JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SILVIO MINETTI

Sur quelques points de la théorie des fonctions et sur un nouveau critérium de normalité d'une famille de fonctions analytiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 155-178.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_155_0>

Sur quelques points de la théorie des fonctions et sur un nouveau critérium de normalité d'une famille de fonctions analytiques;

PAR SILVIO **MINETTI**.

INTRODUCTION.

Ce Mémoire contient plusieurs résultats concernant la théorie des fonctions et celle des familles de fonctions analytiques. Ils sont étroitement liés les uns aux autres, mais je crois toutefois que même en se bornant à considérer chacun d'eux isolément ils puissent rendre, séparément, beaucoup de services dans des questions les plus variées des deux théories tout à l'heure rappelées.

Ce qui va jouer ici un rôle tout à fait fondamental c'est toujours une double inégalité qui contient comme cas particulier l'inégalité bien connue de M. Carathéodory; mais ce sera la partie de cette double inégalité qui est de sens opposé aux inégalités utilisées généralement dans les recherches modernes de la théorie des fonctions et en particulier celle de M. Carathéodory qui sera utilisée constamment ici et qui nous permettra d'obtenir tous nos résultats.

Dans le Chapitre I de ce Mémoire je fais remarquer tout d'abord une relation qui donne les valeurs que la partie imaginaire $V(\rho, \varphi)$ d'une fonction holomorphe pour $|\rho e^{i\varphi}| < 1$ et continue pour $|\rho e^{i\varphi}| \leq 1$, acquiert dans le cercle unité C en fonction de la valeur $V(0, \varphi)$ qu'elle acquiert à l'origine et des valeurs $U(\psi)$ qu'elle acquiert sur le contour de ce domaine. Je prends ensuite l'occasion de donner une nouvelle forme de la condition nécessaire et suffisante pour que $U(\psi)$ et $V(\psi)$

étant deux fonctions continues et périodiques de ψ pour $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$, l'expression $U(\psi) + iV(\psi)$ représente les valeurs qu'une fonction $f(z)$ holomorphe à l'intérieur de C et continue dans ce cercle fermé acquiert sur le contour de C. Dans cette condition, d'ailleurs, on ne fait pas intervenir d'aucune façon l'hypothèse de la dérivabilité de $U(\psi)$ et $V(\psi)$.

Dans le Chapitre II j'établis l'inégalité fondamentale dont nous avons parlé tout à l'heure. Je passe ensuite aux applications.

C'est ainsi que dans le Chapitre III j'expose, en premier lieu, un théorème qui va nous donner le rayon d'un cercle ayant pour centre un point P, à l'intérieur duquel une fonction holomorphe dans le voisinage de P et qui n'est pas nulle en ce point, ne peut pas s'annuler. On en déduit aussitôt, de même, que dans ce cercle elle ne peut acquérir une infinité de valeurs qui satisfont à certaines conditions bien déterminées.

On passe ensuite aux familles de fonctions analytiques; il suffit alors d'appliquer à une telle famille le dernier théorème cité pour obtenir un critérium qui permet de juger au moyen d'une condition bien simple si, dans le voisinage d'un point donné, une certaine valeur $\alpha + i\beta$ est ou non exceptionnelle pour la famille envisagée.

On parvient ainsi, et tout naturellement, à un nouveau critérium de normalité d'une famille de fonctions analytiques. Ce critérium qui va se présenter sous une forme très simple et maniable est beaucoup plus général que le critérium fondamental de normalité, à savoir celui des deux valeurs exceptionnelles.

On verra bien qu'on pourrait l'appeler critérium des valeurs exceptionnelles au point de vue local; toutefois nous l'appellerons tout court critérium de normalité M, car les conditions qu'il impose aux fonctions de la famille envisagée se rapportent aussi aux valeurs maxima des modules d'une des deux parties réelle ou imaginaire des fonctions dans le voisinage de chaque point du domaine C. Il est bon de remarquer à ce propos que, contrairement à ce qui arrive pour tous les critères de normalité que l'on connaît jusqu'ici, il se rapporte simplement à des conditions locales et pas du tout à des conditions qui doivent être satisfaites dans tout le domaine où l'on considère la famille des fonctions qu'on va envisager.

Le Chapitre IV, très bref, est consacré a son tour à quelques applications du nouveau critérium de normalité établi au Chapitre III.

Il sera appliqué tout d'abord au problème de l'allure d'une fonction analytique dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé et l'on en déduit ainsi une nouvelle propriété des suites de cercles de Julia en obtenant un nouveau théorème du type de celui de M. Picard; on passe ensuite à l'application aux suites de fonctions, et l'on a ainsi l'occasion de démontrer un nouveau théorème sur la convergence uniforme. Celui-ci se rapporte aux suites convergentes de fonctions holomorphes dans un même domaine et va nous donner une condition suffisante bien simple pour qu'un point P de ce domaine soit, pour la suite envisagée, un point de convergence uniforme. Je crois que par sa simplicité il est destiné à entrer dans l'usage courant, et que par conséquent c'est un théorème remarquable.

CHAPITRE I.

1. Il est bien connu que si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un domaine C et continue dans le domaine fermé $C+(C)$ elle est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle acquiert au contour du domaine.

C'est la conséquence la plus profonde, au point de vue conceptuel, de la célèbre formule de Cauchy.

En même temps les conditions de monogénéité de Cauchy, à savoir

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

où

$$U+iV=f(z),\qquad z=x+iy$$

ont montré que l'étude d'une fonction holomorphe se ramène à l'étude d'un système de deux solutions conjuguées U et V de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0$$

de sorte que la théorie des fonctions holomorphes vient à se trouver intimement liée à celle des fonctions harmoniques de deux variables réelles indépendantes et, en conséquence, au célèbre problème de Dirichlet.

Mais il faut bien remarquer, comme observe aussi M. Hadamard dans son Cours d'Analyse [1], que la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(Z)}{Z - z} dZ$$

fait connaître, en tout point intérieur de C, la valeur de la fonction holomorphe qui prend sur le contour (C) la succession de valeurs données $U + iV$ « si cette fonction existe », et qui en général ce n'est pas ce qui a lieu si la succession de valeurs au contour est donnée arbitrairement.

D'autre part on peut aisément s'assurer que la valeur d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un domaine C et continue dans le domaine fermé $C + (C)$, est aussi déterminée par les valeurs que sa partie réelle $U(x, y)$ acquiert sur le contour (C) et par la valeur que sa partie imaginaire $V(x, y)$ acquiert en un point intérieur au domaine.

Si l'on considère, pour plus de simplicité et comme nous ferons à partir de ce moment, le domaine constitué par le cercle unité on a en effet la formule

$$f(z) = iV_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\psi) \frac{Z + z}{Z - z} d\psi$$

où z est un point intérieur au cercle envisagé, $U(\psi)$ est la valeur que la partie réelle $U(x, y)$ acquiert en un point générique $Z = e^{i\psi}$ du contour et V_0 est la valeur que la partie imaginaire $V(x, y)$ acquiert à l'origine.

Mais comme on déduit cette formule de celle de Cauchy, elle aussi aura un sens « seulement dans le cas où la fonction $f(Z) = U + iV$ existe ».

D'ailleurs cette formule est bien équivalente à la formule de Cauchy.

---

[1] *Voir* HADAMARD, *Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique*, t. II, § 182, p. 184, Rem. II.

Ayant en effet

$$(1) \qquad f(z) = iV_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{Z+z}{Z-z}\,d\psi$$

on aura aussi

$$if(z) = iU_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\psi)\frac{Z+z}{Z-z}\,d\psi, \qquad U_0 = U(0, 0),$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad f(z) = U_0 + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\psi)\frac{Z+z}{Z-z}\,d\psi.$$

En additionnant les deux relations (1) et (2) on obtient alors

$$(3) \quad f(z) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{Z+z}{Z-z}\,d\psi, \qquad f(\psi) = U(\psi) + iV(\psi),$$

ce qui va nous donner, comme il est d'ailleurs bien connu,

$$(4) \qquad f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi,$$

d'où en substituant dans la relation (3)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{Z+z}{Z-z}\,d\psi \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\left\{1 + \frac{Z+z}{Z-z}\right\}d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{Z\,d\psi}{Z-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(Z)}{Z-z}\,dZ \end{aligned}$$

qui est bien la formule de Cauchy.

Réciproquement de cette formule on pourrait déduire la relation (1), [*voir* pour cela GOURSAT, *Cours d'Analyse*, 3e édition, t. II, et aussi S. MINETTI, *La geometria degli olospazii e i suoi legami colle equazioni differenziali ordinarie* (*Atti Reale Accad. d'Italia*, vol. IV, 1933, n° 17, p. 483-583)].

Cela posé nous allons tout d'abord présenter une nouvelle forme de la condition nécessaire et suffisante pour que, $U(\psi)$ et $V(\psi)$ étant deux fonctions continues et périodiques données dans l'intervalle $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$, l'expression $U(\psi) + iV(\psi)$ représente les valeurs qu'une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle unité C et continue dans le domaine fermé acquiert sur le contour (C) du domaine envisagé.

Mais ce n'est pas cela qui nous intéresse principalement; nous établirons ce résultat, si l'on peut dire, en passant; ce qui nous intéresse surtout c'est d'établir une formule qui va nous donner les valeurs de la partie imaginaire d'une fonction holomorphe dans C et continue dans $C+(C)$ en fonction de la valeur que cette partie acquiert à l'origine et des valeurs que la partie réelle de la même fonction acquiert au contour (C).

On rencontrera bien cette formule, qui joue ici un rôle tout à fait fondamental, dans la démonstration de la condition nécessaire et suffisante dont nous avons parlé tout à l'heure.

2. Je démontrerai précisément le théorème suivant :

Théorème. — *Pour que étant données deux fonctions* $U(\psi)$ *et* $V(\psi)$ *continues et périodiques pour* $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$ *l'expression* $U(\psi)+iV(\psi)$ *représente les valeurs qu'une fonction holomorphe dans le cercle unité* C *et continue dans ce domaine fermé acquiert sur le contour* (C) *du domaine envisagé, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(\alpha) \qquad \int_0^{2\pi}\left\{U(\psi)\frac{2d}{r^2} + V(\psi)\frac{1-\rho^2}{r^2}\right\}d\psi = \text{const.},$$

où $Z = e^{i\psi}$ *est le point générique du contour* (C), $\rho^2 = x^2+y^2$ *est le carré de la distance de l'origine au point générique* $z = \rho e^{i\varphi}$ *de l'intérieur de* C; $|d| = |\rho\sin(\psi-\varphi)|$ *est la distance du point* z *au rayon qui va de l'origine au point* Z *du contour, et, enfin,* $r^2 = (\cos\psi - x)^2 + (\sin\psi - y)^2$ *est le carré de la distance du point* Z *au point* z.

Remarque. — Il faut tout d'abord remarquer que ce même problème, dans le cas où l'on suppose de plus que les fonctions $U(\psi)$ et $V(\psi)$ soient aussi dérivables pour $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$, a déjà été résolu. Dans ce cas en effet, de la formule bien connue [1],

$$\int_{(C)}\left\{U\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - \log\frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\right\}ds = 2\pi u_A,$$

---

(1) Pour la signification des symboles adoptés dans cette Remarque, *voir* P. Lévy, *Cours d'Analyse*, t. II.

en posant

$$U = f(z) = P + iQ$$

et en remarquant qu'on a

$$\frac{dU}{dn} = \frac{df(z)}{dn} = i\frac{df(z)}{ds}$$

on parvient à la formule de Cauchy. Par conséquent, si a est un point quelconque extérieur au domaine C, on pourra écrire

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{(C)} \left\{ U\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - \log\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} \right\} ds$$

et alors à cause de certaines propriétés du potentiel de simple couche et du potentiel de double couche on conclut que la condition nécessaire et suffisante que l'on a en vue d'établir est la suivante :

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0,$$

pour tout point a extérieur au domaine C.

Supposons en effet que

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

soit une fonction holomorphe à l'intérieur de C et continue dans $C + (C)$; comme $U(x, y)$ est, à l'intérieur de C, une fonction harmonique, on aura en appelant $U(\psi)$ les valeurs qu'elle acquiert au contour de C

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\,\frac{1-\rho^2}{r^2}\,d\psi.$$

D'autre part, on a aussi

$$(5) \qquad f(z) = iV_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\,\frac{Z+z}{Z-z}\,d\psi, \qquad V_0 = V(0, 0).$$

En posant alors $Z = e^{i\psi}$, $z = \rho e^{i\varphi}$, $(\rho < 1)$ et en observant qu'on a successivement

$$(6) \qquad \frac{Z+z}{Z-z} = \frac{e^{i\psi} + \rho e^{i\varphi}}{e^{i\psi} - \rho e^{i\varphi}} = \frac{1 + \rho e^{i(\varphi-\psi)}}{1 - \rho e^{i(\varphi-\psi)}} = \frac{1-\rho^2}{r^2} - i\,\frac{2d}{r^2},$$

où

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = |z|^2, \qquad r^2 = (\cos\psi - x)^2 + (\sin\psi - y)^2, \qquad z = x + iy,$$
$$d = \rho \sin(\psi - \varphi),$$

on obtient

$$(7) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{1-\rho^2}{r^2}d\psi + i\left\{V_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{2d}{r^2}d\psi\right\},$$

relation qui nous donne

$$(8) \qquad V(x,y) = V_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{2d}{r^2}d\psi.$$

Mais on a aussi

$$(9) \qquad V(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\psi)\frac{1-\rho^2}{r^2}d\psi$$

et l'on obtient en conséquence

$$(10) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{U(\psi)\frac{2d}{r^2} + V(\psi)\frac{1-\rho^2}{r^2}\right\}d\psi = V_0 = \text{const.}$$

Si donc une fonction holomorphe à l'intérieur de C et continue dans C + (C) acquiert sur le contour (C) de C les valeurs (continues) $U(\psi) + iV(\psi)$, alors ces deux fonctions (continues) $U(\psi)$ et $V(\psi)$ satisfont bien à la condition (α) énoncée dans notre théorème.

Réciproquement, supposons que $U(\psi)$ et $V(\psi)$ soient deux fonctions continues pour $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$ qui vérifient en outre la condition (10) et considérons la fonction

$$(11) \qquad V(x,y) = V_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{2d}{r^2}d\psi.$$

En conséquence de la relation (10), qu'on suppose vérifiée par hypothèse, cette fonction est bien une fonction harmonique à l'intérieur de C, elle est même « la » fonction harmonique dans C qui acquiert au contour (C) les valeurs $V(\psi)$.

D'autre part en vertu de la relation déjà démontrée, à savoir :

$$(12) \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{1-\rho^2}{r^2}d\psi - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{2d}{r^2}d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{Z+z}{Z-z}d\psi,$$

on aura

$$(13)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{1-\rho^2}{r^2}\,d\psi + i\left\{V_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{2d}{r^2}\,d\psi\right\} = iV_0 + \int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{Z+z}{Z-z}\,d\psi,$$

tout au moins pour tous les points intérieurs au domaine C.

Mais le deuxième membre de la relation (13) est bien une fonction holomorphe de z à l'intérieur de C : il en sera de même du premier membre, mais ce premier membre tend vers la valeur $U(\psi)+iV(\psi)$ pour $z\to e^{i\psi}$, c'est-à-dire pour z tendant à un point $Z=e^{i\psi}$ du contour (C) de C, car la relation (α), ou bien (10), nous donne bien

$$(14)\qquad V_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{2d}{r^2}\,d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\psi)\frac{1-\rho^2}{r^2}\,d\psi.$$

Le deuxième membre de la même relation (13), à savoir l'expression

$$iV_0 + \int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{Z+z}{Z-z}\,d\psi,$$

tendra donc aussi vers la même limite.

Sous les hypothèses où nous nous sommes placés il existe donc bien une fonction holomorphe à l'intérieur de C et qui acquiert sur le contour (C) de C les valeurs données $U(\psi)+iV(\psi)$: c'est la fonction

$$(15)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{1-\rho^2}{r^2}\,d\psi + i\left\{V_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{2d}{r^2}\,d\psi\right\}.$$

La condition (α) énoncée dans le théorème est donc aussi suffisante.

3. De ce que l'on a dit on conclut que l'étude des fonctions holomorphes à l'intérieur d'un domaine et continues dans le domaine fermé, le cercle unité par exemple, revient à l'étude des couples des fonctions $U(\psi)$, $V(\psi)$ d'une seule variable réelle, continues et périodiques pour $0\leqq\psi\leqq 2\pi$, qui satisfont à la condition

$$(\alpha)\qquad \int_0^{2\pi}\left\{U(\psi)\frac{2d}{r^2} + V(\psi)\frac{1-\rho^2}{r^2}\right\}d\psi = \text{const.}$$

Cette condition va jouer, par rapport aux couples de fonctions continues d'une variable réelle, le même rôle que jouent les conditions de monogénéité de Cauchy par rapport aux couples de fonctions $U(x,y)$ et $V(x,y)$ de deux variables indépendantes continues en même temps que leurs dérivées partielles à l'intérieur d'un domaine.

Et comme chaque couple $U(\psi)$ et $V(\psi)$ de fonctions du type indiqué satisfaisant à la condition (α) donne naissance à une fonction bien déterminée, holomorphe à l'intérieur de C et continue dans le domaine fermé $C+(C)$, j'appellerai un tel couple de fonctions « couple de fonctions holomorphogènes ». La condition (α) sera appelée « condition d'holomorphogénéité ».

4. Remarque. — La relation (8) résout par une formule très simple et maniable le problème de connaître les valeurs que la partie imaginaire d'une fonction régulière dans le domaine fermé $C+(C)$ (cercle unité), acquiert dans ce domaine en fonction des valeurs que la partie réelle de la même fonction acquiert au contour du domaine et de la valeur que cette partie imaginaire elle-même acquiert à l'origine.

C'est la relation dont nous avons déjà parlé et qui nous intéressait surtout d'établir. On peut de même dire qu'elle permet de connaître, à une constante près, les valeurs que la partie imaginaire d'une fonction régulière acquiert dans le domaine en fonction des valeurs que la partie réelle de la même fonction acquiert au contour du domaine.

5. De la relation (α) énoncée page 160 on déduit aussi qu'une fois données les valeurs $V(\psi)$ que la partie imaginaire d'une fonction régulière dans le domaine $C+(C)$ acquiert au contour (C) du domaine, les valeurs $U(\psi)$, que la partie réelle de la fonction acquiert sur ce même contour satisfont à l'équation intégrale de première espèce

$$\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{2d}{r^2}\,d\psi = f(\rho,\varphi), \tag{16}$$

ou

$$\int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{2\rho\sin(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}\,d\psi = f(\rho,\varphi), \tag{17}$$

où

$$(18)\qquad f(\rho, \varphi) = 2\pi\left\{V_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\psi)\frac{1-\rho^2}{r^2}\,d\psi\right\} = 2\pi\{V_0 - V(\rho, \varphi)\}$$

est une fonction connue.

Il serait bien intéressant de connaître les conditions sous lesquelles cette équation intégrale est résoluble. On peut presque sûrement s'attendre que cela n'arrive pas, si l'on choisit tout à fait arbitrairement la fonction $V(\psi)$; elle devra être assez vraisemblablement assujettie à certaines conditions qualitatives qui peut-être devront se rapporter à des coefficients de Fourier.

Ici en effet, pour chaque valeur bien déterminée de $\rho < 1$, on a affaire avec une équation intégrale de première espèce bien déterminée dans laquelle, toutefois, ce que l'on appelle le terme connu, à savoir la fonction $f(\rho, \varphi)$, est toujours la série de valeurs qu'une fonction harmonique dans le cercle unité acquiert le long d'un cercle intérieur à ce domaine et concentrique à sa frontière.

Il s'agit donc d'un système d'une infinité continue d'équations intégrales de première espèce qui doivent avoir une solution commune.

Pour chaque équation de ce système

$$(19)\qquad \int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{2\rho\sin(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}\,d\psi = f(\rho, \varphi), \qquad \rho = \text{const.},$$

on a affaire à un noyau

$$(20)\qquad K(\varphi, \psi) = \frac{\sin(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}$$

qui est borné, mais qui n'est pas symétrique car

$$K(\varphi, \psi) = -K(\psi, \varphi).$$

Mais si l'on se donne au contraire les valeurs $U(\psi)$, alors on obtient, au lieu de l'équation (19), l'autre équation

$$(21)\qquad \int_0^{2\pi} V(\psi)\frac{1-\rho^2}{r^2}\,d\psi = f(\rho, \varphi) \qquad \rho = \text{const.},$$

où cette fois on a

$$f(\rho, \varphi) = 2\pi\left\{V_0 - \int_0^{2\pi} U(\psi)\frac{2d}{r^2}\,d\psi\right\}$$

et où l'on a affaire à un noyau

$$K(\varphi, \psi) = \frac{1}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} \tag{22}$$

qui est borné et symétrique. Pour ce dernier noyau donc les deux systèmes de fonctions orthogonales fondamentales de M. Schmidt sont identiques et ils seront complets si le noyau (18) est fermé.

Ce serait comme l'on voit une question très intéressante à résoudre mais, occupés à présent par d'autres recherches tout à fait différentes nous ne pouvons que la signaler.

CHAPITRE II.

1. Dans ce deuxième chapitre nous nous occuperons d'établir les inégalités dont on a parlé dans l'Introduction. Reprenons à cet effet la relation (8) que nous écrirons maintenant sous la forme suivante :

$$V(\rho, \varphi) = V_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\, \frac{2\rho\sin(\psi - \varphi)}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)}\, d\psi \tag{23}$$

et appelons A la borne supérieure des valeurs que la fonction $U(\psi)$ acquiert sur le contour (C). On aura alors la double inégalité

$$\begin{aligned} &|V_0| - \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} U(\psi)\, \frac{2\rho\sin(\psi - \varphi)}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)}\, d\psi\right| \\ &\leqq |V(\rho, \varphi)| \leqq |V_0| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} U(\psi)\, \frac{2\rho\sin(\psi - \varphi)}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)}\, d\psi\right|, \end{aligned}$$

ou encore, en supposant $\rho = \text{const.}$,

$$\begin{aligned} &|V_0| - \frac{A\rho}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(\psi - \varphi)|}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)}\, d\psi \\ &\leqq |V(\rho, \varphi)| \leqq |V_0| + \frac{A\rho}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(\psi - \varphi)|}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)}\, d\psi, \end{aligned} \tag{24}$$

car l'expression $1+\rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)$ est toujours positive.

Pour obtenir les inégalités cherchées il suffira donc de calculer la valeur de l'intégrale

$$(25)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(\psi-\varphi)|}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}\,d\psi.$$

Supposons pour cela $\varphi = \text{const.}$ et posons $\psi - \varphi = \theta$, d'où $d\psi = d\theta$; en outre au lieu de faire décrire à la variable ψ les valeurs de 0 à 2π on peut faire varier ψ de la valeur φ à la valeur $\varphi + \pi$, et puis de la valeur $\varphi + \pi$ à la valeur $\varphi + 2\pi$. La variable θ décrira alors successivement les deux intervalles $0 \vdash\!\dashv \pi$ et $\pi \vdash\!\dashv 2\pi$. On s'aperçoit alors aisément qu'on peut écrire

$$(26)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(\psi-\varphi)|}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}\,d\psi = \int_0^{2\pi} \frac{|\sin\theta|}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{(1+\rho^2)-2\rho\cos\theta}\,d\theta + \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{(1+\rho^2)+2\rho\cos\theta}\,d\theta.$$

Tout revient donc à déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{a+b\cos\theta}\,d\theta,$$

où l'on aura une première fois $b = -2\rho$, une deuxième fois $b = 2\rho$, et toujours $a = 1 + \rho^2$.

On a immédiatement

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{a+b\cos\theta}\,d\theta = -\frac{1}{b}\left\{\log(a+b\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\right\} = \frac{1}{\rho}\log\frac{1+\rho}{1-\rho} \quad \text{si} \quad b = -2\rho$$

et

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{a+b\cos\theta}\,d\theta = -\frac{1}{\rho}\log\frac{1-\rho}{1+\rho} \quad \text{si} \quad b = 2\rho,$$

et l'on obtient ainsi la relation

$$\frac{A\rho}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\psi-\varphi)}{(1+\rho^2)-2\rho\cos(\psi-\varphi)}\,d\psi = \frac{A\rho}{\pi}\left\{\frac{1}{\rho}\log\frac{1+\rho}{1-\rho} - \frac{1}{\rho}\log\frac{1-\rho}{1+\rho}\right\}$$
$$= \frac{2A}{\pi}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

On en conclut, par conséquent, la double inégalité

$$(26') \qquad |V_0| - \frac{2A}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho} \leqq |V(\rho, \varphi)| \leqq |V_0| + \frac{2A}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Si en outre l'on suppose que la fonction régulière que l'on a envisagée soit nulle à l'origine, ce qui donne, en particulier, $V_0 = 0$, l'inégalité à droite nous donne

$$(27) \qquad |V(\rho,\varphi)| \leqq \frac{2A}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho},$$

et l'on retrouve comme cas particulier de la relation ici établie une inégalité qui est déjà bien connue et qui a joué un rôle très important dans plusieurs recherches modernes de la théorie des fonctions.

Mais l'on obtient aussi l'inégalité à gauche qui, à ce qu'il semble, est tout à fait nouvelle, et qui va nous donner, comme nous allons voir, des propositions tout à fait remarquables.

2. Remarquons à cet effet que l'inégalité à gauche, à savoir

$$(28) \qquad |V(\rho, \varphi)| \geqq |V_0| - \frac{2A}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

aura un sens non trivial si

$$|V_0| - \frac{2A}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho} > 0,$$

c'est-à-dire si

$$(29) \qquad \rho < \frac{e^{\frac{\pi |V_0|}{2A}} - 1}{e^{\frac{\pi |V_0|}{2A}} + 1},$$

expression qui garde toujours une valeur positive.

Remarquons encore qu'à côté de l'inégalité (26') on doit aussi considérer l'autre inégalité

$$(30) \qquad |U_0| - \frac{2B}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho} \leqq |U(\rho, \varphi)| \leqq |U_0| + \frac{2B}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho},$$

B étant la borne supérieure de $|V|$, qui s'obtient par le même procédé mais en considérant au lieu de la fonction donnée $f(z)$ l'autre fonction

$$\varphi(z) = if(z) = -V + iU,$$

inégalité qui garde un sens non trivial même à gauche, si

$$\rho < \frac{e^{\frac{\pi |U_0|}{2B}} - 1}{e^{\frac{\pi |U_0|}{2B}} + 1}. \tag{31}$$

Il est en effet bien évident que même dans l'hypothèse $f(0) \neq 0$ l'inégalité à gauche de la relation (26) serait triviale si l'on avait $V_0 = 0$; dans ce cas on devrait s'attacher aux inégalités (30). Si, enfin, on a en même temps $U_0 \neq 0$, $V_0 \neq 0$ on pourra se servir indifféremment de l'une ou l'autre des inégalités

$$\left\{\begin{aligned} |U(\rho,\varphi)| &\geqq |U_0| - \frac{2B}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho}, \\ |V(\rho,\varphi)| &\geqq |V_0| - \frac{2A}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho} \end{aligned}\right. \tag{32}$$

qui seront à partir de ce moment tout à fait fondamentales.

3. Remarque. — On pourrait penser qu'on pourrait obtenir les inégalités (32) directement de l'inégalité déjà connue (inégalité de Carathéodory)

$$|V(\rho,\varphi)| \leqq \frac{2A}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho} \tag{27}$$

qui se rapporte à une fonction nulle à l'origine, et cela en considérant à côté de la fonction donnée

$$f(z) = U + iV,$$

l'autre fonction

$$F(z) = f(z) - (U_0 + iV_0)$$

qui s'annule bien pour $z = 0$, et en se servant, ensuite, d'inégalités tout à fait élémentaires. Mais il faut observer à ce propos qu'en suivant cette voie on parviendrait, il est vrai, à des inégalités du type des inégalités (32) où, toutefois, on aurait en général pour les valeurs des constantes A, B des valeurs différentes de celles qu'on y aurait suivant le procédé qu'on a ici esquissé.

Ceci, qui dans certains cas peut être avantageux, peut être, au contraire, désavantageux dans d'autres cas.

Je préfère en tout cas de suivre mon procédé sans négliger toutefois ce que je viens de faire remarquer même afin de pouvoir l'exploiter dans les cas où cela est utile; mon procédé, qui conduit à un résultat qui n'est donc pas équivalent à ce que l'on pourrait tirer de l'inégalité (27), a en effet aussi l'avantage de montrer comment les inégalités (32) vont découler directement de la formule fondamentale de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(Z)}{Z-z}\,dZ,$$

car la relation

$$f(z) = iV_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\psi)\,\frac{Z+z}{Z-z}\,d\psi,$$

ou l'autre, équivalente, qu'on obtiendrait en considérant au lieu de la fonction $f(z)$ l'autre fonction $\varphi(z) = if(z)$, et qui est mon point de départ, découle elle-même directement de la formule rappelée tout à l'heure.

Il peut donc bien se passer de toute considération sur la représentation conforme et sur le lemme de Schwarz.

CHAPITRE III.

1. Passons maintenant à donner quelques théorèmes. Voici le premier :

Théorème I. — *Si* $f(z) = U + iV$ *est holomorphe à l'intérieur d'un domaine qu'on pourra toujours supposer être le cercle unité* C; *si pour* $|z| < 1$ *on a* $|U| < A$, $|V| < B$ *alors, si* $U_0 \neq 0$, *elle ne peut pas s'annuler à l'intérieur d'un cercle* $C_{\rho,B}$ *de centre origine et de rayon*

$$\rho < \frac{e^{\frac{\pi|U_0|}{2B}} - 1}{e^{\frac{\pi|U_0|}{2B}} + 1} \tag{33}$$

et plus généralement elle ne peut prendre dans ce cercle aucune valeur imaginaire pure; si au contraire $V_0 \neq 0$ *elle ne peut pas s'annuler à* *l'intérieur d'un cercle* $C_{\rho,A}$ *de rayon*

$$(34)\qquad \rho < \frac{e^{\frac{\pi|V_0|}{2A}} - 1}{e^{\frac{\pi|V_0|}{2A}} + 1}$$

et plus généralement elle ne peut prendre dans ce cercle aucune valeur réelle.

Dans les hypothèses où nous nous sommes placés, et de ce que l'on a dit aux paragraphes précédents, il résulte en effet qu'à l'intérieur des cercles envisagés, on aura

$$|U(\rho, \varphi)| \geqq |U_0| - \frac{2B}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho} > 0$$

ou bien

$$|V(\rho, \varphi)| \geqq |V_0| - \frac{2A}{\pi} \log \frac{1+\rho}{1-\rho} > 0.$$

THÉORÈME II. — *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, et si* $\alpha + i\beta$ *est tel que*

$$(35)\qquad \text{borne sup.}\,|U - \alpha| \text{ pour } |z| < 1 \leqq \text{borne sup.}\,|U| \text{ pour } |z| < 1$$

et

$$(36)\qquad |V_0 - \beta| \geqq |V_0|;$$

la fonction $f(z)$ *à l'intérieur des cercles* $C_{\rho,B}$ *ou* $C_{\rho,A}$ *ne pourra jamais prendre aucune des valeurs* $\alpha + i\beta$.

Il suffit en effet de considérer la fonction auxiliaire

$$\varphi(z) = f(z) - (\alpha + i\beta).$$

En effet cette fonction, en vertu des hypothèses que l'on a faites suivant la valeur qu'elle a à l'origine, ne peut jamais prendre la valeur zéro à l'intérieur du cercle $C_{\rho,B}$, ou $C_{\rho,A}$, ou à l'intérieur de tous les deux pour le précédent théorème. A l'intérieur de ces deux cercles on ne peut donc jamais avoir $f(z) = \alpha + i\beta$.

Comme on voit ce théorème permet d'affirmer qu'à l'intérieur des cercles $C_{\rho,B}$ *ou* $C_{\rho,A}$ *ou à l'intérieur de tous les deux suivant les cas, la* *fonction $f(z)$ non seulement ne peut prendre la valeur zéro mais encore ne peut prendre d'une manière générale aucune des valeurs $\alpha + i\beta$ correspondant à tous les points d'une partie infinie du plan complexe.*

2. Cela posé supposons maintenant que l'on considère un point quelconque $z = a$ intérieur au domaine C. En posant $\xi = z - a$ la fonction $f(z)$ devient une fonction de ξ que nous désignerons toujours par le symbole $f(\xi)$; en outre la valeur de $f(\xi)$ à l'origine sera la valeur de $f(z)$ au point a et comme dans un cercle $C_{a,R}$ de rayon R, centré au point a, et complètement intérieur au cercle unité on a toujours

$$f(z) = i V_a + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\psi) \frac{Z+z}{Z-z} d\psi,$$

où maintenant V_a est la valeur que la partie imaginaire V de la fonction donnée $f(z)$ acquiert au point a et $U(\psi)$ sont les valeurs que la partie réelle de la même fonction acquiert au contour du cercle $C_{a,R}$, on pourra répéter les raisonnements déjà faits au paragraphe **2**.

On obtient ainsi

$$|V_a| - \frac{2A}{\pi} \log \frac{R+\rho}{R-\rho} \leqq |V(\rho, \varphi)| \leqq |V_a| + \frac{2A}{\pi} \log \frac{R+\rho}{R-\rho}$$

où évidemment on peut prendre pour la constante A la même valeur qu'auparavant.

L'inégalité à gauche, à savoir

$$(37) \qquad |V(\rho, \varphi)| \geqq |V_a| - \frac{2A}{\pi} \log \frac{R+\rho}{R-\rho},$$

aura un sens non trivial si

$$|V_a| - \frac{2A}{\pi} \log \frac{R+\rho}{R-\rho} > 0,$$

c'est-à-dire si

$$(38) \qquad \rho < R \frac{e^{\frac{\pi |V_a|}{2A}} - 1}{e^{\frac{\pi |V_a|}{2A}} + 1}.$$

Tout cela, évidemment, si $V_a \neq 0$; si, au contraire, en supposant, toujours comme on le doit pour le but envisagé, $f(z)$ différent de zéro pour $z = a$ on a $V_a = 0$ mais $U_a \neq 0$, on parviendra de la même façon à l'autre inégalité

$$(39)\qquad |U(\rho, \varphi)| \geqq |U_a| - \frac{2B}{\pi} \log \frac{R+\rho}{R-\rho}$$

qui aura un sens non trivial si

$$(40)\qquad \rho < R \frac{e^{\frac{\pi|U_a|}{2B}} - 1}{e^{\frac{\pi|U_a|}{2B}} + 1}.$$

On voit bien d'après cela comment autour de chaque point où la fonction $f(z)$ ne s'annule pas on peut trouver en suivant la méthode indiquée, un domaine circulaire bien déterminé dans lequel l'équation $f(z) = 0$ ne peut avoir aucune racine.

3. Des deux théorèmes établis plus haut on peut faire découler beaucoup de conséquences. Remarquons tout d'abord le critérium suivant qui permet de reconnaître très aisément si une certaine valeur $\alpha + i\beta$ est ou non valeur exceptionnelle pour une famille de fonctions analytiques donnée.

Soit $\mathfrak{I}$ une famille de fonctions $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ holomorphes dans le cercle unité C, *et soient* A, B *les bornes supérieures de* $|U|$ *et* $|V|$ *pour* $|z| < 1$, A *et* B *étant finis pour chaque fonction f de la famille envisagée.*

Toutes les fois qu'on veut s'assurer si cette famille admet une valeur $\alpha + i\beta$ comme valeur exceptionnelle dans le voisinage, par exemple, de l'origine O, *il suffira de constater s'il existe ou non un nombre $m > 0$ tel que, quelle que soit la fonction f de $\mathfrak{I}$ on ait $|U(0, 0) - \alpha| > mB$ ou bien $|V(0, 0) - \beta| > mA$. Si en effet ce nombre m existe, la valeur $\alpha + i\beta$ et, plus généralement, toutes les valeurs $\alpha + i\lambda$, ou bien $\mu + i\beta$, quelles que soient les valeurs λ et μ, sont bien exceptionnelles dans ce voisinage.*

Il est aisé de le démontrer. Si en effet la condition

$$|U(0, 0) - \alpha| > mB$$

est satisfaite, aucune des fonctions

$$\varphi(z) = f(z) - \alpha = \{U(x, y) - \alpha\} + iV(x, y)$$

ne pourra s'annuler à l'origine; et, en outre, en vertu du premier théorème énoncé au premier paragraphe de ce chapitre, à l'intérieur du cercle $C_{\rho,m}$ de centre à l'origine et rayon

$$\rho < \frac{e^{\frac{\pi m}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi m}{2}} + 1} \tag{41}$$

aucune des fonctions $\varphi(z)$ ne pourra jamais s'annuler.

Il s'ensuit qu'à l'intérieur de ce cercle aucune des fonctions $f(z)$ de la famille de fonctions $\mathfrak{F}$ qu'on a envisagée ne pourra jamais acquérir les valeurs $\alpha + i\lambda$ quelle que soit la valeur de λ. Il en est de même si l'on considère l'autre condition $|V(0, 0) - \beta| > mA$ et le théorème est démontré,

4. Voici maintenant un nouveau critérium de normalité.

Soit toujours $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ holomorphes dans le cercle unité C *et soient* A *et* B *les bornes supérieures de* $|U|$ *et* $|V|$ *pour* $|z| < 1$, A *et* B *étant finis pour chaque fonction* f *de la famille envisagée.*

Supposons maintenant qu'à chaque point $P(x_0, y_0)$ *de* C *correspondent un nombre réel* $a(x_0, y_0)$ *et un autre nombre* $m(x_0, y_0) > 0$ *tels que quelle que soit la fonction* f *de* $\mathfrak{F}$, *l'une des inégalités suivantes soit satisfaite*

$$|U(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)| > m(x_0, y_0)B \tag{42}$$

ou bien

$$|V(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)| > m(x_0, y_0)A. \tag{43}$$

Dans ces conditions, que nous appellerons conditions M, *la famille* $\mathfrak{F}$ *est normale dans* C.

Supposons en effet que, par exemple, la condition (42) soit remplie. En vertu alors du précédent critérium d'exceptionnalité et de ce que l'on a dit au n° **2** du Chapitre III les fonctions $\varphi(z) = f(z) - a$

ne pourront jamais s'annuler à l'intérieur du cerle $C_{\rho,m}$ de centre au point $P(x_0, y_0)$ et de rayon

$$\rho < R \frac{e^{\frac{\pi m}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi m}{2}} + 1}.$$

Il s'ensuit que les fonctions $f(z)$ de la famille $\mathcal{F}$ admettent bien dans ce cercle toutes les valeurs exceptionnelles finies telles que $\alpha + i\lambda$ quel que soit λ. La famille $\mathcal{F}$ est donc une famille normale au point $P(x_0, y_0)$ et comme ce point $P(x_0, y_0)$ est un point quelconque de C le théorème est démontré.

Même procédé si l'on suppose vérifiée l'autre condition (43).

On voit bien qu'il s'agit ici d'un critérium de normalité tout à fait nouveau et qu'on pourrait appeler *des valeurs exceptionnelles au point de vue local* en remarquant qu'à ce point de vue ces valeurs peuvent être exceptionnelles pour l'une seulement des parties réelle ou imaginaire des fonctions de la famille.

5. On peut de même donner à ce critérium une autre forme un peu moins générale, mais peut-être plus compréhensive. La voici :

Si l'on suppose (un peu moins généralement) que la borne supérieure M_f de $|f(z)|$ *dans* C *est finie pour chaque fonction f de $\mathcal{F}$, aux inégalités* (42) *et* (43) *on peut substituer dans l'énoncé précédent l'inégalité suivante :*

$$(44)\quad |U(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)| + |V(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)| > m(x_0, y_0) M_f.$$

Ces conditions étant remplies il est clair en effet que l'une au moins des deux expressions $|U(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)|$ et $|V(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)|$ sera plus grande que $\frac{1}{2} m(x_0, y_0) M_f$, donc aussi plus grande que $\frac{1}{2} m(x_0, y_0) A$ et que $\frac{1}{2} m(x_0, y_0) B$. On retombe donc en tout cas sur une des inégalités précédemment considérées et la proposition est tout pareillement établie.

6. Définition. — Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes à l'intérieur de C et qui satisfait au critérium de normalité que nous avons donné tout à l'heure sera dite *famille normale* M [1].

7. Remarque importante. — Dans toutes les inégalités précédentes les bornes supérieures A, B, M_f au lieu de se rapporter au cercle unité peuvent aussi se rapporter plus simplement à un cercle intérieur ou cercle unité et d'ailleurs quelconque entourant le point P. C'est tout à fait évident.

CHAPITRE IV.

1. Passons maintenant à appliquer notre critérium de normalité soit au problème de l'allure d'une fonction analytique au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, soit aux suites normales de fonctions analytiques.

Rappelons à ce propos qu'en suivant une méthode bien connue de M. Montel on peut réduire l'étude d'une fonction analytique dans le voisinage d'un point essentiel isolé à celui d'une famille de fonctions analytiques considérées dans un même domaine D, et rappelons aussi que chaque critère conduisant à affirmer qu'une famille de fonctions est normale conduit à un nouveau théorème du type de celui de M. Picard.

Cela rappelé, soit γ une couronne limitée par deux cercles quelconques C_1 et C_2 de centre à l'origine.

Soit en outre $f(z) = U + iV$ une fonction holomorphe dans le voisinage de l'origine y comprise la couronne γ, et ayant à l'origine O un point singulier essentiel isolé. Envisageons la suite de couronnes $\gamma_1 = \gamma\sigma^{-1}$, $\gamma_2 = \gamma\sigma^{-2}$, ..., $\gamma_n = \gamma\sigma^{-n}$, ... Nous entendons par là, suivant un usage courant, que les affixes des points de la couronne γ_n sont ceux que l'on déduit des affixes des points de la couronne γ en les multipliant par σ^{-n}, où σ est par exemple un nombre réel plus grand que 1; par exemple $\sigma = 2$.

Si l'on pose alors $f_n(z) = f(\sigma^{-n}z)$ il revient au même de consi-

---

[1] Je l'appelle ainsi car il se rapporte aux valeurs « *maxima* » des parties réelle et imaginaire des fonctions.

dérer $f(z)$ dans γ_n ou $f_n(z)$ dans γ. On a ainsi ramené, suivant un procédé bien connu, l'étude de $f(z)$ au voisinage du point O à celle de la famille des fonctions $f_n(z)$ dans la couronne γ. On sait d'ailleurs que la famille $\{f_n(z)\}$ ne peut pas être normale dans γ et dans ce domaine il y aura donc au moins un point z_0 où la famille n'est pas normale. Soit alors D_0 un cercle arbitrairement petit ayant ce point pour centre.

La famille $\{f_n(z)\}$ n'étant pas normale dans ce cercle, les fonctions $f_n(z)$ ne peuvent pas remplir, au point $z_0 = x_0 + iy_0$, les conditions que nous avons appelées conditions M, et l'on peut par conséquent énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si les points $z_0^{(n)} = x_0^{(n)} + iy_0^{(n)}$ sont les centres d'une suite de cercles $\omega_n = D_0\sigma^{-n}$ de Julia, qui se rapportent à une fonction $f(z) = U + iV$ qui a à l'origine un point singulier essentiel isolé; si $A_f^{(n)}$ et $B_f^{(n)}$ ont les bornes supérieures de $|U|$ et $|V|$ dans ω_n, pour chaque nombre $m > 0$ et pour chaque valeur réelle a, il existe au moins une suite d'indices n: $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ pour laquelle l'une des conditions suivantes*

$$|U(x_0^{(n_p)}, y_0^{(n_p)}) - a| > m B_f^{(n_p)},$$

ou bien

$$|V(x_0^{(n_p)}, y_0^{(n_p)}) - a| < m A_f^{(n_p)}.$$

ne peut pas être vérifiée.

Si en effet il n'en était pas ainsi, il y aurait un nombre réel a et un nombre $m > 0$ tels que pour tous les indices n on ait, par exemple,

$$|U(x_0^{(n)}, y_0^{(n)}) - a| > m B_f^{(n)}.$$

Mais dans ces conditions la famille $\{f_n(z)\}$, en vertu des théorèmes précédemment démontrés, serait normale dans D_0 ce qui est absurde.

Le théorème est démontré.

2. Considérons maintenant les suites convergentes de fonctions holomorphes à l'intérieur d'un domaine donné qu'on peut toujours supposer être le cercle unité.

Remarquons tout d'abord que dans beaucoup de questions d'Analyse il est tout à fait essentiel de reconnaître si un point de ce domaine est ou non, pour la suite, un point de convergence uniforme, autrement dit s'il existe un voisinage de ce point où la suite envisagée soit uniformément convergente.

A ce sujet nous allons donner ici une proposition qui donne des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi. Elle est d'application très maniable; à cause de cela elle me semble donc tout à fait remarquable et susceptible de devenir par la suite d'un usage courant.

Critérium de convergence uniforme locale d'une suite convergente de fonctions. — *Si une suite de fonctions holomorphes pour* $|z| < 1$ *est convergente à l'intérieur du cercle unité* C *et satisfait en un point* $P(x_0, y_0)$ *de ce domaine aux conditions* M, *ce point* $P(x_0, y_0)$ *est, pour la suite, point de convergence uniforme.*

Si en effet la suite donnée satisfait au point $P(x_0, y_0)$ aux conditions M, précédemment énoncées, elle est normale en ce point, et comme elle est, par hypothèse, convergente dans C, elle converge uniformément dans un voisinage du point $P(x_0, y_0)$. Le théorème est démontré.

Mais on peut aussi donner le rayon ρ d'un cercle centré au point $P(x_0, y_0)$ où il y a convergence uniforme. Pour la valeur ρ de ce cercle, en vertu de ce que l'on a dit au n° **2** du Chapitre III, on a en effet

$$\rho = R\,\frac{e^{\frac{\pi m}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi m}{2}} + 1}$$

où m est le nombre > 0 qui intervient dans les conditions M qu'on suppose vérifiées au point P, et R est le rayon d'un cercle centré au point P et complètement intérieur à C.