JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉLIE CARTAN

La géométrie de l'intégrale $\int F(x, y, y', y'')\, dx$

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 42-69.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__42_0>

La géométrie de l'intégrale $\int F(x, y, y', y'')\,dx$;

PAR ÉLIE CARTAN.

Etant donnée une intégrale $\int F(x, y, y', y'')\,dx$, dans laquelle y' et y'' désignent les deux premières dérivées d'une fonction arbitraire y de x, nous nous proposons de définir dans le plan (x, y) une géométrie généralisée qui soit liée intrinsèquement à cette intégrale : le mot « intrinsèquement » est entendu par rapport au groupe infini des *transformations de contact* du plan. Il s'agit en somme d'une généralisation de la géométrie riemannienne et de la géométrie finslérienne, intrinsèquement liées à une intégrale $\int F(x, y, y')\,dx$; mais ces deux dernières géométries sont invariantes par rapport au groupe des transformations *ponctuelles* (¹).

L'élément d'intégrale $F(x, y, y', y'')\,dx$, considéré sur une ligne donnée, peut être regardé comme définissant un *arc élémentaire* de cette ligne. Les arcs de cette sorte, faisant intervenir les éléments du second ordre d'une courbe, ne sont pas nouveaux en géométrie; en coordonnées cartésiennes, l'élément d'arc naturel d'une courbe en géométrie affine unimodulaire a précisément la forme $y''^{\frac{1}{3}}dx$. On

(¹) Il serait plus exact de dire que deux intégrales de la forme $\int F(x, y, y')\,dx$, équivalentes par rapport au groupe des transformations de contact, sont aussi équivalentes par rapport au groupe des transformations ponctuelles. Sur la géométrie finslérienne, *voir* mon ouvrage : *Les espaces de Finsler* (*Exposés de Géométrie*, II, Hermann, 1934).

pourrait penser, d'après cet exemple, qu'à toute intégrale

$$\int F(x, y, y', y'')\, dx$$

on peut attacher intrinsèquement une géométrie à connexion affine dont l'élément générateur serait l'*élément linéaire* ou *élément de contact* de Lie (x, y, y'). Mais il n'en est rien et les choses sont plus compliquées. Il faut faire appel en général à un *espace d'éléments du second ordre* (x, y, y', y''). Dans certains cas on peut introduire un *espace d'éléments linéaires* comme en géométrie finslérienne : ce sont en particulier ceux où l'intégrale donnée est réductible par une transformation de contact à l'une des formes $\int e^{\Phi}\, dx$, $\int \Phi^p dx$, Φ désignant une fonction linéaire en y'' et p un exposant constant. Dans le dernier de ces deux cas on a une géométrie à connexion affine fondée sur un groupe dont la structure dépend de l'exposant p; la connexion est déterminée complètement dans les paragraphes 3 et 4 de ce Mémoire.

L'intégrale $\int F(x, y, y', y'')dx$ peut être regardée comme un cas particulier des « objets géométriques », dont la notion générale a été introduite par M. Veblen [1]. A cette intégrale, considérée par rapport au groupe des transformations de contact, comme à tous les « objets géométriques » qui ressortissent à la géométrie différentielle, on peut associer d'une manière intrinsèque un système de formes de Pfaff définies à une substitution linéaire près appartenant à un groupe linéaire donné; dans le cas où « l'objet géométrique » est une forme différentielle quadratique définie positive à n variables, considérée par rapport au groupe des transformations ponctuelles, on peut lui associer n formes de Pfaff $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ dont la somme des carrés représente la forme quadratique donnée et qui par suite sont définies à une substitution orthogonale près. La théorie de l'objet géométrique est, dans les cas de cette nature, la recherche des invariants du système de formes correspondant. Si l'on applique à la résolution de ce

---

[1] *Voir* O. Veblen; *Modern differential Geometry* (The Rice Instit., pamphlet XXI, 1934, p. 237-255).

problème la méthode générale que j'ai indiquée en 1908 ([1]), on est conduit dans de nombreux cas à associer d'une manière intrinsèque au système de formes donné une géométrie généralisée fondée sur un certain groupe, de sorte que *les invariants qui caractérisent l'objet géométrique donné sont susceptibles d'une interprétation géométrique ne faisant appel qu'aux notions d'une certaine géométrie de Klein* (en géométrie riemannienne, les notions de la géométrie euclidienne). Il peut y avoir un certain arbitraire dans le choix du groupe sur lequel est fondée la géométrie généralisée associée à l'objet géométrique donné. Il peut aussi arriver qu'il faille distinguer différentes classes lorsque l'objet géométrique dépend d'éléments arbitraires (paramètres, fonctions, etc.); le groupe sur lequel est fondée la géométrie généralisée dépend alors de la classe : c'est précisément ce qui se passe dans le cas qui nous occupe. La classe générale est celle des fonctions F qui, considérées comme fonctions de y'', ne sont pas linéaires et ne satisfont pas à une certaine équation différentielle du troisième ordre; la classe de celles qui satisfont à cette dernière équation est traitée dans le paragraphe **4**; le cas où $F = \Phi^p$, Φ étant linéaire en y'' et $p \neq 0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, rentre dans la classe générale, mais peut être aussi regardé comme constituant une classe particulière, traitée dans le paragraphe **3**, et conduisant à un groupe différent du groupe de la classe générale et rendant mieux compte des propriétés géométriques de la classe particulière considérée. Comme on le verra en détail dans ce paragraphe, la géométrie à connexion affine attachée à l'intégrale donnée est en quelque sorte imposée par la nature des choses et la méthode appliquée y conduit tout naturellement ([2]).

([1]) E. Cartan, *Les sous-groupes des groupes continus* (*Ann. Éc. Norm.*, 25, 1908, Chap. I).

([2]) La même méthode avait déjà été appliquée à l'intégrale $\int F(x, y, y')\, dx$ dans un Mémoire de *Mathematica*, 4, 1930, p. 114-136. Sur la notion des espaces généralisés, *voir* mon ouvrage : *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes et les espaces généralisés* (*Exposés de Géométrie*, V, Hermann, 1935).

I. — Généralités.

1. Donnons-nous une intégrale $\int F(x, y, y', y'')\,dx$ étendue à un arc de courbe arbitraire, y' et y'' désignant les dérivées première et seconde de y par rapport à x. Nous supposons la fonction F posséder des dérivées partielles jusqu'à un ordre convenable par rapport à ses quatre arguments.

Si l'on effectue une transformation de contact, l'intégrale donnée se transforme en une intégrale analogue $\int \overline{F}\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'')\,d\bar{x}$. Nous allons attacher à l'intégrale donnée trois expressions de Pfaff, ω, ω_1, ω_2 jouissant de propriétés covariantes par rapport au groupe des transformations de contact, à savoir :

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega\ = F(x, y, y', y'')\,dx + \alpha(dy' - y''\,dx) + \beta(dy - y'\,dx), \\ \omega_1 = \lambda(dy\ - y'\,dx), \\ \omega_2 = \mu[dy' - y''\,dx + \gamma(dy - y'\,dx)]. \end{cases}$$

Dans ces expressions figurent cinq variables auxiliaires nouvelles α, β, γ, λ, μ. Si les deux intégrales $\int F(x, y, y', y'')\,dx$ et $\int \overline{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'')\,d\bar{x}$ sont équivalentes par rapport au groupe des transformations de contact, il est clair qu'on peut trouver pour $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ des fonctions de x, y, y', y'', α, β, γ, λ, μ réalisant les trois égalités

$$\bar{\omega} = \omega, \qquad \bar{\omega}_1 = \omega_1, \qquad \bar{\omega}_2 = \omega_2,$$

où les $\bar{\omega}_i$ sont construites avec les variables surlignées (et la fonction $\overline{F}$) de la même manière que les ω_i avec les variables initiales (et la fonction F). La réciproque est évidente : en effet, l'égalité

$$\bar{\lambda}(d\bar{y} - \bar{y}'\,dx) = \lambda(dy - y'\,dx)$$

montre qu'on passe de x, y, y' à $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{y}'$ par une transformation de contact ; d'autre part l'égalité

$$\bar{\mu}[d\bar{y}' - \bar{y}''\,d\bar{x} + \bar{\gamma}(d\bar{y} - \bar{y}'\,d\bar{x})] = \mu\,[dy' - y''\,dx + \gamma(dy - y'\,dx)]$$

montre que si y, y', y'' désignent une fonction de x et ses deux premières dérivées, et si la transformée de la courbe qui représente la variation de y est la courbe qui représente la variation de $\bar{y}$, $\bar{y}'$ et $\bar{y}''$ sont les dérivées première et seconde de cette fonction par rapport à $\bar{x}$. Enfin pour ces deux courbes les deux intégrales $\int F(x, y, y' y'')\, dx$ et $\int \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'')\, d\bar{x}$ sont égales.

2. Nous introduirons encore une quatrième forme ω_3 qui sera provisoirement une forme linéaire quelconque en dx, dy, dy', dy''. Nous allons chercher à réduire le nombre des variables auxiliaires introduites en imposant aux formes ω_i des conditions de nature invariante. La première condition est (¹)

$$(a) \qquad \omega' \equiv [\omega_2 \omega_3] \qquad (\operatorname{mod} \omega_1)$$

ou, en développant les calculs,

$$\frac{\partial F}{\partial y'}[dy'\, dx] + \frac{\partial F}{\partial y''}[dy''\, dx] + \alpha\,[dx\, dy''] + [d\alpha(dy' - y''\, dx)] + \beta[dx\, dy'] \equiv \mu[(dy' - y''\, dx)\, \omega_3] \qquad (\operatorname{mod} \omega_1).$$

Le premier membre doit manifestement s'annuler si l'on fait $dy = y'\, dx$, $dy' = y''\, dx$, ce qui donne

$$(2) \qquad \alpha = \frac{\partial F}{\partial y''};$$

il vient ensuite

$$\left[(dy' - y''\, dx)\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\, dx - d\alpha - \beta\, dx - \mu\omega_3\right)\right] \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1),$$

ou

$$(3) \quad \omega_3 = \frac{1}{\mu}\left[- d\frac{\partial F}{\partial y''} + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \beta\right) dx + \rho(dy' - y''\, dx) + \sigma(dy - y'\, dx)\right].$$

3. Imposons maintenant les conditions invariantes :

$$(b) \qquad \begin{cases} \omega'_1 \equiv [\omega\omega_2] & (\operatorname{mod} \omega_1), \\ \omega'_2 \equiv \varepsilon[\omega\omega_3] & (\operatorname{mod} \omega_1,\ \omega_2)\,; \ (\varepsilon = \pm 1). \end{cases}$$

(¹) Pour les notations et la notion de dérivation extérieure, *voir* E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, Hermann, 1922).

La première relation donne immédiatement

$$\lambda = \mu F, \tag{4}$$

et la deuxième

$$\mu^2 = -\varepsilon F \frac{\partial^2 F}{\partial y''^2}. \tag{5}$$

On prendra $\varepsilon = -1$ ou $\varepsilon = +1$ suivant que $F \frac{\partial^2 F}{\partial y''^2}$ est positif ou négatif. Nous laissons de côté les cas où $\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} = 0$, parce qu'alors l'intégrale peut par une transformation de contact se ramener à ne plus contenir y''.

Les équations (4) et (5) déterminent λ et μ au signe près.

Les variables auxiliaires α, λ et μ sont ainsi remplacées, d'après une loi de caractère invariant, par des fonctions déterminées de x, y, y', y''.

4. La première relation (b) montre que la dérivée extérieure ω_1' est de la forme

$$\omega_1' = [\omega\omega_2] + a[\omega\omega_1] + b[\omega_1\omega_2] + k[\omega_1\omega_3],$$

ce qui peut s'écrire

$$\omega_1' = [(\omega + b\omega_1)(\omega_2 + a\omega_1)] + k[\omega_1\omega_3).$$

On peut prendre les formes $\omega + b\omega_1$ et $\omega_2 + a\omega_1$ pour nouvelles formes ω et ω_2 ; c'est possible en disposant des variables auxiliaires β et γ. On arrive ainsi à la relation invariante

$$\omega_1' = [\omega\omega_2] + k[\omega_1\omega_3]. \tag{c}$$

Le coefficient k est un *invariant différentiel*. Pour obtenir sa valeur, il suffit dans la relation précédente de considérer les termes en $[dy\, dy'']$, ce qui donne

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y''} = k\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} = kF\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2}$$

ou

$$k = \frac{F}{2\sqrt{-\varepsilon F \frac{\partial^2 F}{\partial y''^2}}}\left(\frac{\frac{\partial^3 F}{\partial y''^3}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2}} + 3\frac{\frac{\partial F}{\partial y''}}{F}\right). \tag{6}$$

Remarquons maintenant que si la forme ω_1 est parfaitement déterminée, il n'en est pas encore de même des formes ω, ω_2 et ω_3, car on n'a imposé que deux conditions aux variables auxiliaires β, γ, ρ, σ. Posons

$$(7)\qquad \overline{\omega}=\omega+u\,\omega_1,\qquad \overline{\omega}_2=\omega_2+v\,\omega_1,\qquad \overline{\omega}_3=\omega_3+w\,\omega_1+r\,\omega_2+s\,\omega;$$

pour que les relations (a) et (c)

$$\omega' \equiv [\omega_2\omega_3] \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_1),$$
$$\omega'_1 = [\omega\omega_2]+k[\omega_1\omega_3]$$

soient conservées, il faut et il suffit qu'on ait

$$[\omega_2\omega_3]+u[\omega\omega_2]=[\omega_2(\omega_3+s\omega)],$$
$$[(\omega+u\omega_1)(\omega_2+v\omega_1)]+k[\omega_1(\omega_3+r\omega_2+s\omega)]=[\omega\omega_2]+k[\omega_1\omega_3],$$

d'où

$$(8)\qquad s=-u,\qquad v=-ku,\qquad u+kr=0.$$

5. La seconde relation (b) nous permet d'écrire

$$\omega'_2 \equiv \varepsilon[\omega\omega_3]+a[\omega\omega_2]+b[\omega_2\omega_3] \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_1),$$

les coefficients a et b n'ayant pas la même signification que précédemment. Le coefficient b est égal à k, comme le montre la dérivation extérieure de la relation (c),

$$[\omega'\omega_2]-[\omega\omega'_2]+k[\omega'_1\omega_3]-k[\omega_1\omega'_3]+[dk\,\omega_1\omega_3]=0,$$

où l'on ne conserve que les termes en $[\omega\omega_2\omega_3]$. En passant alors des ω_i aux $\overline{\omega}_i$, on obtient

$$\varepsilon[\omega\omega_3]+a[\omega\omega_2]+k[\omega_2\omega_3]+v[\omega\omega_2]=\varepsilon[\omega(\omega_3+r\omega_2)]+\overline{a}[\omega\omega_2]+k[\omega_2(\omega_3+s\omega)],$$

d'où

$$(9)\qquad \overline{a}=a+v+ks-\varepsilon r=a+(2k^2-\varepsilon)r.$$

Si donc $2k^2-\varepsilon\neq 0$, on peut s'arranger pour annuler le coefficient a dans ω'_2, ce qui donne la nouvelle relation invariante

$$(d)\qquad \omega'_2\equiv\varepsilon[\omega\omega_3]+k[\omega_2\omega_3] \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_1).$$

Le coefficient r, ainsi que les coefficients u, v, s des formules (7), sont donc nuls, et la seule modification qu'on puisse faire subir aux formes ω_i, de manière à respecter les relations invariantes (a), (b), (c), (d), est donnée par

$$\bar{\omega} = \omega, \qquad \bar{\omega}_1 = \omega_1, \qquad \bar{\omega}_2 = \omega_2, \qquad \bar{\omega}_3 = \omega_3 + w\omega_1.$$

6. On peut enfin achever la détermination des formes ω_i, sans intervention d'aucune variable auxiliaire, en partant de la dérivée extérieure ω'. On a, d'après (a),

$$\omega' = \omega_2\omega_3 - l[\omega\omega_1] - h[\omega_1\omega_2] - m[\omega_1\omega_3].$$

On peut alors disposer de l'indéterminée w pour annuler h.

On arrive ainsi à la conclusion suivante.

Théorème. — *Si l'invariant k^2 est différent de $\frac{\varepsilon}{2}$, on peut trouver quatre formes invariantes ω, ω_1, ω_2, ω_3 satisfaisant à des relations de la forme*

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned} \omega' &= [\omega_2\omega_3] - l[\omega\omega_1] - m[\omega_1\omega_3],\\ \omega'_1 &= [\omega\omega_2] + k[\omega_1\omega_3],\\ \omega'_2 &= \varepsilon[\omega\omega_3] + k[\omega_2\omega_3] - n[\omega\omega_1] - p[\omega_1\omega_2] - q[\omega_1\omega_3],\\ \omega'_3 &= -r[\omega\omega_1] - s[\omega\omega_2] - t[\omega\omega_3] - u[\omega_1\omega_2] - v[\omega_1\omega_3] - w[\omega_2\omega_3]; \end{aligned}\right.$$

les coefficients k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, v, w sont les invariants différentiels fondamentaux. Néanmoins les formes ω_i ne sont pas complètement définies, en ce sens qu'on peut remplacer ω_1 et ω_2 par $-\omega_1$ et $-\omega_2$, ce qui change le signe des invariants k, l, m, p, r, s, v, w.

7. Dans le cas général $k^2 \neq \frac{\varepsilon}{2}$, où nous venons de nous placer, les formules (A) permettent d'attacher à l'intégrale donnée une géométrie généralisée. Nous nous bornerons au cas $\varepsilon = 1$. Considérons d'abord le cas où tous les invariants fondamentaux sont nuls : cela se produit par exemple pour $F = \sqrt{y''}$, qui correspond à

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{y''}\,dx + \frac{1}{2\sqrt{y''}}(dy' - y''dx),\\ \omega_1 &= \frac{1}{2}(dy - y'dx),\\ \omega_2 &= \frac{1}{2\sqrt{y''}}(dy' - y''dx),\\ \omega_3 &= \frac{1}{2y''}dy''. \end{aligned}$$

S'il en est ainsi, les équations (A) sont les équations de structure d'un groupe G, à savoir celui qui laisse invariantes les quatre formes précédentes ω_i. Un calcul immédiat donne ses équations finies

$$\bar{x} = ax + b, \qquad \bar{y} = y + cx + d, \qquad \bar{y}' = \frac{y' + c}{a}, \qquad \bar{y}'' = \frac{1}{a^2} y''.$$

C'est le groupe d'une géométrie affine caractérisée par la propriété d'admettre une direction invariante (celle de l'axe des y), avec invariance des longueurs des vecteurs parallèles à cette direction. Dans cette géométrie l'élément d'arc naturel d'une courbe est précisément $\sqrt{y''}\,dx$; si M et M' sont les points d'abscisses x et $x + dx$, et si P désigne le point où le parallèle à Oy menée par M' coupe la tangente en M, la quantité $\sqrt{y''}\,dx$ est égale à $\sqrt{2\,\mathrm{PM}'}$. Le rappor

$$\frac{\omega_3}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{y'''}{y''^{\frac{3}{2}}}$$

peut être appelé la *courbure* de la courbe.

Cela posé les formules (A) peuvent s'écrire dans le cas général

$$\begin{aligned}
\omega' &= [\omega_2 \omega_3] - \Omega, \\
\omega'_1 &= [\omega \omega_2] - \Omega_1, \\
\omega'_2 &= [\omega \omega_3] - \Omega_2, \\
\omega'_3 &= -\Omega_3,
\end{aligned}$$

où les Ω_i sont des formes quadratiques extérieures en ω, ω_1, ω_2, ω_3. Cela signifie que le plan des (x, y) dans lequel est donnée l'intégrale $\int F\,dx$ peut être regardé comme un espace généralisé d'*éléments de courbe du second ordre* (x, y, y', y'') fondé sur le groupe G précédemment indiqué. Les formes Ω_i définissent la courbure riemannienne de cet espace, et la géométrie définie dans cet espace est intrinsèquement liée à l'intégrale donnée.

Si les formes Ω_i ne contenaient pas ω_3, l'espace généralisé serait un *espace d'éléments linéaires* (x, y, y'). Il faut et il suffit pour cela que les invariants k, m, q, t, v, w soient nuls; tous les invariants autres que s sont alors nuls.

Nous n'examinerons pas davantage le cas général; nous allons passer au cas particulier intéressant où l'invariant k^2 est une constante, égale ou non à $\frac{\varepsilon}{2}$.

II. — Les intégrales dont l'invariant k est constant.

8. Les fonctions F pour lesquelles l'invariant k est constant sont données par l'équation différentielle du troisième ordre (6). On peut intégrer directement cette équation dont la solution générale est

$$(10) \qquad F = (Ay'' + B)^p (Cy'' + D)^{1-p},$$

où A, B, C, D sont des fonctions arbitraires de x, y, y', et où p désigne l'une des racines de l'équation

$$(11) \qquad (4 + k^2\varepsilon)p(1 - p) = 1;$$

il y a exception pour $\varepsilon = -1$, $k^2 = 4$; dans ce cas la solution générale est

$$(12) \qquad F = (Cy'' + D)\, e^{\frac{Ay''+B}{Cy''+D}},$$

A, B, C, D étant des fonctions arbitraires de x, y, y'.

On peut, par une transformation de contact, réduire les courbes intégrales de l'équation différentielle $Cy'' + D = 0$ aux points du plan; la fonction F prend alors la forme plus simple

$$(10') \qquad F = (Ay'' + B)^p,$$

$$(11') \qquad F = e^{Ay''+B}.$$

Mais il faut remarquer que, dans le domaine réel, la forme (10) n'existe que si l'équation (11) a ses racines réelles, ce qui exige soit $\varepsilon = 1$, soit $\varepsilon = -1$, $k^2 \geqq 4$.

9. On peut retrouver directement les formes réduites (10') et (11') sans avoir à intégrer l'équation (6). Cherchons en effet si l'on peut trouver une famille à deux paramètres de courbes, liée d'une manière invariante à l'intégrale donnée. Elle sera constituée par les courbes intégrales d'un système différentiel de la forme

$$(12) \qquad \omega + M\omega_2 = 0, \qquad \omega_1 = 0,$$

où M sera un invariant différentiel. Prenons pour M une constante absolue. En tenant compte des relations invariantes (a) et (d), la condition pour que le système (12) soit complètement intégrable est

$$\omega' + M\omega'_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\,\omega_1,\ \omega + M\omega_2),$$

ou encore

$$M\varepsilon\omega + (1 + Mk)\,\omega_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\,\omega + M\omega_2),$$

d'où enfin

$$\varepsilon M^2 - kM - 1 = 0.$$

Si l'invariant k est une constante, cette équation du second degré en M admet deux racines qui sont réelles si $k^2 + 4\varepsilon \geqq 0$. En réduisant alors aux points du plan, par une transformation de contact, les courbes intégrales du système (12), on voit que $\omega + M\omega_2$ doit être linéaire en dx et dy, et par suite, en annulant le coefficient de dy', on a, d'après (1), (2) et (3),

$$\frac{\partial F}{\partial y''} + M\sqrt{-\varepsilon F \frac{\partial^2 F}{\partial y''^2}} = 0;$$

la solution générale de cette équation, si $M^2\varepsilon \neq -1$, est

$$F = (Ay'' + B)^{\frac{M^2\varepsilon}{M^2\varepsilon+1}};$$

elle est bien de la forme (10').

Remarquons enfin que le cas singulier $k^2 = +\frac{\varepsilon}{2}$ correspond aux valeurs $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ de p, ce qui ramène, par une transformation de contact, la fonction F à la forme $\sqrt[3]{Ay'' + B}$.

10. Nous allons, dans ce qui suit, traiter directement le cas k constant; néanmoins nous nous bornerons à la forme (10') de F, avec l'exposant p réel. Le résultat essentiel est qu'on peut attacher à l'intégrale donnée une géométrie de caractère affine, l'espace étant un *espace d'éléments linéaires* (x, y, y'), au lieu d'être, comme dans le cas général, un espace d'éléments de courbes du second ordre. Ce résultat s'étend du reste à tous les cas où l'invariant k est constant; mais le caractère affine de la géométrie disparaît si $k^2 = 4$, $\varepsilon = -1$. Ajoutons que le groupe de la géométrie n'est plus, sauf si $k = 0$, le groupe indiqué dans le cas général où k^2 est une fonction, constante ou non, différente de $\frac{\varepsilon}{2}$.

III. — La géométrie de l'intégrale $\int (Ay' + B)^p \, dx$.

11. Nous supposerons d'abord $k^2 \neq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire p différent de $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ (et aussi de 0, 1). Nous poserons, en changeant les notations,

$$F = \frac{(y'' + G)^p}{H^{3p-1}} = H u^p, \tag{13}$$

en indiquant par u le rapport $\frac{y'' + G}{H^3}$, et nous procéderons directement à la recherche des formes invariantes.

Introduisons les trois formes

$$\left\{ \begin{aligned} \varpi_1 &= H u^p [dx + \alpha(dy - y'\,dx)], \\ \varpi_2 &= \frac{1}{H} u^{2p-1} (dy - y'\,dx), \\ \varpi_3 &= \frac{1}{H^2} u^{p-1} [dy' + G\,dx + \beta(dy - y'\,dx)], \end{aligned} \right. \tag{14}$$

avec deux variables auxiliaires α et β. La forme ϖ_1 n'est autre que la forme invariante $\omega + M\omega_2$; la forme ϖ_2 est, à un facteur constant près, la forme ω_1; enfin la forme $\varpi_3 - \varpi_1$ n'est autre, à un facteur constant près, que la forme ω_2.

Nous allons d'abord introduire une forme invariante ϖ_4 par la condition

$$\varpi'_1 \equiv p[\varpi_1 \varpi_4] \qquad (\mathrm{mod}\, \varpi_2); \tag{α}$$

on trouve

$$\varpi_4 = -\frac{du}{u} - \frac{1}{p}\frac{dH}{H} + \frac{\alpha}{p} dy' + \gamma\,dx + \delta(dy - y'\,dx), \tag{15}$$

avec deux variables auxiliaires nouvelles γ, δ. On peut ensuite satisfaire à la relation

$$\varpi'_2 = (2p - 1)[\varpi_2 \varpi_4] + [\varpi_1 \varpi_3], \tag{β}$$

en prenant

$$(16)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial \log H}{\partial y'}, \\ \beta = (2p-1)\gamma + G\dfrac{\partial \log H}{\partial y'} + \dfrac{1-3p}{p}\left(\dfrac{\partial \log H}{\partial x} + y'\dfrac{\partial \log H}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Exprimons ensuite la relation invariante

$$(\gamma)\qquad \varpi'_3 \equiv (p-1)[\varpi_3\varpi_4] \quad (\mathrm{mod}\,\varpi_2).$$

On trouve

$$\beta = (1-p)\gamma + \frac{\partial G}{\partial y'} - 2G\frac{\partial \log H}{\partial y'} + \frac{3p-1}{p}\left(\frac{\partial \log H}{\partial x} + y'\frac{\partial \log H}{\partial y}\right),$$

d'où β et γ par les relations

$$(17)\quad \begin{cases} (3p-2)\beta = (2p-1)\dfrac{\partial G}{\partial y'} + (1-3p)G\dfrac{\partial \log H}{\partial y'} \\ \qquad\qquad + (3p-1)\left(\dfrac{\partial \log H}{\partial x} + y'\dfrac{\partial \log H}{\partial y}\right), \\ (3p-2)\gamma = \dfrac{\partial G}{\partial y'} - 3G\dfrac{\partial \log H}{\partial y'} \\ \qquad\qquad + 2\,\dfrac{3p-1}{p}\left(\dfrac{\partial \log H}{\partial x} + y'\dfrac{\partial \log H}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Enfin la relation invariante

$$(\delta)\qquad \varpi'_1 = p[\varpi_1\varpi_4] - h[\varpi_2\varpi_3],$$

donne

$$(18)\qquad \delta = \alpha\gamma - \frac{1}{p}G\left(\alpha^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial y'}\right) + \frac{1}{p}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + y'\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right).$$

On voit que les coefficients α, β, γ, δ ne dépendent que de x, y, y'; d'autre part ils ne font intervenir que les dérivées partielles des deux premiers ordres de la fonction H et la dérivée $\dfrac{\partial G}{\partial y'}$.

On aurait pu substituer à la relation invariante (δ) la relation $\varpi'_4 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\varpi_2)$, qui aurait conduit à

$$\delta = \frac{\partial \gamma}{\partial y'} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + y'\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right);$$

mais alors δ aurait fait intervenir des dérivées partielles du *second* ordre de la fonction G.

La forme ϖ'_4 ne fait intervenir que les différentielles dx, dy, dy' et l'on vérifie facilement qu'il en est de même de l'expression $\varpi'_3 - (p-1)[\varpi_3\varpi_4]$. On peut donc écrire

$$
(\mathrm{B}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\varpi'_1 &= \qquad p\,[\varpi_1\varpi_4] - h\,[\varpi_2\varpi_3],\\
\varpi'_2 &= [\varpi_1\varpi_3] + (2p-1)\,[\varpi_2\varpi_4],\\
\varpi'_3 &= (p-1)\,[\varpi_3\varpi_4] - l\,[\varpi_1\varpi_2] - m\,[\varpi_2\varpi_3],\\
\varpi'_4 &= \quad -n\,[\varpi_1\varpi_2] - q\,[\varpi_1\varpi_3] - r\,[\varpi_2\varpi_3].
\end{aligned}
\right.
$$

Les coefficients h, l, m, n, q, r sont des invariants différentiels, fonctions déterminées de x, y, y', y''.

12. Des formules (B) nous allons déduire une géométrie affine attachée intrinsèquement à l'intégrale donnée. Remarquons d'abord que si $G = 0$, $H = 1$, les coefficients α, β, γ, δ sont tous nuls ainsi que les invariants h, l, m, n, q, r, et l'on a

$$
\varpi_1 = u^p\,dx, \qquad \varpi_2 = u^{2p-1}(dy - y'\,dx), \qquad \varpi_3 = u^{p-1}\,dy', \qquad \varpi_4 = -\frac{du}{u}.
$$

Les formules (B), qui ne contiennent plus alors que des coefficients constants, sont les équations de structure du groupe G à quatre paramètres qui laisse invariantes les quatre formes ϖ_i, groupe dont les équations sont

$$
(19) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\bar{x} &= a^p x \quad + c, & \bar{y} &= a^{2p-1} y + bx + h,\\
\bar{y}' &= a^{p-1} y' + \frac{b}{a^p}, & \bar{u} &= \frac{u}{a}.
\end{aligned}
\right.
$$

C'est un groupe linéaire caractérisé par la double propriété que la direction de l'axe des y est *stable* (invariante par les transformations du groupe), et que dans un parallélogramme dont l'un des côtés est parallèle à l'axe des y, le rapport de la puissance $(3p-1)^{\text{ième}}$ de la longueur de ce côté à la puissance $(2p-1)^{\text{ième}}$ de l'aire est un invariant. L'élément d'arc naturel MM' d'une courbe, à savoir

$$
ds = y''^p\,dx,
$$

est précisément, au facteur 2^p près, la valeur de cet invariant pour le parallélogramme MPM′Q dont M et M′ sont deux sommets opposés, le point P étant l'intersection de la tangente en M avec la parallèle à l'axe des y menés par M′

$$ds = \frac{(dx\, d^2 y - dy\, d^2 x)^p}{dx^{3p-1}}.$$

Les calculs précédents montrent du reste que le groupe (19) est le plus grand groupe de transformations de contact laissant invariante l'intégrale $\int y''^p\, dx$.

13. Revenons au cas général. Les formules (B), qui peuvent s'écrire

$$(\mathrm{B}') \qquad \begin{cases} \varpi'_1 = p[\varpi_1 \varpi_4] - \Pi_1, \\ \varpi'_2 = [\varpi_1 \varpi_3] + (2p-1)[\varpi_2 \varpi_4] - \Pi_2, \\ \varpi'_3 = (p-1)[\varpi_3 \varpi_4] - \Pi_3, \\ \varpi'_4 = -\Pi_4, \end{cases}$$

où les Π_i ($\Pi_2 = 0$) sont des formes quadratiques en ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, c'est-à-dire en dx, dy, dy', sont les équations de structure d'un *espace d'éléments linéaires* généralisé fondé sur le groupe (19). Si un tel espace est rapporté à un système quelconque de coordonnées x, y et si l'on attache à chaque point (x, y) le *repère cartésien naturel* par rapport auquel les coordonnées du point $(x + dx, y + dy)$ sont dx et dy, la connexion affine de l'espace est définie par quatre formes différentielles

$$\omega_i^j \equiv \Gamma_{i1}^j\, dx + \Gamma_{i2}^j\, dy + C_i^j\, dy',$$

qui servent à définir la *différentielle covariante* d'un vecteur de composantes contrevariantes X, Y, et doué d'un *élément d'appui* (x, y, y') (¹) :

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathrm{DX} = d\mathrm{X} + \omega_1^1\, \mathrm{X} + \omega_2^1\, \mathrm{Y}, \\ \mathrm{DY} = d\mathrm{Y} + \omega_1^2\, \mathrm{X} + \omega_2^2\, \mathrm{Y}. \end{cases}$$

Les coefficients Γ_{ij}^k et C_i^j sont des fonctions de x, y, y'.

Dans les formules (B), tout se passe comme si l'on avait attaché à

(¹) *Cf.* l'ouvrage déjà cité : *Les Espaces de Finsler* (*Exposés de Géométrie*, II, Hermann, 1934).

chaque point M un repère cartésien $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ avec les formules ([1])

$$(21)\quad \begin{cases} dM = \varpi_1 \vec{e}_1 + \varpi_2 \vec{e}_2, \\ D\vec{e}_1 = p\varpi_4 \vec{e}_1 + \varpi_3 \vec{e}_2, \\ D\vec{e}_2 = (2p-1)\varpi_4 \vec{e}_2. \end{cases}$$

La direction stable est celle du vecteur $\vec{e}_2$ qu'on obtient en donnant à dx, dy des valeurs qui annulent ϖ_1.

14. Avant de calculer les quantités Γ_{ij}^k et C_i^j, nous allons changer un peu de notations et introduire des coordonnées homogènes $\dot{x}, \dot{y}$ à la place de $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Nous poserons

$$(22)\quad \begin{cases} \overline{G}(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^3 G(x, y; y'), \\ \overline{H}(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}\; H(x, y; y'). \end{cases}$$

Les formes $\overline{G}$ et $\overline{H}$ sont donc homogènes par rapport à $\dot{x}, \dot{y}$, la première du troisième degré, la seconde du premier degré. Les formules (14) et (16) donnent

$$(23)\quad \begin{cases} \varpi_1 = u^p \left(\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \dot{x}} dx + \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \dot{y}} dy\right), \\ \varpi_2 = u^{2p-1} \dfrac{\dot{x}\,dy - \dot{y}\,dx}{\overline{H}}; \end{cases}$$

nous écrirons, avec un petit changement de notations,

$$(24)\quad \omega_i^j = \Gamma_{i1}^j\, dx + \Gamma_{i2}^j\, dy + C_i^j(\dot{x}\, d\dot{y} - \dot{y}\, d\dot{x}),$$

les C_i^j étant homogènes et de degré -2 en $\dot{x}, \dot{y}$.

---

[1] Dans le cas examiné au n° **12** où $G = 0$, $H = 1$, ces formules sont faciles à vérifier : le vecteur $\vec{e}_1$ est celui dont les composantes (x, y) ou (dx, dy) rendent la forme ϖ_1 égale à 1 et la forme ϖ_2 égale à zéro ; le vecteur $\vec{e}_2$ est celui dont les composantes donnent à ces formes les valeurs zéro et 1. Le symbole $D\vec{e}_1$ désigne alors la différentielle ordinaire de $\vec{e}_1$.

Par rapport au repère naturel, les vecteurs $\vec{e}_1$ $(\varpi_1 = 1, \varpi_2 = 0)$ et $\vec{e}_2(\varpi_1 = 0, \varpi_2 = 1)$, ont pour composantes

$$
(25)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\vec{e}_1: \quad \frac{u^{-p}}{\Pi}\dot{x}, \quad \frac{u^{-p}}{\Pi}\dot{y};\\
&\vec{e}_2: \quad -u^{1-2p}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{y}}, \quad u^{1-2p}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{x}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Rappelons enfin que la différentielle logarithmique de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs unités du repère naturel est $\omega_1^1 + \omega_2^2$.

15. Cela posé, nous allons calculer les formes ω_i^j par une suite de caractérisations géométriques.

En premier lieu, le nombre qui mesure, par rapport au repère naturel, l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ est égal à u^{1-3p}. La variation élémentaire relative de la mesure absolue de cette aire est, d'après (21), $(3p-1)\varpi_4$, d'où

$$(3p-1)\varpi_4 = (1-3p)\frac{du}{u} + \omega_1^1 + \omega_2^2.$$

D'autre part la variation élémentaire relative du vecteur $\vec{e}_2$ est, d'après (21),

$$(2p-1)\varpi_4 = (1-2p)\frac{du}{u} + \frac{2p-1}{3p-1}(\omega_1^1 + \omega_2^2).$$

On a donc, d'après les formules (20) appliquées aux composantes (25) du vecteur $\vec{e}_2$,

$$
\begin{aligned}
-d\left(u^{1-2p}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{y}}\right) - u^{1-2p}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{y}}\,\omega_1^1 + u^{1-2p}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{x}}\,\omega_2^1
&= -u^{1-2p}\left[(1-2p)\frac{du}{u} + \frac{2p-1}{3p-1}(\omega_1^1 + \omega_2^2)\right]\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{y}},\\
d\left(u^{1-2p}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{x}}\right) - u^{1-2p}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{y}}\,\omega_1^2 + u^{1-2p}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{x}}\,\omega_2^2
&= +u^{1-2p}\left[(1-2p)\frac{du}{u} + \frac{2p-1}{3p-1}(\omega_1^1 + \omega_2^2)\right]\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{x}}.
\end{aligned}
$$

En simplifiant, il vient

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} d\dfrac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial \dot{x}} + \dfrac{(1-2p)\omega_1^1 + p\omega_2^2}{3p-1}\dfrac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial \dot{x}} - \omega_1^2 \dfrac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial \dot{y}} = 0, \\ d\dfrac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial \dot{y}} - \omega_2^1 \dfrac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial \dot{x}} + \dfrac{p\omega_1^1 + (1-2p)\omega_2^2}{3p-1}\dfrac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial \dot{y}} = 0. \end{cases}$$

16. La *torsion* de l'espace est définie par le vecteur

$$\Pi_1 \vec{e}_1 + \Pi_2 \vec{e}_2 = \Pi_1 \vec{e}_1;$$

ce vecteur est porté sur l'*élément d'appui* $(\dot{x}, \dot{y})$. Par rapport au repère naturel ce vecteur a pour composantes $[dx\omega_1^1] + [dy\omega_2^1]$ et $[dx\omega_1^2] + [dy\omega_2^2]$. On a donc

$$\frac{[dx\omega_1^1] + [dy\omega_2^1]}{\dot{x}} = \frac{[dx\omega_1^2] + [dy\omega_2^2]}{\dot{y}}.$$

On en déduit en particulier

$$\frac{C_1^1}{\dot{x}} = \frac{C_1^2}{\dot{y}}, \qquad \frac{C_2^1}{\dot{x}} = \frac{C_2^2}{\dot{y}}.$$

D'autre part la forme Π_1 est égale à $h[\varpi_2\,\varpi_3]$; elle s'annule donc quand on fait $\dfrac{dx}{\dot{x}} = \dfrac{dy}{\dot{y}}$, d'où $\dot{x}C_1^1 + \dot{y}C_2^1 = \dot{x}C_1^2 + \dot{y}C_2^2 = 0$. On a par suite

$$\frac{C_1^1}{-\dot{x}\dot{y}} = \frac{C_1^2}{-\dot{y}^2} = \frac{C_2^1}{\dot{x}^2} = \frac{C_2^2}{\dot{x}\dot{y}} = \lambda.$$

Pour avoir la valeur de λ, tenons compte des équations (I) en remarquant que la fonction $\overline{\mathrm{H}}$ étant homogène et du premier degré en $\dot{x}, \dot{y}$, on peut poser

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \overline{\mathrm{H}}}{\partial \dot{x}^2}}{\dot{y}^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 \overline{\mathrm{H}}}{\partial \dot{x}\,\partial \dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}} = \frac{\dfrac{\partial^2 \overline{\mathrm{H}}}{\partial \dot{y}^2}}{\dot{x}^2} = \overline{\mathrm{K}}.$$

On en déduit

$$\text{(II)}\qquad \frac{C_1^1}{-\dot{x}\dot{y}} = \frac{C_1^2}{-\dot{y}^2} = \frac{C_2^1}{\dot{x}^2} = \frac{C_2^2}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{\overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{H}}}.$$

On aurait pu retrouver le même résultat en exprimant que la différentielle covariante d'un vecteur de composantes contrevariantes fixes, lorsque son origine reste fixe et que son élément d'appui tourne infiniment peu autour de cette origine, est parallèle à l'élément d'appui et s'annule quand le vecteur a la même direction que son élément d'appui.

17. La condition pour que l'élément d'appui se déplace parallèlement à lui-même est

$$\dot{x}(d\dot{y} + \dot{x}\omega_1^2 + \dot{y}\omega_2^2) - \dot{y}(d\dot{x} + \dot{x}\omega_1^1 + \dot{y}\omega_2^1) = 0;$$

en vertu des valeurs (II) des C_i^j, cette condition est de la forme

$$\dot{x}\,d\dot{y} - \dot{y}\,d\dot{x} + L\,dx + M\,dy = 0, \tag{26}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} L &= \dot{x}^2\Gamma_{11}^2 + \dot{x}\dot{y}(\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1) - \dot{y}^2\Gamma_{21}^1, \\ M &= \dot{x}^2\Gamma_{12}^2 + \dot{x}\dot{y}(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - \dot{y}^2\Gamma_{22}^1. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

D'autre part cette condition exprime que $D\vec{e}_1$ est proportionnel à $\vec{e}_1$, ce qui donne, d'après (21), $\varpi_3 = 0$. Cette équation $\varpi_3 = 0$ n'est donc autre que l'équation (26).

Cela posé, si l'on se déplace le long d'une courbe en prenant en chaque point l'élément $(\dot{x}, \dot{y})$ tangent à la courbe, l'équation $\varpi_3 = 0$ se réduit, d'après (14), à $y'' + G = 0$, c'est-à-dire

$$\dot{x}\,d\dot{y} - \dot{y}\,d\dot{x} + \overline{G}(x, y;\, \dot{x}, \dot{y}) = 0.$$

On a donc, en vertu de l'équation (26),

$$L\dot{x} + M\dot{y} = \overline{G}, \tag{28}$$

ou encore, d'après (27),

$$\dot{x}^3\Gamma_{11}^2 + \dot{x}^2\dot{y}(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1) + \dot{x}\dot{y}^2(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^1) - \dot{y}^3\Gamma_{22}^1 = \overline{G}. \tag{III}$$

18. Revenons à la torsion $\Pi_1\vec{e}_1$. Comme Π_1 s'annule avec ϖ_3, il en résulte que le vecteur de torsion associé à un parallélogramme infinitésimal construit sur deux côtés *le long desquels le vecteur d'appui se déplace parallèlement à lui-même*, est nul. Si l'on pose

$$\omega_i^j = C_i^j(\dot{x}\,d\dot{y} - \dot{y}\,d\dot{x} + L\,dx + M\,dy) + \Gamma_{i1}^{j*}\,dx + \Gamma_{i2}^{j*}\,dy,$$

cela signifie que les coefficients Γ_{ik}^{j*} sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs. On a donc

$$\Gamma_{12}^i - \Gamma_{21}^i = \mathrm{M}C_1^i - \mathrm{L}C_2^i,$$

d'où, en tenant compte de (II) et (28),

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^1 = -\dfrac{\overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{H}}}\,\overline{\mathrm{G}}\dot{x}, \\ \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2 = -\dfrac{\overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{H}}}\,\overline{\mathrm{G}}\dot{y}. \end{cases}$$

19. — La détermination des coefficients Γ_{ij}^k peut s'achever par les considérations suivantes. Considérons un champ de vecteurs donnés, en chaque point, par leurs composantes contrevariantes X, Y, et déplaçons l'origine du point (x, y) au point infiniment voisin $(x + dx, y + dy)$. La différentielle covariante des vecteurs, si l'on suppose que l'élément d'appui $(\dot{x}, \dot{y})$ choisi au point (x, y) se déplace parallèlement à lui-même, a pour composantes

$$\begin{aligned} \mathrm{DX} &= d\mathrm{X} + \mathrm{X}(\Gamma_{11}^{1*}\,dx + \Gamma_{12}^{1*}\,dy) + \mathrm{Y}(\Gamma_{21}^{1*}\,dx + \Gamma_{22}^{1*}\,dy), \\ \mathrm{DY} &= d\mathrm{Y} + \mathrm{X}(\Gamma_{11}^{2*}\,dx + \Gamma_{12}^{2*}\,dy) + \mathrm{Y}(\Gamma_{21}^{2*}\,dx + \Gamma_{22}^{2*}\,dy). \end{aligned}$$

Changeons infiniment peu l'élément d'appui initial $(\dot{x}, \dot{y})$ en $(\dot{x} + \delta\dot{x}, \dot{y} + \delta\dot{y})$. Posons

$$\delta\Gamma_{ij}^{k*} = \gamma_{ij}^k(\dot{x}\,\delta\dot{y} - \dot{y}\,\delta\dot{x});$$

on aura

$$\begin{aligned} \delta\,\mathrm{DX} &= [\mathrm{X}(\gamma_{11}^1\,dx + \gamma_{12}^1\,dy) + \mathrm{Y}(\gamma_{21}^1\,dx + \gamma_{22}^1\,dy)]\,(\dot{x}\,\delta\dot{y} - \dot{y}\,\delta\dot{x}), \\ \delta\,\mathrm{DY} &= [\mathrm{X}(\gamma_{11}^2\,dx + \gamma_{12}^2\,dy) + \mathrm{Y}(\gamma_{21}^2\,dx + \gamma_{22}^2\,dy)]\,(\dot{x}\,\delta\dot{y} - \dot{y}\,\delta\dot{x}). \end{aligned}$$

On obtient ainsi la variation élémentaire du vecteur (X, Y) dans le déplacement associé à un parallélogramme infinitésimal construit, dans la variété à trois dimensions des éléments linéaires, sur les deux côtés

$$\begin{matrix} dx, & dy, & d\dot{x}, & d\dot{y} & \quad (\text{avec } \dot{x}\,d\dot{y} - \dot{y}\,d\dot{x} + \mathrm{L}\,dx + \mathrm{M}\,dy = 0), \\ 0, & 0, & \delta\dot{x}, & \delta\dot{y}. & \end{matrix}$$

Cette variation est d'autre part définie par les deux formes Π_3 et Π_4, d'après les formules (¹)

$$\delta\,\mathrm{D}\vec{e}_1 = p\,\Pi_4\,\vec{e}_1 + \Pi_3\,\vec{e}_2,$$
$$\delta\,\mathrm{D}\vec{e}_2 = (2p-1)\,\Pi_4\,\vec{e}_2.$$

Ici on a

$$\varpi_3(d) = 0, \qquad \varpi_1(\delta) = \varpi_2(\delta) = 0,$$

d'où en particulier

$$\Pi_3 = m\,\varpi_2(d)\,\varpi_3(\delta).$$

Si donc on assujettit dx et dy à la relation $\varpi_2(d) = 0$, c'est-à-dire si l'on prend $\frac{dx}{\dot{x}} = \frac{dy}{\dot{y}}$, le vecteur $\vec{e}_1$ restera parallèle à lui-même et l'on aura pour ce vecteur

$$\mathrm{X}\,\delta\,\mathrm{DY} - \mathrm{Y}\,\delta\,\mathrm{DX} = 0.$$

Comme les composantes X, Y de $\vec{e}_2$ sont proportionnelles à $\dot{x}, \dot{y}$, ainsi que dx et dy, il en résulte la relation

$$(29)\qquad \dot{x}^3\gamma_{11}^2 + \dot{x}^2\dot{y}(\gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 - \gamma_{11}^1) + \dot{x}\dot{y}^2(\gamma_{22}^2 - \gamma_{12}^1 - \gamma_{21}^1) - \dot{y}^3\gamma_{22}^1 = 0.$$

Or la relation (III), comme on le voit facilement, ainsi du reste que les relations (27), reste valable si l'on remplace les Γ_{ij}^k par les Γ_{ij}^{k*}. Cette nouvelle relation (III), différentiée par rapport à $\dot{x}, \dot{y}$, donne, en tenant compte de (29),

$$(30)\qquad \begin{cases} 3\dot{x}^2\Gamma_{11}^{2*} + 2\dot{x}\dot{y}(\Gamma_{12}^{2*} + \Gamma_{21}^{2*} - \Gamma_{11}^{1*}) + \dot{y}^2(\Gamma_{22}^{2*} - \Gamma_{12}^{1*} - \Gamma_{21}^{1*}) = \dfrac{\partial\overline{\mathrm{G}}}{\partial\dot{x}}, \\ \dot{x}^2(\Gamma_{12}^{2*} + \Gamma_{21}^{2*} - \Gamma_{11}^{1*}) + 2\dot{x}\dot{y}(\Gamma_{22}^{2*} - \Gamma_{12}^{1*} - \Gamma_{21}^{1*}) - 3\dot{y}^2\Gamma_{22}^{1*} = \dfrac{\partial\overline{\mathrm{G}}}{\partial\dot{y}}. \end{cases}$$

Ces formules sont encore valables si l'on remplace les Γ_{ij}^{k*} par les Γ_{ij}^k. On a donc finalement les deux relations

$$(\mathrm{V})\qquad \begin{cases} 3\dot{x}^2\Gamma_{11}^{2} + 2\dot{x}\dot{y}(\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{21}^{2} - \Gamma_{11}^{1}) + \dot{y}^2(\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{1} - \Gamma_{21}^{1}) = \dfrac{\partial\overline{\mathrm{G}}}{\partial\dot{x}}, \\ \dot{x}^2(\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{21}^{2} - \Gamma_{11}^{1}) + 2\dot{x}\dot{y}(\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{1} - \Gamma_{21}^{1}) - 3\dot{y}^2\Gamma_{22}^{1} = \dfrac{\partial\overline{\mathrm{G}}}{\partial\dot{y}}. \end{cases}$$

(¹) Rappelons que les formules (21), où l'on remplace les formes ϖ_i par les formes Π_i correspondantes, définissent le déplacement associé à un cycle infinitésimal.

Ces deux équations entraînent du reste l'équation (III).

20. Conclusion. — *Les composantes* C_i^j *de la connexion affine sont données par les relations* (II), *les composantes* Γ_{ij}^k *par les relations* (IV), (V) *et* (I′) :

$$(\mathrm{I}')\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial\dot{x}\,\partial x}+\frac{(1-2p)\Gamma_{11}^1+p\Gamma_{21}^2}{3p-1}\frac{\partial\overline{H}}{\partial\dot{x}}-\Gamma_{11}^2\frac{\partial\overline{H}}{\partial\dot{y}}=0,\\
&\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial\dot{x}\,\partial y}+\frac{(1-2p)\Gamma_{12}^1+p\Gamma_{22}^2}{3p-1}\frac{\partial\overline{H}}{\partial\dot{x}}-\Gamma_{12}^2\frac{\partial\overline{H}}{\partial\dot{y}}=0,\\
&\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial\dot{y}\,\partial x}-\Gamma_{21}^1\frac{\partial\overline{H}}{\partial\dot{x}}+\frac{p\Gamma_{11}^1+(1-2p)\Gamma_{21}^2}{3p-1}\frac{\partial\overline{H}}{\partial\dot{y}}=0,\\
&\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial\dot{y}\,\partial y}-\Gamma_{22}^1\frac{\partial\overline{H}}{\partial\dot{x}}+\frac{p\Gamma_{12}^1+(1-2p)\Gamma_{22}^2}{3p-1}\frac{\partial\overline{H}}{\partial\dot{y}}=0.
\end{aligned}\right.$$

Enfin la condition de transport parallèle de l'élément linéaire $(\dot{x}, \dot{y})$ *est donnée par* (26), *avec les valeurs* (27) *de* L *et* M.

On peut vérifier que le déterminant des coefficients des inconnues Γ_{ij}^k dans les huit équations (IV), (V), (I′) est différent de zéro si $p \neq 0, 1, 2/3$.

21. Un cas particulier simple est celui où la fonction $\overline{H}$ est indépendante de x et de y et où la fonction $\overline{G}$ est nulle. Les coefficients Γ_{ij}^k sont alors tous nuls. Ce cas se présente pour l'intégrale $\int\frac{ds}{\rho^p}$, dans laquelle ds est l'élément d'arc ordinaire d'une courbe, $\frac{1}{\rho}$ sa courbure; on a alors, en coordonnées rectangulaires,

$$\overline{H}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}.$$

Le vecteur $\vec{e}_2$ intrinsèquement attaché à l'élément $(\dot{x}, \dot{y})$ est perpendiculaire à cet élément, au sens ordinaire du mot.

22. On aura un espace *ponctuel* à connexion affine si les C_i^j sont nuls, ce qui signifie que la fonction $\overline{H}$ est linéaire en $\dot{x}, \dot{y}$, et si les Γ_{ij}^k sont des fonctions des seules variables x, y. Les équations (I′) et (IV) ont d'elles-mêmes pour coefficients des fonctions de (x, y), mais il n'en est pas de même des équations (V), qui doivent rester exactes quand on les différentie deux fois par rapport aux variables $\dot{x}, \dot{y}$. La fonction $\overline{G}$ doit être alors un polynome entier du troisième degré en $\dot{x}, \dot{y}$; de plus les formules (V) différentiées donnent quatre équations, c'est-à-dire deux de trop, pour les Γ^k_{ij}. Il y a donc des conditions supplémentaires de compatibilité. Si l'on revient aux formules (B), les conditions pour que l'espace soit ponctuel sont $h = m = q = r = 0$; elles se réduisent à trois, parce que l'équation $h = 0$ entraîne d'elle-même $r = 0$.

IV. — La géométrie de l'intégrale $\int \sqrt[3]{g(y'' + G)}\, dx$.

23. On pourrait essayer d'appliquer à l'intégrale donnée la même méthode que dans le paragraphe précédent. Le cas où l'exposant p serait égal à $\frac{2}{3}$ se ramène du reste au cas $p = \frac{1}{3}$ par la transformation de contact de Legendre; nous le laisserons de côté.

Nous allons pour abréger employer ici une méthode axiomatique, fondée du reste sur les calculs auxquels conduirait la première méthode. En employant tout de suite une notation homogène, nous partirons de l'élément différentiel

$$(31) \qquad d\sigma = \sqrt[3]{\overline{g}(x, y; dx, dy)\left[dx\, d^2y - dy\, d^2x + \overline{G}(x, y; dx, dy)\right]},$$

$\overline{g}$ étant homogène de degré zéro et $\overline{G}$ homogène de degré trois en dx, dy.

Nous partirons de la remarque que $y''^{\frac{1}{3}} dx = \sqrt[3]{dx d^2y - dy d^2x}$ représente l'élément d'arc naturel en géométrie affine unimodulaire, x et y étant des coordonnées cartésiennes. Nous allons par des axiomes de nature intrinsèque, attacher à l'élément (31) un espace d'éléments linéaires à connexion affine unimodulaire, c'est-à-dire admettant une mesure absolue de l'aire du parallélogramme construit sur deux vecteurs ayant même élément d'appui.

24. Voici quels sont les axiomes d'où nous partirons :

Axiome A. — *Un vecteur de composantes contrevariantes données* *conserve sa direction quand on fait tourner infiniment peu son élément d'appui autour de son origine laissée fixe.*

Cela veut dire que la différentielle covariante du vecteur (X, Y) donné, dans les conditions indiquées, a ses composantes proportionnelles à X, Y. Or cette différentielle a pour composantes

$$(XC_1^1 + YC_2^1)(\dot{x}\,d\dot{y} - \dot{y}\,d\dot{x}),$$
$$(XC_1^2 + YC_2^2)(\dot{x}\,d\dot{y} - \dot{y}\,d\dot{x}).$$

On a donc

$$\text{(I)} \qquad C_1^1 = C_2^2, \qquad C_1^2 = 0, \qquad C_2^1 = 0.$$

AXIOME B. — *L'élément d'arc naturel d'une courbe, considérée comme le lieu de ses éléments linéaires tangents, est l'expression donnée*

$$d\sigma = \sqrt[3]{\bar{g}(x, y;\, dx, dy)\left[dx\,d^2y - dy\,d^2x + \overline{G}(x, y;\, dx, dy)\right]}.$$

Or l'élément d'arc naturel, en géométrie affine unimodulaire, est l'aire du parallélogramme construit sur le vecteur (dx, dy) et sur la différentielle covariante de ce vecteur, dont les composantes sont

$$d^2x + dx\,\omega_1^1 + dy\,\omega_2^1,$$
$$d^2y + dx\,\omega_1^2 + dy\,\omega_2^2.$$

Le déterminant formé avec ces quatre composantes est

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x + dx^2\omega_1^2 + dx\,dy(\omega_2^2 - \omega_1^1) - dy^2\omega_2^1$$

et, d'après (I), ω_1^2, $\omega_2^2 - \omega_1^1$ et ω_2^1 ne dépendent que de dx et dy.

De là, il résulte :

1° Que l'aire du parallélogramme construit sur deux vecteurs contrevariants (X, Y) et (X′, Y′) et admettant l'élément d'appui $(\dot{x}, \dot{y})$ est

$$\bar{g}(x, y;\, \dot{x}, \dot{y})(XY' - YX');$$

2° Que l'on a

$$dx^2\omega_1^2 + dx\,dy(\omega_2^2 - \omega_1^1) - dy^2\omega_2^1 = \overline{G}(x, y;\, dx, dy).$$

La première condition entraîne

$$\frac{d\bar{g}}{\bar{g}} = \omega_1^1 + \omega_2^2;$$

d'où, d'après (I), en posant $\frac{\partial \bar{g}}{\partial \dot{x}} = -\gamma \dot{y}$, $\frac{\partial \bar{g}}{\partial \dot{y}} = \gamma \dot{x}$, on tire

$$\text{(I}'\text{)} \qquad C_1^1 = C_2^2 = \frac{\gamma}{2\bar{g}}, \qquad C_1^2 = C_2^1 = 0$$

et

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial \log \bar{g}}{\partial x} = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2, \qquad \frac{\partial \log \bar{g}}{\partial y} = \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2.$$

La deuxième condition entraîne

$$\text{(III)} \quad \dot{x}^3\Gamma_{11}^2 + \dot{x}^2\dot{y}(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1) + \dot{x}\dot{y}^2(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^1) - \dot{y}^3\Gamma_{22}^1 = \bar{G}.$$

Axiome C. — *La torsion attachée à un parallélogramme infinitésimal construit sur deux côtés le long desquels l'élément d'appui reste parallèle à lui-même est nulle.*

L'élément d'appui $(\dot{x}, \dot{y})$ reste parallèle à lui-même si l'on a

$$\dot{x}(d\dot{y} + \dot{x}\omega_1^2 + \dot{y}\omega_2^2) - \dot{y}(d\dot{x} + \dot{x}\omega_1^1 + \dot{y}\omega_2^1) = 0,$$

relation de la forme

$$\dot{x}\,d\dot{y} - \dot{y}\,d\dot{x} + L\,dx + M\,dy = 0$$

avec

$$L = \dot{x}^2\Gamma_{11}^2 + \dot{x}\dot{y}(\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1) - \dot{y}^2\Gamma_{21}^1,$$
$$M = \dot{x}^2\Gamma_{12}^2 + \dot{x}\dot{y}(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - \dot{y}^2\Gamma_{22}^1.$$

Si la relation précédente est vérifiée, on a

$$\omega_i^j = \Gamma_{i1}^j dx + \Gamma_{i2}^j dy - C_i^j(L\,dx + M\,dy);$$

nous poserons

$$\Gamma_{i1}^{j*} = \Gamma_{i1}^j - C_i^j L,$$
$$\Gamma_{i2}^{j*} = \Gamma_{i2}^j - C_i^j M.$$

L'axiome énoncé revient à affirmer la symétrie des coefficients Γ_{ij}^{*k} par rapport aux deux indices inférieurs

$$\text{(IV)} \qquad \Gamma_{ij}^{*k} - \Gamma_{ji}^{k*} = 0.$$

On remarquera que la relation (III) *reste vraie si l'on remplace les* Γ_{ij}^k *par* Γ_{ij}^{k*}.

Axiome D. *La différentielle covariante d'un vecteur de composantes* *contrevariantes données, lorsque son origine (x, y) subit un déplacement infiniment petit (dx, dy) et que l'élément d'appui se déplace parallèlement à lui-même, reste constante si l'on fait tourner infiniment peu l'élément d'appui, le déplacement (dx, dy) se faisant dans la direction de cet élément d'appui.*

Les composantes de la différentielle covariante considérée sont

$$dX + X(\Gamma_{11}^{1*}\,dx + \Gamma_{12}^{1*}\,dy) + Y(\Gamma_{21}^{1*}\,dx + \Gamma_{22}^{1*}\,dy),$$
$$dY + X(\Gamma_{11}^{2*}\,dx + \Gamma_{12}^{2*}\,dy) + Y(\Gamma_{21}^{2*}\,dx + \Gamma_{22}^{2*}\,dy);$$

leurs variations infinitésimales lorsque $\dot{x}$ et $\dot{y}$ subissent les variations $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$, sont

$$[X(\gamma_{11}^{1}\,dx + \gamma_{12}^{1}\,dy) + Y(\gamma_{21}^{1}\,dx + \gamma_{22}^{1}\,dy)](\dot{x}\,\delta\dot{y} - \dot{y}\,\delta\dot{x}),$$
$$[X(\gamma_{11}^{2}\,dx + \gamma_{12}^{2}\,dy) + Y(\gamma_{21}^{2}\,dx + \gamma_{22}^{2}\,dy)](\dot{x}\,\delta\dot{y} - \dot{y}\,\delta\dot{x}),$$

où l'on a posé

$$\frac{\dfrac{\partial\Gamma_{ij}^{k*}}{\partial\dot{x}}}{-\dot{y}} = \frac{\dfrac{\partial\Gamma_{ij}^{k*}}{\partial\dot{y}}}{\dot{x}} = \gamma_{ij}^{k}$$

L'énoncé de l'axiome se traduit par les relations

$$\gamma_{11}^{1}\,\dot{x} + \gamma_{12}^{1}\,\dot{y} = 0, \qquad \gamma_{21}^{1}\,\dot{x} + \gamma_{22}^{1}\,\dot{y} = 0,$$
$$\gamma_{11}^{2}\,\dot{x} + \gamma_{12}^{2}\,\dot{y} = 0, \qquad \gamma_{21}^{2}\,\dot{x} + \gamma_{22}^{2}\,\dot{y} = 0.$$

En tenant compte de la symétrie des γ_{ij}^{k} par rapport aux indices inférieurs, on en déduit

$$\gamma_{11}^{1} = \alpha\,\dot{y}^2, \qquad \gamma_{12}^{1} = -\alpha\,\dot{x}\dot{y}, \qquad \gamma_{22}^{1} = \alpha\,\dot{x}^2,$$
$$\gamma_{11}^{2} = \beta\,\dot{y}^2, \qquad \gamma_{12}^{2} = -\beta\,\dot{x}\dot{y}, \qquad \gamma_{22}^{2} = \beta\,\dot{x}^2.$$

Axiome E. *La variation de la différentielle covariante d'un vecteur de composantes contrevariantes données dont l'origine subit un déplacement infiniment petit (dx, dy) et dont l'élément d'appui se déplace parallèlement à lui-même, est parallèle à l'élément d'appui lorsqu'on fait tourner infiniment peu cet élément d'appui.*

L'énoncé se traduit par les relations

$$\frac{\gamma_{ij}^{1}}{\dot{x}} = \frac{\gamma_{ij}^{2}}{\dot{y}}.$$

Combinées avec les précédentes elles donnent

$$\text{(V)}\quad \gamma^1_{22}=\rho\dot{x}^3,\qquad -\gamma^1_{12}=\gamma^2_{22}=\rho\dot{x}^2\dot{y},\qquad \gamma^1_{11}=-\gamma^2_{12}=\rho\dot{x}\dot{y}^2,\qquad \gamma^2_{11}=\rho\dot{y}^3.$$

Tirons les conséquences de ces deux derniers axiomes. On a, d'après (III) et (IV),

$$\overline{\mathrm{G}}=\dot{x}^3\Gamma^{2*}_{11}+\dot{x}^2\dot{y}(2\Gamma^{2*}_{12}-\Gamma^{1*}_{11})+\dot{x}\dot{y}^2(\Gamma^{2*}_{22}-2\Gamma^{1*}_{12})-\dot{y}^3\Gamma^{1*}_{22}.$$

Les relations (V) entraînent

$$\dot{x}^3\gamma^2_{11}+\dot{x}^2\dot{y}(2\gamma^2_{12}-\gamma^1_{11})+\dot{x}\dot{y}^2(\gamma^2_{22}-2\gamma^1_{12})-\dot{y}^3\gamma^1_{22}=0;$$

d'où

$$\frac{\partial\overline{\mathrm{G}}}{\partial\dot{x}}=3\dot{x}^2\Gamma^{2*}_{11}+2\dot{x}\dot{y}(2\Gamma^{2*}_{12}-\Gamma^{1*}_{11})+\dot{y}^2(\Gamma^{2*}_{22}-2\Gamma^{1*}_{12}),$$

$$\frac{\partial\overline{\mathrm{G}}}{\partial\dot{y}}=\dot{x}^2(2\Gamma^{2*}_{12}-\Gamma^{*}_{11})+2\dot{x}\dot{y}(\Gamma^{2*}_{22}-2\Gamma^{1*}_{12})-3\dot{y}^2\Gamma^{1*}_{22}.$$

Les relations (V) donnent de nouveau

$$3\dot{x}^2\gamma^2_{11}+2\dot{x}\dot{y}(2\gamma^2_{12}-\gamma^1_{11})+\dot{y}^2(\gamma^2_{22}-2\gamma^1_{12})=0,$$
$$\dot{x}^2(2\gamma^2_{12}-\gamma^1_{11})+2\dot{x}\dot{y}(\gamma^2_{22}-2\gamma^1_{12})-3\dot{y}^2\gamma^1_{22}=0;$$

d'où

$$\frac{\partial^2\mathrm{G}}{\partial\dot{x}^2}=6\dot{x}\Gamma^{2*}_{11}+2\dot{y}(2\Gamma^{2*}_{12}-\Gamma^{1*}_{11}),$$

$$\frac{\partial^2\mathrm{G}}{\partial\dot{x}\,\partial\dot{y}}=2\dot{x}(2\Gamma^{2*}_{12}-\Gamma^{1*}_{11})+2\dot{y}(\Gamma^{2*}_{22}-2\Gamma^{1*}_{12}),$$

$$\frac{\partial^2\mathrm{G}}{\partial\dot{y}^2}=2\dot{x}(\Gamma^{2*}_{22}-2\Gamma^{1*}_{12})-6\dot{y}\Gamma^{1*}_{22}.$$

Enfin les relations (V) donnent

$$6\dot{x}\gamma^2_{11}+2\dot{y}(2\gamma^2_{12}-\gamma^1_{11})=0,$$
$$2\dot{x}(2\gamma^2_{12}-\gamma^1_{11})+2\dot{y}(\gamma^2_{22}-2\gamma^1_{12})=0,$$
$$2\dot{x}(\gamma^2_{22}-2\gamma^1_{12})-6\dot{y}\gamma^1_{22}=0;$$

d'où

$$\text{(VI)}\qquad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^3\mathrm{G}}{\partial\dot{x}^3}&=6\Gamma^{2*}_{11},\\
\frac{\partial^3\mathrm{G}}{\partial\dot{x}^2\,\partial\dot{y}}&=4\Gamma^{2*}_{12}-2\Gamma^{1*}_{11},\\
\frac{\partial^3\mathrm{G}}{\partial\dot{x}\,\partial\dot{y}^2}&=2\Gamma^{2*}_{22}-4\Gamma^{1*}_{12},\\
\frac{\partial^3\mathrm{G}}{\partial\dot{y}^3}&=-6\Gamma^{1*}_{22}.
\end{aligned}\right.$$

Réciproquement ces quatre équations entraînent (III) et (V).

On vérifie facilement qu'elles peuvent encore s'écrire

$$(\mathrm{VI}')\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^3 G}{\partial \dot{x}^3} = 6\Gamma^2_{11},\\[2mm] \dfrac{\partial^3 G}{\partial \dot{x}^2\,\partial \dot{y}} = 2(\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{11}),\\[2mm] \dfrac{\partial^3 G}{\partial \dot{x}\,\partial \dot{y}^2} = 2(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12}-\Gamma^1_{21}),\\[2mm] \dfrac{\partial^3 G}{\partial \dot{y}^3} = -6\Gamma^1_{22}.\end{cases}$$

CONCLUSION. — *Les axiomes* A, B, C, D, E *déterminent d'une manière univoque la connexion affine de l'espace. Les coefficients* C^j_i *sont donnés par les équations* (I'). *Les coefficients* Γ^k_{ij} *sont donnés par les deux équations* (II), *les quatre équations* (VI') *et les deux équations*

$$(\mathrm{IV}')\quad\begin{cases}\Gamma^1_{12}-\Gamma^1_{21} = \dfrac{\Upsilon}{2\bar{g}}[\dot{x}^2\Gamma^2_{12}+\dot{x}\dot{y}(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12})-\dot{y}^2\Gamma^1_{22}],\\[2mm] \Gamma^2_{12}-\Gamma^2_{21} = -\dfrac{\Upsilon}{2\bar{g}}[\dot{x}^2\Gamma^2_{11}+\dot{x}\dot{y}(\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{11})-\dot{y}^2\Gamma^1_{21}];\end{cases}$$

ces huit équations sont toujours compatibles.

La condition de transport parallèle de l'élément linéaire $(x, y;\ \dot{x}, \dot{y})$ *est*

$$\dot{x}\,d\dot{y}-\dot{y}\,d\dot{x}+L\,dx+M\,dy=0$$

avec

$$L = \dot{x}^2\Gamma^2_{11}+\dot{x}\dot{y}(\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{11})-\dot{y}^2\Gamma^1_{21},$$
$$M = \dot{x}^2\Gamma^2_{12}+\dot{x}\dot{y}(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12})-\dot{y}^2\Gamma^1_{22}.$$

Si $\bar{g}$ ne dépend que de x, y, les coefficients Γ^k_{ij} sont symétriques par rapport aux indices inférieurs, les C^j_i sont tous nuls; de plus on a $L=\frac{1}{3}\frac{\partial G}{\partial \dot{y}}$, $M=\frac{1}{3}\frac{\partial G}{\partial \dot{y}}$. L'espace est *ponctuel* si en outre $\overline{G}$ est un polynome homogène du troisième degré en $\dot{x}$, $\dot{y}$.

On pourrait indiquer sans difficulté la *courbure affine k* d'une courbe dans la géométrie obtenue. Il suffirait d'utiliser les formules de Frenet

$$\frac{dM}{d\sigma}=\vec{T},\qquad \frac{d\vec{T}}{d\sigma}=\vec{N},\qquad \frac{d\vec{N}}{d\sigma}=k\vec{T}.$$