JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ED. HUSSON

L'aire couverte par une trajectoire dynamique; la presque-périodicité de la trajectoire

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 101-104.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_101_0>

L'aire couverte par une trajectoire dynamique ; la presque-périodicité de la trajectoire ;

PAR ED. HUSSON

(Nancy).

1. J'envisage les problèmes de la Mécanique classique, intégrables par quadratures ; je suppose que l'on représente les mouvements par des trajectoires d'un espace positionnel et je me propose d'étudier une trajectoire de type général restant dans un domaine fini.

Une trajectoire est cyclique ou multipériodique et l'on peut choisir pour l'exposition l'une ou l'autre classe de trajectoires ; une rotation de 2π est équivalente à une période, et les différences ne portent que sur la représentation sans influencer les faits physiques.

J'examinerai le cas de deux paramètres dans l'exemple cyclique des mouvements sur une surface de révolution, sous l'influence d'un champ de forces rencontrant l'axe de la surface, et dépendant d'une fonction des forces.

Une trajectoire de type général remplit uniformément l'aire annulaire de surface de révolution bornée par deux parallèles limites ; elle repasse une infinité de fois dans le voisinage de la position initiale et de tout point de l'aire couverte ; elle est douée de la propriété de quasi-périodicité, et les temps de retour sont les quasi-périodes.

Les démonstrations de cette propriété descriptive essentielle s'appuient sur un théorème ancien de Kronecker [1], ou sur le développement d'un nombre réel en fraction continue. Les compléments

[1] *Sitz. der Berliner Akadémie*, 1884.

apportés récemment au théorème de Kronecker pour l'étude des *fonctions presque-périodiques de Bohr* (1) permettraient d'apporter des précisions sur la répartition des quasi-périodes et de montrer que les trajectoires sont *presque-périodiques*.

On peut obtenir tous les résultats d'une façon directe, en partant d'une idée analogue à celle employée par Poincaré (2) dans l'étude générale de la stabilité à la Poisson en dynamique.

2. Une trajectoire sur une surface de révolution est définie en coordonnées cylindro-polaires : r périodique de période T entre deux bornes r_1 et r_2; θ précessionnel et avançant de la précession p pendant la période T.

Pour étudier le retour de l'arceau de trajectoire correspondant à une période T au voisinage d'une position initiale, il suffit d'étudier ce retour sur le parallèle de l'un de ses points M_0, en imprimant au point M_0 les précessions successives p, $2p$, ..., np, le nombre entier n satisfaisant à l'inégalité.

$$(1) \qquad |np - 2k\pi| < \varepsilon,$$

k étant un nombre entier dépendant de n, et ε étant imposé ou arbitrairement petit de limite supérieure imposée.

Une valeur approchée rationnelle $\frac{k}{n}$, sans qualité spéciale d'approximation, du rapport généralement incommensurable $\frac{p}{2\pi}$, est approchée à un écart de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$; la précession np donne simplement le retour à un écart inférieur à p et ne fournit pas une solution.

J'adjoins à la position initale M_0 un axe s_0 de parallèle de centre M_0, d'amplitude $2\varepsilon'$ très petite, et je suppose que la trajectoire emporte cet arc invariant. En imprimant au point M_0 et à l'arc s_0 les précessions successives p, $2p$, ..., mp, on obtient sur le parallèle M_0 les $(m+1)$ arcs $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_m$, autour des points $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_m$.

(1) J. Favard, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1933 (avec la bibliographie).

(2) Poincaré, *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 3, Paris, 1899.

Si l'on choisit m de façon que $(m+1)2\varepsilon' > 2\pi$, deux arcs au moins, s_α et s_β, $\beta - \alpha = n \leqq m$, empiéteront l'un sur l'autre; il en résulte que l'arc s_n empiète sur s_0.

En prenant $2\varepsilon' = \varepsilon$ la distance angulaire $M_n M_0$ est inférieure à ε et on voit que sous la condition $m+1 > \frac{2\pi}{\varepsilon}$ il existe au moins un nombre entier $n \leqq m$ vérifiant l'inégalité (1). On en déduit une infinité de solutions en faisant varier ε ou m.

Pour une valeur fixée de ε on peut imposer pour m la valeur minimum donnée par

$$n \leqq m \leqq \frac{2\pi}{\varepsilon} < m+1,$$

et écrire l'inégalité vérifiée (1) sous la forme

$$\left| \frac{p}{2\pi} - \frac{k}{n} \right| < \frac{1}{mn} \leqq \frac{1}{n^2}. \tag{2}$$

Sous la forme (2), on voit que pour tout nombre entier m il existe au moins une solution $n \leqq m$ des inégalités (1) ou (2) ou une quasi-période nT à l'approximation $\frac{2\pi}{m}$ et quand m augmente et croît indéfiniment on obtient une infinité de quasi-périodes dont les écarts $M_n M_0$ convergent vers zéro.

On retrouve le théorème primitif de Kronecker avec la variante équivalente de Lejeune-Dirichlet [1].

La forme (2) se prête au calcul des quasi-périodes, en notant que k est la partie entière par défaut ou excès du nombre $n\frac{p}{2\pi}$ et en donnant à n les valeurs successives de 1 à m.

3. Si nT est une quasi-période à l'approximation ε, les points de la trajectoire $M_0 M_n M_{2n} M_{3n} \ldots$, correspondant aux temps 0, nT, $2nT$, $3nT$, ... ou aux précessions 0, np, $2np$, $3np$, ..., forment sur le parallèle M_0 une ligne brisée régulière dont l'arc est inférieur à ε.

Les trajectoires repassent donc uniformément, et à l'approxima-

---

[1] J. A. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. 1, 6e édition, p. 25, Paris, 1910.

tion ε, dans le voisinage de tout point du parallèle M_0, *soit dans le sens par défaut, soit dans le sens par excès.*

On peut en particulier ranger les solutions de l'inégalité (1) ou de l'inégalité (2) en deux suites, l'une correspondant à un écart $M_0 M_n$ par défaut ou négatif, l'autre à un écart par excès ou positif; chacune des deux suites donne un écart qui converge vers zéro.

Nous désignerons dans la suite par $n_1 T$ une quasi-période de la suite par défaut et par $n_2 T$ une quasi-période par excès, ces deux quasi-périodes correspondant à l'approximation ε et étant *en principe les plus petites.*

4. Supposons, par exemple, que la quasi-période nT à l'approximation ε soit par défaut. Le point M_n est à une distance angulaire plus grande que ε de la borne supérieure de l'arc $2s_0 = 2\varepsilon$ entourant M_0.

Si nous imprimons au point M_n la précession $n_2 p$ correspondant à une quasi-période par excès à l'approximation ε, le point obtenu M_{n+n_2} est sur l'arc $2s_0$ et par suite $(n+n_2)T$ est une quasi-période à l'approximation ε.

Lorsque nT est par excès on obtient la quasi-période analogue $(n+n_1)T$.

Si l'on désigne par l le plus grand des deux intervalles $l_1 = n_1 T$ et $l_2 = n_2 T$, dans tout intervalle d'amplitude l il existe au moins une quasi-période ou *presque-période, et la trajectoire est presque-périodique au sens de Bohr.*

A partir d'un retour au voisinage de l'arceau de départ, on revient au voisinage au bout d'une période moyenne approchée l_2 ou l_1 suivant que le premier retour est par défaut ou par excès. Le rapprochement avec la périodicité est très accentué et cette périodicité moyenne approchée aurait pu être signalée dans le domaine physique.

On peut noter aussi que la convergence des retours, vers la position initiale ou vers tout point du domaine de la trajectoire, implique la dispersion de ces retours dans toute l'étendue de l'écart ε; cette dispersion continuelle est nettement marquée par la construction que l'on vient d'utiliser et elle engendre la presque-périodicité.