac{1}{\mathrm{E}}\int_{\mathrm{F}} [\nu_{i-1}(s) - \nu_{i-1}(x)]\, d\theta_x^s.$$

Un calcul facile montre que, si la série $\delta(x)$ est majorée par une série convergente de constantes positives, la fonction $\delta(x)$ vérifie bien l'équation et conduit à la solution du problème de Dirichlet. Pour obtenir cette série majorante supposons que, sur tout F, on ait

$$m_i \leqq \nu_i(s) \leqq \mathrm{M}_i;$$

et partageons F en deux parties A_i et B_i lieux des points s tels que : pour A_i,

$$\frac{\mathrm{M}_{i-1} + m_{i-1}}{2} \leqq \nu_{i-1}(s) \leqq \mathrm{M}_{i-1};$$

pour B_i,

$$m_{i-1} \leqq \nu_{i-1}(s) < \frac{\mathrm{M}_{i-1} + m_{i-1}}{2}.$$

D'où, pour $\nu_{i-1}(s) - \nu_{i-1}(x)$, respectivement les limites,

pour s dans A_i, $\quad -\dfrac{\mathrm{M}_{i-1} - m_{i-1}}{2}, \quad (\mathrm{M}_{i-1} - m_{i-1}),$

pour s dans B_i, $\quad -(\mathrm{M}_{i-1} - m_{i-1}), \quad \dfrac{\mathrm{M}_{i-1} - m_{i-1}}{2};$

et, par suite,

$$\frac{\mathrm{M}_{i-1} - m_{i-1}}{\mathrm{E}}\left[\int_{\mathrm{A}_i} d\theta_x^s + \frac{1}{2}\int_{\mathrm{B}_i} d\theta_x^s\right] \leqq \nu_i(x) \leqq \frac{\mathrm{M}_{i-1} - m_{i-1}}{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathrm{A}_i} d\theta_x^s + \int_{\mathrm{B}_i} d\theta_x^s\right].$$

Si donc on prend pour m_i et M_i les bornes exactes de ν_i, la différence $\mathrm{M}_i - m_i$, qui sera la borne supérieure de $\nu_i(x) - \nu_i(y)$, est telle que

$$\mathrm{M}_i - m_i \leqq (\mathrm{M}_{i-1} - m_{i-1})\Lambda,$$

Λ étant la borne supérieure de

$$\Lambda(x, y, \mathrm{A}_i, \mathrm{B}_i) = \frac{1}{\mathrm{E}}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathrm{A}_i} d\theta_x^s + \int_{\mathrm{B}_i} d\theta_x^s + \int_{\mathrm{A}_i} d\theta_y^s + \frac{1}{2}\int_{\mathrm{B}_i} d\theta_y^s\right\};$$

cette borne supérieure étant relative à tous les choix possibles de x et de y sur F et à tous les partages possibles de F en deux ensembles complémentaires A_i, B_i [1]. D'où $M_i - m_i < kA_i$, avec une valeur convenable de k, et, puisque $\int_F d\theta_x^s$ ne peut surpasser E,

$$|\nu_i(x)| < k\Lambda^{i-1}.$$

Si donc Λ est inférieur à 1, la solution est obtenue.

2. C'est ici qu'intervient le lemme géométrique dont j'ai parlé; on l'énonce sous des formes diverses. Les intégrales qui figurent dans la définition de Λ sont les angles $A_{i,x}$; $B_{i,x}$; $A_{i,y}$; $B_{i,y}$ sous lesquels les parties A_i et B_i sont vues des points x et y; de sorte que l'on a, par exemple,

$$\begin{aligned}\Lambda(x, y, A_i, B_i) &= \frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}A_{i,x} + B_{i,x} + A_{i,y} + \frac{1}{2}B_{i,y}\right]\\ &= \frac{1}{E}\left[(A_{i,x} + B_{i,x}) + (A_{i,y} + B_{i,y}) - \frac{1}{2}(A_{i,x}\, B_{i,y})\right]\\ &= \frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}(A_{i,x} + B_{i,x}) + \frac{1}{2}(A_{i,y} + B_{i,y}) + \frac{1}{2}(A_{i,y} + B_{i,x})\right]\\ &= \frac{1}{E}\left[(A_{i,x} + B_{i,x}) + \frac{1}{2}(A_{i,y} + B_{i,y}) + \frac{1}{2}(A_{i,y} - A_{i,x})\right].\end{aligned}$$

En remarquant que les parenthèses $(A_{i,x} + B_{i,x})$, $(A_{i,y} + B_{i,y})$ sont au plus égale à $\frac{E}{2}$, à ces expressions de Λ correspondent les formes suivantes du lemme :

Il existe un nombre q, indépendant du choix des deux points x et y sur la frontière F *et de la division de* F *en deux parties* A_i et B_i *tel que l'on ait*

(Forme I) $\frac{1}{2}A_{i,x} + B_{i,x} + A_{i,y} + \frac{1}{2}B_{i,y} \leqq qE$ avec $q < 1$;

(Forme II) $A_{i,x} + B_{i,y} \geqq qE$, avec $q > 0$;

(Forme III) $A_{i,x} + B_{i,y} \leqq qE$, avec $q < 1$;

(Forme IV) $A_{i,y} - A_{i,x} \leqq qE$, avec $q < \frac{1}{2}$.

---

(1) On pourrait assujettir A_i à être fermé, donc B_i à être ouvert, et à contenir tous deux des domaines, mais, en réalité, il suffit que A_i, donc B_i, soit mesurable afin que les intégrales considérées existent.

La forme II se démontre généralement en disant : $A_{i,x}$ ne peut être nul que si x est le sommet d'une partie conique de F à laquelle A_i appartient; en d'autres termes si A_i est un lieu de segment de droites passant toutes par x, $B_{i,y}$ ne s'annule que dans des conditions analogues. *Donc la forme II est justifiée pour tous les domaines non biétoilés*, c'est-à-dire tels que F ne soit pas formée de deux parties coniques.

De la forme II la forme III résulte de suite, puisque l'on a

$$A_{i,x} + A_{i,y} + B_{i,x} + B_{i,y} \leqq E;$$

cette forme III est celle que Neumann formule dans son énoncé. On pourrait certes l'atteindre directement sans passer par II, mais c'est par le détour employé ici que Neumann y arrive.

Il est clair que le raisonnement rappelé est inopérant; du fait que

$$\zeta = (A_{i,x} + B_{i,y}) \times \frac{1}{E}$$

est inférieur à 1 pour tout choix de la division A_i, B_i et des points x, y, il n'en résulte nullement que sa borne supérieure λ soit aussi inférieure à 1. On ne peut l'affirmer que si l'on a prouvé que la borne supérieure est aussi un maximum, c'est-à-dire est elle-même atteinte pour un choix des A_i, B_i, x, y. *Le raisonnement de Neumann, destiné à remplacer celui de Riemann est donc fondé exactement sur la même confusion entre borne supérieure et maximum, justement critiquée par Weierstrass.*

Il est tout à fait étonnant que tout le monde, à commencer par Weierstrass, ait admis la validité du raisonnement de Neumann et que nos traités actuels continuent à opposer le raisonnement de Riemann, déclaré faux, à celui de Neumann, proclamé entièrement correct. Et pourtant Neumann attirait l'attention sur le point litigieux dans l'énoncé même de son lemme *Hauptsache;* c'est, en effet, dans l'énoncé qu'il passe du fait, exact, démontré sur φ à la conclusion fausse relative à la borne supérieure λ de ζ. Il le fait en utilisant la notation (sic !) qui ne peut manquer d'attirer l'attention, dans les termes suivants (1) :

(1) *Untersuchungen über das logarithmische und Neuton'sche Potential*, par C. NEUMANN, Lepzig, Teubner, 1877, p. 173.

« ...., so wird ζ dem spielraum unterworfen sein :

$$0 \leqq \underset{(\text{sic !})}{\zeta} < 1.$$

Was von der Variablen ζ gilt, gilt aber nothwendig auch von jedem specialiwerth dieser Variablen. Bezeichnet man also den Maximalwerth von ζ mit λ, so folgt aus der vorstehenden Formel sofort :

$$0 \leqq \zeta \leqq \underset{(\text{sic !})}{\lambda} < 1. \text{ »}$$

Ainsi Neumann, ayant à majorer le rapport $\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n}$, fait exactement la faute des élèves qui ne distinguent pas

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \qquad \text{de} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda < 1 ;$$

mais il la fait, si je puis dire, d'une façon plus savante, en affirmant que la maximalwerth de ζ est une specialwerth de ζ, c'est-à-dire exactement sous la même forme que Riemann.

3. On ne saurait mettre la confusion qu'il a commise en plus parfaite lumière qu'il ne l'a fait lui-même, mais, si la lacune de la démonstration est claire, comme nous justifierons dans un instant le lemme de Neumann, avec l'énoncé de Neumann et en nous restreignant comme lui au cas des domaines non biétoilés, il ne sera pas superflu d'indiquer que, dans cette question du lemme de Neumann, le raisonnement faux de Neumann n'a pas conduit seulement à des résultats exacts mais aussi à des énoncés erronés.

Dans un ouvrage excellent, l'Auteur adopte la forme IV et, raisonnant comme Neumann, il dit : $A_{i,y} - A_{i,x}$ ne peut être égal à $\frac{E}{2}$ que pour $A_{i,y} = \frac{E}{2}$, $A_{i,x} = 0$ et ceci exige que le domaine soit limité par une partie conique A_i et une variété linéaire B_i, on prendra x au sommet du cône, y dans B_i. Ainsi, *il ne sera donc plus nécessaire d'écarter que ces domaines pyramidaux et non tous les domaines biétoilés*.

On notera que c'est bien le seul raisonnement de Neumann qui a été employé, qu'aucune faute nouvelle n'a été surajoutée à celle de

Neumann, c'est-à-dire à celle que nous commettons tous quand nous acquiesçons au raisonnement de Neumann, et pourtant, cette fois, la conclusion est fausse; car :

Le lemme de Neumann est faux pour tout domaine biétoilé quelle que soit celle des formes I à IV sous laquelle on l'énonce.

Pour montrer cela il suffira de s'occuper de la forme I puisque les autres ont été obtenues par des majorations des intégrales servant à la définition de A. Plaçons-nous d'abord dans le cas du plan, un domaine biétoilé est un quadrilatère, ABCD, exceptionnellement un triangle ABC, on placerait alors D sur le côté AC. ε_i étant arbitrairement petit positif, prenons des voisinages de A et de C, tels, pour celui de A, par exemple, que pour chaque point ξ de ce voisinage, les angles BAD, BξD diffèrent de moins de ε_i; prenons dans le voisinage de A et sur AB et faisons subir à l'angle DξB une translation dans laquelle ξ se rapproche de A sur BA, arrêtons-nous dans une position telle que la partie du côté AD extérieure à cet angle soit vue du voisinage de C sous un angle inférieur à ε_i; soient alors x_i la position de ξ, Dα_i la partie de DA extérieure à l'angle. De façon analogue nous prendrons η, puis y_i sur CB et Dγ_i sur DC. B_i sera formée de Aα_i, Dγ_i, BC; A_i sera formée de Cγ_i, Dα_i, AB. On a :

$$A_{i,x_i} > \pi - 2\varepsilon_i, \qquad B_{i,y_i} > \pi - 2\varepsilon_i,$$
$$A_{i,x_i} + B_{i,x_i} = \pi, \qquad A_{i,y_i} + B_{i,y_i} = \pi;$$

donc, pour ε_i tendant vers zéro,

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}A_{i,x} + B_{i,x} + A_{i,y} + \frac{1}{2}B_{i,y}\right\}$$

tend vers 1.

Dans le cas d'un domaine biétoilé à plus de deux dimensions, on opérera exactement de même. La frontière F pourra toujours être considérée comme formée de deux parties coniques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ de sommets A et C se coupant suivant une certaine variété $\mathcal{B}$D; sur $\mathcal{A}$ on choisira une génératrice le long de laquelle il existe un élément tangent et sur cette génératrice un point ξ dans un certain voisinage de A d'où l'on voie la variété BD sous un angle solide différant de moins de ε_i de celui sous lequel elle est vue de A, et l'on fera subir au cône (ξ, BD) la translation rectiligne qui amènerait ξ en A en s'arrêtant quand la partie de $\mathcal{A}$ extérieure à ce cône est vue du voisinage de $\mathcal{C}$ sous un angle solide inférieur à ε_i, ...

Ainsi, on ne peut étendre le lemme de Neumann au delà du cas considéré par Neumann; il est vain d'espérer atteindre de cette façon des domaines biétoilés.

Il est tout à fait surprenant que Neumann se soit juste arrêté à point. J'ai déjà indiqué que Neumann, bien que concluant pour la forme III, avait en réalité raisonné sur la forme II; s'il avait raisonné directement sur III, il aurait dit : $A_{i,x} = \frac{E}{2}$ seulement quand il y a un élément tangent en x et que B_i est tout entier dans cet élément tangent. La même chose peut se répéter après permutation de A_i, B_i, de x, y; or les conditions indiquées dans les deux cas sont incompatibles, donc

$$A_{i,x} + B_{i,y} \underset{(\text{sic}!)}{<} E, \qquad \text{d'où} \quad A_{i,x} + B_{i,y} \leqq q E \underset{(\text{sic}!)}{<} E;$$

et, comme conclusion, la forme III du lemme *pour tous les domaines convexes sans aucune exception;* ce qui serait erroné.

D'ailleurs, des considérations mêmes de Neumann on pourrait tirer la même conclusion, puisqu'elles donnent la première des inégalités précédentes sauf pour le cas où A_i et B_i seraient deux parties coniques de sommets respectivement y et x et qu'alors on a

$$A_{i,y} = B_{i,x} = 0; \qquad A_{i,x} + B_{i,x} \leqq \frac{E}{2}; \qquad A_{i,y} + B_{y,i} \leqq \frac{E}{2};$$

les deux dernières égalités s'excluant l'une, l'autre. Cela revient en somme à utiliser la forme I et,en effet, le mode de preuve de Neumann appliqué à I donnerait cet énoncé pour tous les domaines sans restrictions.

Bref, le mode de raisonnement employé est non seulement insuffisant, il est erroné et conduit aussi bien à des conclusions fausses qu'à des conclusions exactes.

4. Une démonstration du lemme de Neumann ne peut reposer que sur l'évaluation approchée de la quantité, dont la borne est en discussion, et le calcul à faire pour cela s'impose. Il a été fait par Neumann lui-même qui, après la démonstration (?) de son lemme, calcule λ pour une ellipse et un ellipsoïde par exemple.

Neumann ne voyait pas dans ce calcul un appui pour sa démonstration dont la validité lui paraissait certaine, mais certains auteurs, qui ont introduit le commencement du calcul de Neumann dans la démonstration même du lemme, avaient peut-être quelque doute sur cette validité. Ils ne nous ont pas renseignés sur ces doutes; il est peu vraisemblable d'ailleurs qu'ils aient bien assimilé l'une à l'autre les lacunes des raisonnements de Neumann et de Riemann, sans quoi, après avoir majoré l'expression étudiée par une quantité variable V, ils n'auraient pas oublié de prendre les précautions nécessaires pour passer de V à sa borne supérieure sans donner prise à la même critique. Ces précautions sont d'ailleurs simples; V est le plus souvent une fonction ordinaire, il suffit donc de se placer dans des conditions où elle est continue, mais on aboutit ainsi à des domaines formant une famille moins vaste que celle que les exposés que j'ai vus croyaient examiner.

Quoi qu'il en soit, c'est au calcul de Neumann et à ces essais de meilleure démonstration du lemme que se rattache immédiatement la preuve qui suit. Pour lui donner une valeur pour tous les domaines convexes non biétoilés, il suffit de se rappeler que, presque partout, la frontière d'un tel domaine a un élément tangent et que, dans les intégrales, il suffit de s'occuper de ces points non exceptionnels pour lesquels s'appliquent tous les calculs qui sont classiques pour le cas où la frontière a partout des éléments tangents; on pourra d'ailleurs, si on le veut, interpréter ce qui suit pour ce cas particulier.

Prenons, par exemple, la forme de Neumann, et raisonnons sur la borne supérieure de $\int_{A_i} d\theta^s_{x_i} + \int_{B_i} d\theta^s_{y_i}$, pour tous les choix possibles de x_i, y_i, A_i, B_i. Nous pouvons, c'est le point de départ même de la méthode directe, ne conserver que des choix pour lesquels les x_i d'une part, les y_i d'autre part, ont des points limites, ξ, η qui, d'ailleurs, sont peut-être confondus. Puisque le domaine n'est pas biétoilé, il existe un point M de F en lequel F a un élément tangent lequel ne passe ni par ξ, ni par η. Alors si autour de ξ et η on a pris des voisinages assez petits $V(\xi)$ et $V(\eta)$, autour de M on peut prendre un voisinage V(M) tel que tout élément $\overline{m}$ tangent à F en un point m

de V(M) ne coupe ni V(ξ), ni V(η). Prenons x et y respectivement dans V(ξ) et V(η); les égalités classiques

$$d\theta_x^m\, mx \sin(mx, \overline{m}) = d\theta_y^m\, my \sin(my, \overline{m}) = d\theta_o^m\, m\mathrm{O} \sin(m\mathrm{O}, \overline{m}),$$

dans lesquelles O est un point intérieur au domaine, conservent le même sens dans le cas général, c'est-à-dire qu'elles permettent la transformation d'intégrales en $d\theta_x^m$ en intégrales en $d\theta_o^m$, dans lesquelles il n'y a à tenir compte que des points m pour lesquels $\overline{m}$ existe. Or, les distances et les sinus ont des bornes finies et différentes de zéro, donc, pour un certain $k > 0$, on a

$$d\theta_{x_i}^m > k\, d\theta_o^m, \qquad d\theta_{y_i}^m > k\, d\theta_o^m$$

si l'on pose

$$v = \int_{\mathrm{V(M)}} d\theta_o^m, \qquad v > 0;$$

et, si A′ et B′ sont les parties de V(M) qui appartiennent à A_i et B_i, on a

$$\int_{\mathrm{A}'} d\theta_{y_i}^s > k \int_{\mathrm{A}'} d\theta_o^s, \qquad \int_{\mathrm{B}'} d\theta_{x_i}^s > k \int_{\mathrm{B}'} d\theta_o^s, \qquad \int_{\mathrm{A}'} d\theta_0^s + \int_{\mathrm{B}'} d\theta_o^s = v.$$

Et puisque

$$\int_{\mathrm{B}_i+\mathrm{A}'} d\theta_{y_i}^s \leq \frac{\mathrm{E}}{2}, \qquad \int_{\mathrm{A}_i+\mathrm{B}'} d\theta_{x_i}^s \leq \frac{\mathrm{E}}{2};$$

on a

$$\int_{\mathrm{A}_i} d\theta_{x_i}^s + \int_{\mathrm{B}_i} d\theta_{y_i}^s < \mathrm{E} - kv,$$

le lemme de Neumann est prouvé pour tous les domaines convexes non biétoilés.

5. Le développement en série de Neumann pour la fonction densité fournissant la solution du problème de Dirichlet est donc prouvé dans les mêmes conditions. On sait que Poincaré a montré (*Acta Mathematica*, t. XX) que ce développement s'appliquait même à des domaines non convexes sous la condition de l'existence de certaines courbures. Ici, on ne sortira pas du cas des domaines convexes, le seul pour lequel on puisse utiliser les raisonnements simples de Neumann, mais on ne fera aucune hypothèse supplémentaire. Le cas des domaines biétoilés, qui comprend celui des domaines pyramidaux, reste en réalité le seul à examiner.

On a vu (§ 1), que l'on a

$$|\nu_i(x) - \nu_i(y)| \leqq (M_{i-1} - m_{i-1})\,\Lambda(x, y, A_i, B_i),$$

d'où, d'après la définition par récurrence des ν_i,

$$|\nu_{i+1}(X)| \leqq \frac{(M_{i-1} - m_i - 1)}{E} \int_F \Lambda(s, X)\, d\theta_X^s,$$

si $\Lambda(s, X)$ est la limite supérieure de $\Lambda(s, X, A_i, B_i)$ pour tout choix de A_i, B_i.

Supposons que l'intégrale de second membre ait qE pour borne supérieure, avec $q < \frac{1}{2}$, pour tout choix de s et X; alors de l'inégalité précédente résulterait aussi

$$|\nu_{i+1}(X)| \leqq q(M_{i-1} - m_{i-1}) \qquad \text{et} \qquad |\nu_{i+1}(X) - \nu_{i+1}(Y)| \leqq 2q(M_{i-1} - m_{i-1}).$$

Donc, l'oscillation de f étant 2ωE, on aurait successivement

$$|\nu_1(x)| \leqq \omega, \quad |\nu_2(x)| \leqq \omega; \quad |\nu_3(x)| \leqq 2q\omega, \quad |\nu_4(x)| \leqq 2q\omega;$$
$$|\nu_5(x)| \leqq (2q)^2\omega, \quad |\nu_6(x)| \leqq (2q)^2\omega; \ \ldots,$$

et il serait démontré que la série de Neumann converge encore à la façon d'une progression géométrique.

Mais il faut prouver un nouveau lemme :

Pour chaque domaine convexe l'intégrale $\int_F \Lambda(s, X)\, d\theta_X^s$ *a une borne supérieure* qE, *q étant inférieur à* $\frac{1}{2}$.

La quantité $\Lambda(s, X, A_i, B_i)$ ne surpassant jamais 1, il en est de même de $\Lambda(s, X)$; donc si l'on sait que $\Lambda(s, X)$ est inférieur à $\lambda < 1$ pour les points s d'un domaine vu de X sous un angle non nul et supérieur à une limite fixe α, l'intégrale sera au plus $\frac{E}{2} - (1 - \lambda)\alpha$ et la proposition sera prouvée.

Soit ξ un point limite de points X pour lesquels $\int_F \Lambda(s, X)\, d\theta_X^s$, qui est une fonction du point X, tend vers sa borne supérieure. Choisissons, ce qui est toujours possible, un point η tel que, si le domaine est biétoilé, ξ et η n'en soient pas deux sommets; alors nous avons, au paragraphe précédent, considéré un point M en lequel il y avait un élément tangent ne passant ni par ξ, ni par η et, grâce à lui, nous avons déterminé deux voisinages $V(\xi)$, $V(\eta)$ de ξ et η tels que si X est dans le premier, s dans le second, $\Lambda(s, X, A_i, B_i)$ soit inférieur à un nombre λ inférieur à 1. Alors, $\Lambda(s, X)$ est inférieur à λ. Si, de plus, le voisinage $V(\eta)$ est vu de chacun de ces X sous un angle plus grand que $\alpha > 0$, la démonstration est acquise.

Or, si le cône tangent à F et de sommet σ ne passe pas par ξ, de ξ on voit $V(\eta)$ sous un angle non nul 2α; de tout point de $V(\xi)$, pris assez petit, on le verra sous un angle supérieur à α. Ainsi, il ne reste à examiner que les domaines tels que, si l'on a pris M ayant un élément tangent $\overline{M}$ ne passant pas par ξ, le cône tangent à F en un point quelconque η passe toujours par M ou ξ. En d'autres termes, le domaine doit être biétoilé et de sommets M et ξ, quel que soit le choix indiqué de M; donc il doit être pyramidal, F étant constituée d'une partie conique $\mathcal{C}$ de sommet ξ et d'une base $\mathcal{B}$.

Imaginons alors que les points ξ et η du paragraphe précédent sont confondus en notre sommet ξ; prenons $V(\xi)$ et $V(\eta)$ confondus et limités par une section $\mathcal{B}_1$ parallèle à $\mathcal{B}$. M sera pris intérieur à $\mathcal{B}$, ainsi que $V(M)$. Alors, pour s et X dans $V(\xi)$, $\Lambda(s, X, A_i, B_i)$ est inférieur à un nombre λ inférieur à 1, donc aussi $\Lambda(s, X)$. Mais, de tout point X de $V(\xi)$, sauf du point ξ (1), on voit $V(\eta) \equiv V(\xi)$ sous un angle supérieur au minimum α de l'angle sous lequel on voit $V(\xi)$, ou $\mathcal{B}_1$, d'un point quelconque P frontière de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{C}$, lequel angle est une fonction continue de P. Donc le lemme est prouvé dans tous les cas.

La fonction, harmonique dans un domaine convexe et se réduisant sur sa frontière à une fonction continue donnée, est donc fournie par la série de Neumann qui converge à la façon d'une progression géométrique; dans tous les cas, sans aucune restriction.

---

(1) Le cas de $\int_F \Lambda(s, \xi)\, d\theta_\xi^s$ n'est pas à examiner puisque $\int_F d\theta_\xi^s$ est inférieur à $\frac{E}{2}$.