JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. DELSARTE

Sur un procédé formel de développement des fonctions en séries et sur quelques applications

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 97-102.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__97_0>

Sur un procédé formel de développement des fonctions en séries et sur quelques applications;

PAR J. DELSARTE.

J'ai déjà indiqué ailleurs [1] un procédé formel très général et très simple permettant d'obtenir à côté de presque tous les développements connus un grand nombre de développements nouveaux. Dans ce qui suit, je fixe définitivement les conventions et les hypothèses sous leur forme la plus générale et je donne quelques détails sur une classe importante de développements en séries de fonctions de Bessel.

I. CONVENTIONS ET HYPOTHÈSES. — *a.* x désigne un élément quelconque d'un espace X.

b. Classe A. — Classe linéaire de fonctions $f(x)$ définies dans tout ou partie de X.

c. Éléments fondamentaux. — Ce sont des fonctions $j_\lambda(x)$ définies dans tout ou partie de X et dépendant paramétriquement d'un élément λ d'un espace auxiliaire Λ.

d. Multiplicité $\mathfrak{M}$. — Les fonctions $j_\lambda(x)$ appartenant à A forment dans Λ une multiplicité $\mathfrak{M}$ topologiquement équivalente à une portion connexe du plan complexe.

[1] Voir : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 18 février 1935; *Communication à la Section Nancy-Strasbourg de la Société Mathématique de France*, 17 mai 1935.

e. Opérateur $\mathcal{O}$. — Opérateur linéaire défini dans A et admettant la propriété spectrale suivante, quel que soit λ de $\mathfrak{M}$:

$$\mathcal{O}[j_\lambda(x)] = \varphi(\lambda) j_\lambda(x); \tag{1}$$

f. Premier principe d'unicité. — Quel que soit λ de $\mathfrak{M}$, les seules fonctions de A vérifiant

$$\mathcal{O}[f(x)] = \varphi(\lambda) f(x)$$

sont de la forme

$$f(x) = k j_\lambda(x);$$

k étant une constante arbitraire; $\varphi(\lambda)$ est donc univalente sur $\mathfrak{M}$.

g. Classe B. — C'est une sous-classe linéaire de A qui contient, quels que soient λ et μ de $\mathfrak{M}$, la fonction

$$j_{\lambda\mu}(x) = \frac{j_\lambda(x) - j_\mu(x)}{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)}; \tag{2}$$

et donc aussi la limite de celle-ci pour $\lambda = \mu$.

h. Deuxième principe d'unicité. — Quel que soit λ de $\mathfrak{M}$ et quelle que soit la fonction $g(x)$ d'une certaine multiplicité linéaire C, l'équation

$$\mathcal{O}[f(x)] = \varphi(\lambda) f(x) + g(x) \tag{3}$$

a une solution et une seule dans B qu'on désignera par $\mathcal{L}_\lambda[g(x)]$. Si μ appartient à $\mathfrak{M}$, $j_\mu(x)$ appartient à C et un calcul facile montre que

$$j_{\lambda\mu}(x) = \mathcal{L}_\lambda[j_\mu(x)]; \tag{4}$$

i. Fonctionnelle δ. — C'est une fonctionnelle linéaire quelconque définie dans A. λ appartenant à $\mathfrak{M}$, on posera

$$\delta[j_\lambda(x)] = A(\lambda), \qquad \delta[j_{\lambda\lambda}(x)] = B(\lambda) \tag{5}$$

et l'on fera de plus l'hypothèse que $A(\lambda)$ possède sur $\mathfrak{M}$ une infinité dénombrable de zéros tous simples :

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots, \tag{6}$$

$$B(\lambda_n) \neq 0. \tag{7}$$

Enfin la fonctionnelle $\delta\{\mathcal{L}_\lambda[f]\}$ sera désignée par $\Delta_\lambda[f]$.

j. Développement formel d'une fonction de C *en une série procédant suivant les* $j_{\lambda_n}(x)$. Si une fonction de C est représentée par le développement

$$f(x) = \sum_n \alpha_n j_{\lambda_n}(x); \tag{8}$$

un calcul formel très simple montre que

$$\alpha_n = \frac{\Delta_{\lambda_n}[f]}{B(\lambda_n)}. \tag{9}$$

La question de convergence reste entière; il y a lieu d'examiner aussi l'influence sur la convergence du fait que $\delta[f]$ est ou non nul.

II. Séries de Bessel généralisées. — Soit p un nombre complexe tel que

$$\mathcal{R}[p] > -\frac{1}{2}.$$

a. Espace X. — C'est l'intervalle

$$0 \leqq x \leqq +\infty \qquad (x \text{ réel}).$$

b. Classe A. — C'est l'ensemble des fonctions $f(x)$ définies et deux fois dérivables dans un intervalle

$$0 \leqq x < a \leqq +\infty,$$

leur dérivée première étant nulle à l'origine.

c. Opérateur $\mathcal{D}$. — C'est l'opérateur

$$\mathcal{D}[f] \equiv \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{df}{dx}.$$

d. Éléments fondamentaux. — Ce sont les fonctions

$$j_\lambda(x) = \frac{2^p p!}{(\lambda x)^p} J_p(\lambda x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{p!}{(p+k)!} \left(\frac{\lambda i x}{2}\right)^{2p};$$

elles appartiennent bien à la classe A et on a la propriété spectrale

$$\mathcal{D}[j_\lambda(x)] = -\lambda^2 j_\lambda(x).$$

e. Variété $\mathfrak{M}$. — C'est la portion du plan complexe Λ définie par

$$\mathcal{R}[\lambda] > 0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{R}[\lambda] = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}[\lambda] \geqq 0;$$

la première propriété d'unicité est bien vérifiée.

f. Classe B. — Elle est formée par les fonctions de A nulles à l'origine.

g. Deuxième propriété d'unicité. — La classe C est définie par les conditions suivantes :

1° $g(x)$ définie et intégrable pour $x \geqq 0$;
2° $\lim\limits_{x=0} [x g(x)] = 0$;
3° Convergence de $\int_0 x^{2p+1} g(x)\, dx$;

et l'on a

$$\mathcal{L}_\lambda[g(x)] = \frac{\pi}{2x^p} \int_0^x \xi^{p+1} [N_p(\lambda x) J_p(\lambda\xi) - J_p(\lambda x) N_p(\lambda\xi)] g(\xi)\, d\xi.$$

Exemple I. — *Séries de Fourier-Bessel.* — ω étant un nombre réel et positif, on posera

$$\delta[f(x)] = f(\omega).$$

On a alors

$$\Lambda(\lambda) = \frac{2^p p!}{(\lambda\omega)^p} J_p(\lambda\omega),$$

dont les racines positives seront désignées par

$$j_1, \ j_2, \ j_3, \ \ldots, \ j_n, \ \ldots.$$

On trouve par un calcul immédiat

$$B(j_n) = 2^p p! \frac{\omega}{2 j_n} \frac{1}{(\omega j_n)^p} J_{p+1}(\omega j_n) \qquad (\text{toujours} \neq 0)$$

et

$$\alpha_n = \frac{1}{2^p p!} (j_n)^p \frac{2}{\omega^2 J_{p+1}^2(\omega j_n)} \int_0^\omega \xi^{p+1} J_p(\xi j_n) f(\xi)\, d\xi.$$

C'est la formule qui donne les coefficients du développement de $x^p f(x)$ en série de Fourier-Bessel :

Exemple II. — *Séries de Bessel-Dini.* — H étant une nouvelle constante, on pose cette fois

$$\delta[f(x)] = (\mathrm{H}+p)\, f(\omega) + \omega f'(\omega),$$

ce qui donne

$$\mathrm{A}(\lambda) = \frac{2^p p\,!}{(\lambda\omega)^p}[\mathrm{H}\,\mathrm{J}_p(\lambda\omega) + \lambda\omega\,\mathrm{J}'_p(\lambda\omega)],$$

dont on désignera les racines situées sur $\mathfrak{M}$ par

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots$$

(il y a éventuellement au début de cette suite une racine imaginaire pure, les autres sont réelles et positives). Après quelques réductions assez simples on obtient

$$\alpha_n = \frac{k_n^p}{2^p p\,!}\,\frac{2\,k_n^2 \displaystyle\int_0^\omega \xi^{p+1}\,\mathrm{J}_p(k_n\xi)\, f(\xi)\, d\xi}{(k_n^2\omega^2 - p^2)\,\mathrm{J}_p^2(k_n\omega) + k_n^2\omega^2\,\mathrm{J}_p'^{\,2}(k_n\omega)}.$$

C'est la formule qui donne les coefficients du développement de $x^p f(x)$ en série de Bessel-Dini.

Exemple III. — *Séries de Schlömilch.* — Il faut poser

$$\delta[f(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi\sin\theta)\,\frac{\sin^{2p+1}\theta}{\cos^{2p}\theta}\, d\theta;$$

on fait de plus l'hypothèse que

$$-\frac{1}{2} < \mathcal{R}[p] < +\frac{1}{2}.$$

Une intégrale due à Sonine donne alors

$$\mathrm{A}(\lambda) = \frac{p\,!}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right)\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi},$$

dont les racines situées sur $\mathfrak{M}$ sont $\lambda_n = n$.

La méthode générale donne ensuite pour α_n l'expression

$$\alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}\, n^2\, \pi^{\frac{3}{2}-p}}{p\,!\,\Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{p+1}\theta}{\cos^{2p}\theta}$$
$$\times \left\{ \int_0^{\pi\sin\theta} \xi^{p+1}\,[\mathrm{N}_p(n\pi\sin\theta)\,\mathrm{J}_p(n\xi) - \mathrm{J}_p(n\pi\sin\theta)\,\mathrm{N}_p(n\xi)]\, f(\xi)\, d\xi \right\} d\theta,$$

qui est très différente de l'expression classique [1]; on montre cependant l'équivalence complète des deux résultats par un calcul assez laborieux et très artificiel. Il est très remarquable que la formule obtenue ne suppose pas la fonction $f(x)$ dérivable; on sait qu'il en est tout autrement de l'expression habituelle des coefficients de la série de Schlömilch [2].

Je montrerai ailleurs que le formalisme qui vient d'être exposé conduit à donner une démonstration de convergence unique dès qu'on s'est fixé l'opérateur $\mathcal{D}$ et l'élément fondamental $j_\lambda(x)$, en laissant la fonctionnelle ∂ très largement arbitraire. C'est ainsi que, dans le cas des séries de Bessel généralisées, on peut étudier d'un seul coup les conditions de convergence des séries de Fourier-Bessel, Bessel-Dini et Schlömilch; comme je le laisse prévoir plus haut, on obtient de plus une extension notable de ces conditions pour les séries de Schlömilch.

---

(1) Pour $p = 0$, la théorie classique donne

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u \cos n u \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(u \sin\theta)\, d\theta\right] du.$$

(2) Voir Watson, *Theory of Bessel functions*, Chap. XIX.