JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES VALIRON

Sur les singularités de certaines fonctions holomorphes et de leurs inverses

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 423-435.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__423_0>

Sur les singularités de certaines fonctions holomorphes et de leurs inverses;

PAR GEORGES VALIRON.

1. Dans son Mémoire *Sur les équations fonctionnelles*, P. Fatou a étudié d'une façon approfondie la fonction de Kœnigs des substitutions à cercle fondamental invariant, $|z| < 1$, et a montré que, dans le cas des substitutions de première espèce ayant un point double de multiplicateur non nul au centre du cercle, cette fonction $K(z)$, holomorphe dans ce cercle, est d'ordre fini (au sens d'Hadamard) sur la circonférence, et tend vers l'infini lorsque $|z|$ tend vers 1 à l'extérieur de petites régions entourant les zéros (¹). D'une façon précise, si grand que soit A, les points en lesquels $|K(z)| > A$ forment un domaine de connexion infinie $\Delta(A)$ que l'on obtient en supprimant d'un domaine de forme coronale limité par $|z| < 1$ et par une courbe intérieure des domaines en nombre infini limités par des courbes sans points communs avec $|z| = 1$, la somme des longueurs de ces courbes tendant vers zéro avec $\frac{1}{A}\cdot$ $\Delta(A)$ contient, en outre, des lignes fermées Γ de longueur bornée entourant l'origine, sur lesquelles $|z| > \alpha$, si proche que α soit de 1. La dérivée de $K(z)$ jouit de propriétés analogues et, tout au moins dans certains cas, $|K(z)| + |K'(z)|$ tend vers l'infini lorsque $|z|$ tend vers 1 (²), ce qui établit directement que $w = \infty$ qui est le seul point critique transcendant de la surface de Riemann décrite par

(¹) *Bull. Soc. math.*, 58, 1920, p. 262-273.

(²) *Voir* les pages 63-64 du Mémoire de H. CARTAN, *Bull. Sciences math.*, 55, 1931.

$w = K(z)$ est aussi le seul point limite des points critiques algébriques.

Des exemples de cas analogues sont fournis par les fonctions construites par Lusin et Priwalof ([1]), fonctions qui jouissent des propriétés énumérées pour $K(z)$ (avec la circonstance que parmi les courbes Γ figurent des cercles de centre origine, alors qu'on ne sait pas s'il en est ainsi pour les fonctions considérées par Fatou) mais pour lesquelles l'étude de la dérivée n'est pas faite.

D'une façon générale, supposons que $w = F(z)$ soit holomorphe et non bornée pour $|z| < 1$ et que, si grand que soit A, les points où $|w| > A$ forment un seul domaine $\Delta(A)$ obtenu en enlevant d'un domaine de forme coronale dont $|z| = 1$ est l'une des deux courbes frontières une infinité de régions fermées toutes intérieures à $|z| < 1$. Alors $w = \infty$ est le seul point critique transcendant de la fonction inverse $z = \varphi(w)$ de $F(z)$ et c'est un point limite de points critiques algébriques. Car, en faisant croître A, on voit qu'il existe des A pour lesquels la frontière extérieure de $\Delta(A)$ (autre que $|z| = 1$) a un point commun avec une région enlevée; les valeurs correspondantes de w fournissent des points critiques algébriques de $\varphi(w)$ tendant vers l'infini.

La surface de Riemann, du type hyperbolique, décrite par w est donc à rapprocher des surfaces du type parabolique décrites par $w = F(z)$ lorsque $F(z)$ est une fonction entière dont le module tend vers l'infini quand $|z|$ tend vers l'infini sur une suite de courbes entourant l'origine (fonctions d'ordre inférieur à 0,5 et autres).

Une surface de Riemann simplement connexe qui ne possède qu'une seule singularité transcendante peut être du type hyperbolique, même si cette singularité est isolée.

Considérons une telle surface et supposons, ce qui est loisible, la singularité transcendante à l'infini. Si $w = F(z)$ est la fonction inverse d'une fonction $z = \varphi(w)$ représentant conformément cette surface sur $|z| < 1$, le domaine défini par $|w| > A$ doit être simplement connexe dès que A est assez grand et doit admettre tous les points de la circonférence $|z| = 1$ pour points limites de ses points.

([1]) *Annales École Norm.*, 3e série, 42, 1925.

Les domaines les plus simples jouissant de cette propriété semblent être ceux qui s'enroulent autour de la circonférence $|z| = 1$. On est ainsi amené à étudier les fonctions holomorphes et non bornées pour $|z| < 1$ qui restent bornées sur des courbes spiraliques asymptotes à $|z| = 1$.

2. J'ai déjà indiqué (¹) comment on peut construire des fonctions de l'espèce cherchée. En modifiant légèrement ce procédé on peut opérer comme suit. Soit

$$F(\xi) = \sum_0^\infty a_n \xi^n$$

une fonction entière, à coefficients positifs, de $\xi = \sigma + i\tau$. Pour chaque σ positif, nous appelons $n(\sigma)$ la valeur minimum de n pour laquelle $a_n \sigma^n$ est maximum. Nous supposons que $n(\sigma)$ est assez régulière pour que tous les σ assez grands soient des valeurs ordinaires (²). Alors les sauts de $n(\sigma)$ sont égaux à 1 pour σ assez grand. On sait que

$$\log F(\sigma) \sim V(\sigma) = \int_0^\sigma n(x) \frac{dx}{x},$$

$$F(\xi) \sim \left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^{n(\sigma)} F(\sigma) \quad \text{si} \quad |\xi - \sigma| < h \frac{\sigma}{n(\sigma)}, \tag{1}$$

h étant donné arbitrairement grand (*loc. cit.*, **29**, p. 101).

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\sigma + i\tau) \sim e^{i\omega} F(\sigma) \\ |F'(\sigma + i\tau)| \sim \dfrac{n(\sigma)}{\sigma} F(\sigma) \end{array} \right. \quad \text{si} \quad \omega = \tau \frac{n(\sigma)}{\sigma} < [n(\sigma)]^{\frac{1}{16}}. \tag{2}$$

Nous supposerons encore que, à partir d'une valeur de σ, $\dfrac{n(\sigma)}{\sigma}$ croît;

$$V(\sigma) > [n(\sigma)]^\alpha, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

$$\lim_{\sigma = \infty} \frac{n(\sigma)}{n(\sigma + 2\pi)} = 0. \tag{4}$$

La condition (4) impose à $F(\sigma)$ une croissance assez rapide, les autres sont alors toutes des conditions de régularité vérifiées lorsque $n(\sigma)$ est une fonction simple.

(¹) *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 2065-2067.

(²) Voir *Lectures on the general theory of integral functions*, Chap. IV.

Si $N(\sigma)$ désigne la fonction linéaire en σ entre deux valeurs σ', σ'' consécutives de σ pour lesquelles $n(\sigma)$ est discontinue, et égale à $n(\sigma)$ pour σ' et σ'', $\frac{N(\sigma)}{\sigma}$ est encore croissant pour σ assez grand. En vertu de (2), ε étant donné positif et arbitrairement petit et p étant entier positif ou nul, le module de

$$\Phi(\xi) = e^{F(\xi)}$$

est supérieur à $e^{kF(\sigma)}$, $k = k(\varepsilon) > 0$, lorsque ξ s'éloigne indéfiniment dans les domaines

$$(5) \qquad \left(\frac{3\pi}{2} + 2p\pi + \varepsilon\right)\sigma < N(\sigma)\tau < \sigma\left(\frac{5\pi}{2} + 2p\pi - \varepsilon\right),$$

et tend vers zéro plus rapidement que $e^{-kF(\sigma)}$ lorsque ξ s'éloigne dans

$$(6) \qquad \left(\frac{\pi}{2} + 2p\pi + \varepsilon\right)\sigma < N(\sigma)\tau < \sigma\left(\frac{3\pi}{2} + 2p\pi - \varepsilon\right).$$

Considérons le domaine D défini par

$$\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)\sigma < N(\sigma)\tau < \sigma\left(\frac{3\pi}{2} + 2q\pi - \varepsilon\right), \qquad \sigma > \sigma_0,$$

où q est un entier positif et σ_0 donné assez grand. Eu égard à la condition (4), la transformation

$$(7) \qquad z = e^{i\xi}, \qquad \xi = \sigma + i\tau$$

fait correspondre biunivoquement à D un domaine spiralique Δ contenu dans $|z| < 1$ et asymptote à la circonférence. La fonction $\Psi(z) = \Phi(\xi)$ est holomorphe dans Δ. Au contour $\gamma(c, d)$ du plan ξ défini par

$$\left.\begin{array}{ll} c\sigma = \tau N(\sigma), & \sigma \geqq d \\ {[2(q+1)\pi - c]\sigma = \tau N(\sigma)}, & \sigma \geqq d \\ c\sigma \leqq \tau N(\sigma) \leqq [2(q+1)\pi - c]\sigma, & \sigma = d \end{array}\right\} \frac{\pi}{2} + \varepsilon < c < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon,$$

correspond un contour $\Gamma(c, d)$ du plan des z intérieur à Δ. Étant donnée la rapidité de la décroissance de $\Phi(\xi)$, conséquence de (3) et (4), lorsque ξ s'éloigne indéfiniment sur $\gamma(c, d)$, l'intégrale

$$(8) \qquad \int_{(c, \gamma d)} |\Phi(\xi)|\,[n(\sigma)]^2\,|d\xi|$$

existe. Comme $\frac{dz}{d\xi}$ tend vers 1 lorsqu'on s'éloigne dans D, on voit que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(c,d)}\frac{\Psi(u)}{u-z}du$$

prise dans le sens direct par rapport à l'extérieur de $\Gamma(c, d)$ définit une fonction $f(z)$ holomorphe pour $|z|<1$ et z extérieur à $\Gamma(c, d)$ et une fonction $f_1(z)$ holomorphe pour z intérieur à $\Gamma(c, d)$. D'après la convergence de (8), $f(z)$ et $f_1(z)$ restent inférieurs à un nombre $M(\varepsilon)$ lorsque $|z|$ tend vers 1 en restant à l'extérieur des deux bandes balayées par $\Gamma(c', d)$ lorsque d étant fixe, c' varie entre $c-\varepsilon$ et $c+\varepsilon$. On peut prolonger $f(z)$ pour tout z de module inférieur à 1 en faisant croître d. $f(z)$ étant ainsi défini, si z est intérieur au domaine primitif $\Gamma(c, d)$, on a

$$f(z)=f_1(z)+\Psi(z).$$

Comme enfin $f(z)$ ne change pas si c varie entre les limites fixées, le comportement de cette fonction est connu, à une fonction bornée près, lorsque $|z|$ tend vers 1. $|f(z)-\Psi(z)|$ est borné dans Δ, $|f(z)|$ est borné partout ailleurs. Dans Δ l'étude de $f(z)$ est ramenée à celle de $f(e^{i\xi})$ qui ne diffère de $\Phi(\xi)$ que par une fonction restant bornée. Donc, dans les q domaines spiraliques correspondant à (5), $f(z)$ tend vers l'infini lorsque $|z|$ tend vers 1. D'autre part, en supposant h assez grand, (1) montre que le domaine riemannien décrit par $Z=F(\xi)$ lorsque ξ décrit la portion de D appartenant à $|\xi-\sigma|<\frac{h\sigma}{N(\sigma)}$ est une *couronne* tournant q fois autour de l'origine (c'est là l'origine du théorème de Bloch). Il s'ensuit que, si L est un chemin de détermination infinie de $f(z)$ compris entre deux domaines consécutifs Δ_1, Δ_2 correspondant respectivement à (5) et (6), et si L' est un chemin de détermination infinie appartenant à Δ_1, $|f(z)|$ tend encore vers l'infini lorsque $|z|$ tend vers 1 dans le domaine limité par L et L' et ne contenant pas Δ_2. On a un résultat analogue pour les chemins de détermination infinie compris entre la frontière de Δ et un des deux domaines correspondant à (5) et voisins de cette frontière. Ainsi, tout chemin de détermination infinie de $f(z)$ est complètement contigu à ceux appartenant à l'un des domaines correspondant à (5).

On voit de même que si $|f(z)|$ reste bornée sur deux chemins asymptotes à $|z|=1$ compris entre deux domaines consécutifs correspondant à (5), $|f(z)|$ est uniformément bornée entre ces deux chemins. Les résultats de Lindelöf [1] s'appliquent : si $f(z)$ tend vers des limites sur deux tels chemins, ces limites sont les mêmes. Donc :

La fonction $w=f(z)$ possède q valeurs asymptotiques infinies distinctes et q valeurs asymptotiques finies distinctes au plus; la fonction inverse $z=\varphi(w)$ possède q singularités transcendantes à l'infini et au plus q singularités transcendantes à distance finie. Les singularités transcendantes à l'infini sont isolées des singularités algébriques.

Pour établir le dernier point, observons que les singularités algébriques de $\varphi(w)$ sont les valeurs de $f(z)$ correspondant à $f'(z)=0$. Dans Δ, on a $f'(z)=f'_1(z)+\Psi'(z)$, $f'_1(z)$ est donné par

$$2i\pi f'_1(z)=\int_{\Gamma(c,d)}\frac{\Psi(u)}{(u-z)^2}du,$$

donc est borné dans les conditions indiquées pour $f_1(z)$ puisque (8) converge, $|f'_1(z)|$ est borné dans les portions de Δ où $|f(z)|>A$ dès que A est pris assez grand. Au contraire

$$\Psi'(z)=\Phi'(\xi)\frac{d\xi}{dz}$$

est asymptotiquement égal à

$$\Phi'(\xi)=\Phi(\xi)F'(\xi)=\Psi(z)F'(\xi)=[f(z)-f_1(z)]F'(\xi).$$

D'après (2), $F'(\xi)$ tend vers l'infini lorsque ξ tend vers l'infini dans D, donc lorsque $|z|$ tend vers 1 dans Δ, $f_1(z)$ est borné dans les portions de Δ où $|f(z)|>A$. Il s'ensuit que $f'(z)$ ne s'annule pas aux points z pour lesquels $f(z)$ est assez grand.

3. *Supposons ici $q=1$.* Si $f(z)$ n'a pas de valeur asymptotique finie, la surface de Riemann décrite par $w=f(z)$ est de l'espèce envisagée au n° **1** : singularité transcendante unique et isolée. Suppo-

---

(1) *Acta Soc. sc. Fennicæ*, **46**, n° **4**, 1915.

sons que $f(z)$ possède un chemin de détermination finie ([1]) tendant vers $|z|=1$, soit L ce chemin. Introduisons la fonction

$$k(z)=f(z)+g(z),$$

où $g'(z)$ est bornée pour $|z|<1$ et admet $|z|=1$ comme ligne singulière. On sait, d'après un théorème de Fatou et Riesz que, pour presque tous les θ, $g(re^{i\theta})$ tend vers une limite lorsque r tend vers 1 et que ces limites forment un ensemble non dénombrable. *La fonction $k(z)$ admet les mêmes chemins de détermination infinie que $f(z)$ mais elle n'a pas de chemins de détermination fine tendant vers $|z|=1$.* Supposons en effet qu'il existe un tel chemin L'. On peut supposer que L et L' sont des lignes polygonales. Si L' n'appartient pas au domaine Δ' obtenu en supprimant Δ de $|z|<1$, on peut trouver un domaine Δ'' contenant tous les points de Δ', tel que tous les points de L' appartiennent à Δ'' ou à sa frontière et dans lequel $k(z)$ est bornée. De même si L n'appartient pas à Δ'', on peut trouver un domaine Δ''' contenant tous les points de Δ'' et tel que L appartienne à Δ''' ou à sa frontière, $k(z)$ étant borné dans Δ'''. Dans Δ''' et en ses points frontières appartenant à $|z|<1$, points qui sont tous accessibles, $|f(z)|$ et $|k(z)|$ sont bornés par un nombre M. Représentons conformément Δ''' sur un cercle $|v|<1$; les chemins tendant dans Δ''' vers $|z|=1$ auront pour images des chemins aboutissant à un point unique de $|v|=1$ qu'on peut supposer être $v=1$. A $f(z)$ et $k(z)$ correspondent des fonctions $F(v)$ et $K(v)$ de module moindre que M; $K(v)$ tend vers une limite finie lorsque v tend vers 1 sur un certain chemin, donc d'après un théorème de Lindelöf (*loc. cit.*) tend vers cette même limite lorsque v tend vers 1 par valeurs réelles. On a le même résultat pour $F(v)$. En revenant à $f(z)$ et $k(z)$ on voit que ces deux fonctions tendraient respectivement vers des limites finies lorsque z tendrait vers 1 sur un même chemin spirale, ce qui n'est pas possible puisque leur différence $g(z)$ est indéterminée sur ce chemin. Donc :

L'une au moins des fonctions $w=f(z)$ ou $w=f(z)+g(z)$ définit

---

([1]) Je ne sais pas si cette circonstance peut se présenter.

une surface de Riemann ayant une seule singularité transcendante qui est isolée des singularités algébriques.

4. *Supposons* $q > 1$. Ici encore, il est possible, *a priori*, que l'inverse de $f(z)$ admette q singularités transcendantes à distance finie. Mais, comme ci-dessus, on peut trouver une fonction $g(z)$ telle que $f(z) + g(z)$ n'ait plus de valeurs asymptotiques finies. On peut, en effet, trouver $q+1$ fonctions $g'_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, q+1$ bornées pour $|z| < 1$, admettant $|z| = 1$ comme ligne singulière et telles que toutes les différences $g_j(z) - g_\nu(z)$ jouissent de la même propriété. Il suffit de définir les $g_j(z)$ par les $q+1$ séries de Taylor formées par les termes pris de $q+1$ en $q+1$ dans une série telle que $\Sigma n^{-4} z^{n^2}$. D'après le raisonnement précédent, dans chacun des q domaines limités par deux domaines consécutifs correspondant à (5), une seule des $q+1$ fonctions $f(z) + g_j(z)$ peut admettre un chemin de détermination finie; il existe une fonction $f(z) + g_\nu(z)$ qui n'a pas de valeur asymptotique finie. On a ainsi des exemples de *fonction qui restent bornées sur un chemin spiralique et dont les valeurs décrivent une surface de Riemann admettant q singularités transcendantes à l'infini, toutes isolées des singularités algébriques.*

5. Au contraire (1) ou (2) montre que la fonction inverse de $e^{f(z)}$ admet une infinité de singularités transcendantes à l'infini et à l'origine. Elle fournit un exemple de *fonction* $F(z)$, *holomorphe pour* $|z| < 1$, *qui tend uniformément vers zéro sur une suite de courbes* Γ_μ, Γ_μ *tendant uniformément vers la circonférence* $|z| = 1$ (¹). *On sait* (²) *qu'une fonction* $F(z)$ *jouissant de cette propriété et qui serait bornée serait identiquement nulle;* il en de même *d'une fonction pour laquelle la moyenne* $m(r, F)$ *de Nevanlinna serait bornée.* Car elle serait le quotient de deux fonctions holomorphes bornées, le théorème de Fatou et Riesz sur les valeurs limites radiales s'appliquerait (³), la fonction ne pourrait tendre vers une limite sur des courbes tendant vers un arc

(¹) *Comparer* Bieberbach, *Funktionentheorie*, Bd. 2, 2ᵉ édition, p. 153.

(²) *Voir* par exemple Montel, *Leçons sur les familles normales*, p. 107.

(³) F. et R. Nevanlinna, *Acta Soc. sc. Fennicæ*, 50, nº 5, 1922.

fini de la circonférence sans être constante. Les fonctions $e^{f(z)}$ considérées ici sont d'ordre de croissance infini dans le cercle unité (*voir* n° 7); la question se pose de savoir si, en bornant l'ordre, on pourrait étendre la proposition relative aux fonctions à $m(r, \mathrm{F})$ borné.

6. *Considérons ici la classe générale des fonctions* $w = \mathrm{F}(z)$ *holomorphes et non bornées pour* $|z| < 1$ *telles que chaque* $\mathrm{F}(z)$ *est bornée sur un chemin simple, mais quelconque,* $\mathrm{L}[= \mathrm{L}(\mathrm{F})] : z = z(t)$, $t \geq 0$, *avec* $\lim\limits_{t=\infty} |z(t)| = 1$, *tout point de* $|z| = 1$ *étant point limite des valeurs* $z(t)$. Il est loisible de supposer que L est une ligne polygonale et que $|z(t)| > \frac{1}{2}$.

Représentons conformément sur $|\xi| < 1$ le domaine formé par les points de $|z| < 1$ n'appartenant pas à L. A L correspond la circonférence $|\xi| = 1$ privée d'un de ses points qu'on peut supposer être $\xi = 1$; à tout chemin asymptote à $|z| = 1$ et ne coupant pas L correspond un chemin aboutissant à $\xi = 1$ et inversement. $\mathrm{F}(z)$ est transformé en $\Theta(\xi)$, holomorphe pour $|\xi| < 1$ et continue pour $|\xi| = 1$, sauf en $\xi = 1$; on a $|\Theta(\xi)| < \mathrm{M}$ pour $|\xi| = 1$, sauf en $\xi = 1$. Comme $\Theta(\xi)$ n'est pas bornée, les raisonnements qui montrent qu'une fonction entière possède des chemins de détermination infinie [1] prouvent qu'il existe dans $|\xi| < 1$ un chemin λ' aboutissant à $\xi = 1$ sur lequel $|\Theta(\xi)|$ tend vers l'infini. Il existe donc dans $|z| < 1$ un chemin polygonal L′ ne coupant pas L, jouissant des propriétés de L et sur lequel $|\mathrm{F}(z)|$ tend vers l'infini. On peut représenter sur un cercle $|\eta| < 1$ le cercle $|z| < 1$ privé des points de L′ (à partir d'un point arbitraire de L′), L′ fournissant les points de $|\eta| = 1$, sauf $\eta = 1$. $\mathrm{F}(z)$ est transformée en $\chi(\eta)$. Il s'ensuit que :

Dans toute couronne $r < |z| < 1$, *la fonction* $\mathrm{F}(z)$ *s'approche d'autant qu'on veut de toute valeur.*

On peut le voir en observant que, ω étant donné fini, si $\mathrm{F}(z) - \omega$ ne s'annule pas dans une telle couronne et si $\mathrm{P}(z)$ est le polynome

(1) *Voir* VALIRON, *Comptes rendus*, **166**, 1918, p. 382.

formé avec les zéros de $F(z) - \omega$, la fonction $F_1(z) = \frac{P(z)}{F(z) - \omega}$ est holomorphe pour $|z| < 1$; $F_1(z)$ n'est pas bornée pour $|z| < 1$, car si elle l'était, elle devrait être identiquement nulle d'après le théorème rappelé au n° **5** puisqu'elle tend vers zéro sur L'. $F_1(z)$ n'est donc pas bornée, ce qui établit la proposition.

On peut aussi dire que la moyenne $m(r, F)$ n'est pas bornée d'après ce qui a été dit au n° **5**, donc, d'après un théorème de Ahlfors (1), $F(z)$ prend une infinité de fois toutes les valeurs, sauf au plus celles d'un ensemble de mesure linéaire nulle (sur la sphère).

ω étant un nombre fini donné et ε positif arbitraire, considérons l'un des domaines $D(\omega, \varepsilon)$ dans lesquels $|F(z) - \omega| < \varepsilon$. Si $D(\omega, \varepsilon)$ est complètement intérieur au cercle $|z| < 1$, $F(z)$ prend la valeur ω dans $D(\omega, \varepsilon)$. Dans le cas contraire, on peut considérer la fonction $\chi(\eta)$ correspondant à une portion de L' sur laquelle $|F(z)| > |\omega| + \varepsilon$. A $D(\omega, \varepsilon)$ correspond un domaine $\Delta(\omega, \varepsilon)$ dans lequel $|\chi(\eta) - \omega| < \varepsilon$ et sur la frontière duquel, sauf pour $\eta = 1$, on a $|\chi(\eta) - \omega| = \varepsilon$. Il s'ensuit que, si $\chi(\eta)$ ne prend pas la valeur ω dans $\Delta(\omega, \varepsilon)$, cette fonction tend vers ω lorsque η tend vers 1. Donc, *dans tout domaine* $D(\omega, \varepsilon)$, $F(z)$ *prend la valeur* ω *ou s'en approche d'autant qu'on veut* (2). De même, tout domaine dans lequel $|F(z)| > A$ contient un chemin sur lequel $|F(z)|$ tend vers l'infini.

Le théorème de M. Iversen sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes en tout point à distance finie (3) s'étend donc aux fonctions de la classe envisagée :

Soit W *la surface de Riemann décrite par* $w = F(z)$. *Toute portion connexe de* W *qui se projette à l'intérieur* (*ou à l'extérieur*) *d'un cercle* C *du plan simple des* w *contient des lignes dont la projection sur ce plan simple est aussi voisine que l'on veut d'une ligne donnée arbitrairement dans* C (*ou à l'extérieur de* C).

7. Revenons à la fonction $f(z)$ du n° **2**. Si petit que soit le nombre

---

(1) *Comm. Soc. sc. Fennicæ*, 5, 1931, n° 16.

(2) Les théorèmes de Gross (*Math. Z.*, 2, 1918), permettent d'affirmer davantage.

(3) *Thèse*, Helsingfors, 1915.

positif ε, il existe des valeurs de σ aussi grandes que l'on veut pour lesquelles

$$V(\sigma) > [n(\sigma)]^{1-\varepsilon}.$$

Car supposer que l'inégalité contraire

$$V(\sigma) \leqq [\sigma V'(\sigma)]^{1-\varepsilon}$$

serait vérifiée à partir d'une valeur de σ conduirait à un résultat absurde. On déduit de là que

$$\overline{\lim_{\sigma=\infty}} \frac{\log\log F(\sigma)}{\log n(\sigma)} = 1,$$

et en tenant compte des propriétés de $\Phi(\xi)$ dans les domaines (5) et de la transformation (7) qui fait passer à $f(z)$, on voit que, $M(r, f)$ étant le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$, on a

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_3 M(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}} = 1.$$

$f(z)$ est d'ordre infini dans le cercle. Son ordre ne dépend pas de la rapidité de la croissance de $n(\sigma)$, c'est-à-dire de la rapidité de la convergence vers $|z| = 1$ des chemins sur lesquels $|f(z)|$ reste borné. On obtiendrait des fonctions d'ordre plus élevé en faisant au préalable une représentation conforme de la bande D sur une autre définie par une fonction $N(\sigma)$ différente de celle fournie par $F(\xi)$; on reviendrait ainsi à la méthode de ma Note citée des *Comptes rendus* qui peut fournir une grande variété d'exemples.

Nous allons établir, en ce qui concerne l'ordre, la réciproque suivante :

Si $w = F(z)$ n'est pas bornée dans le cercle $|z| < 1$, mais reste bornée sur un chemin continu Γ, asymptote à $|z| = 1$ et tel que lorsqu'on le décrit, l'une au moins des limites d'indétermination de l'argument soit infinie, on a

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_3 M(r, F)}{\log \frac{1}{1-r}} \geqq 1.$$

Pour le démontrer, on supposera toujours que Γ est une ligne polygonale, la portion connexe Γ' de Γ qui est extérieure au cercle $r = |z| = \frac{1}{2}$, délimite dans la couronne $\frac{1}{2} < r < 1$ un domaine D. La transformation (7) représente D sur un domaine Δ limité par la droite $\tau = \log 2$ et par deux courbes γ, γ' appartenant à la bande $0 < \tau < \log 2$; γ' se déduit de γ par une translation de 2π ; γ est asymptote au moins à un point à l'infini de l'axe des σ, on supposera, pour fixer les idées, que c'est au point $+\infty$ (il peut se faire que tout point de l'axe des σ ou d'une demi-droite de cet axe soit point limite des points de γ).

On applique la méthode de Carleman ([1]) à la transformée $H(\xi)$ de $F(z)$, transformée qui est holomorphe dans Δ et bornée à distance finie sur sa frontière. Si Δ' est une portion connexe de Δ définie par $\log|H(\xi)| > K$, K étant supérieur à la borne de $\log|H(\xi)|$ sur la frontière de Δ, on rendra Δ' simplement connexe en lui adjoignant s'il y a lieu des régions bornées dans lesquelles on a $\log|H(\xi) \leqq K$; on obtient ainsi un domaine Δ''. Soit $\xi_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ un point de Δ''. Pour chaque σ supérieur à σ_0, la droite $\sigma = \text{const.}$ définie par ce nombre détermine dans Δ'' un nombre fini ou infini de domaines, l'un d'eux contient ξ_0, j'appelle $M(\sigma)$ le maximum de $|H(\xi)|$ dans ce domaine. $M(\sigma)$ est une fonction indéfiniment croissante, qui aura, en général, des discontinuités isolées, sa valeur à droite $M(\sigma + 0)$ a une dérivée à droite, j'appellerai simplement $M(\sigma)$ et $M'(\sigma)$ cette valeur à droite et sa dérivée, et je poserai

$$U(\sigma) = \log M(\sigma), \qquad U'(\sigma) = \frac{M'(\sigma)}{M(\sigma)}.$$

Si $|H(\sigma + i\tau)| = M(\sigma)$, on applique la méthode de Carleman au domaine connexe contenant ce point $\sigma + i\tau$, situé à gauche de la droite d'abscisse $\sigma + \varepsilon$, et dans lequel $|H(\xi')| > \sqrt{M(\sigma)}$. On obtient donc

([1]) *Arkiv für Mat.*, Bd. 15, n° 10, 1920. La méthode de M. Carleman présente ici l'avantage de conduire de suite à la relation différentielle qui résout la question. Elle donnerait de même des résultats dans l'étude de l'extension des domaines où une fonction est très grande (*Comparer* Milloux, *Acta math.*, 61, 1933, p. 105).

(form. (8) de Carleman)

$$\frac{U'(\sigma)}{U(\sigma)-\frac{1}{2}U(\sigma)} \geqq \frac{4}{\pi h(\sigma)},$$

où $h(\sigma)$ est la somme des longueurs de segments d'abscisse σ aux extrémités desquels $|H(\xi)| = \sqrt{M(\sigma)}$.

Ainsi, pour chaque σ assez grand, nous avons un point $\sigma + i\tau$, avec

$$\log|H(\sigma+i\tau)| \geqq \frac{1}{2}U(\sigma), \qquad \tau \geqq \frac{2U(\sigma)}{\pi U'(\sigma)}.$$

Comme $U(\sigma)$ croît indéfiniment, il existe des σ aussi grands que l'on veut pour lesquels, si petit que soit le nombre positif α, on a

$$\frac{U'(\sigma)}{U(\sigma)} < [\log U(\sigma)]^{1+\alpha}.$$

Car, si l'on avait

$$\frac{U'(\sigma)}{U(\sigma)[\log U(\sigma)]^{1+\alpha}} \geqq 1, \qquad \sigma > \sigma_1,$$

on en déduirait que, les σ_ν étant les points de discontinuités de U,

$$\frac{1}{[\log U(\sigma_1)]^\alpha} - \frac{1}{[\log U(\sigma-0)]^\alpha} \geqq \sum \left[\frac{1}{[\log U(\sigma_{\nu-1})]^\alpha} - \frac{1}{[\log U(\sigma_\nu - 0)]^\alpha}\right] \geqq \alpha(\sigma - \sigma_1),$$

ce qui est absurde. Finalement, on a des points $\sigma + i\tau$ pour lesquels

$$\log|H(\sigma+i\tau)| \geqq \frac{1}{2}U(\sigma), \qquad \tau \geqq \frac{2}{\pi[\log U(\sigma)]^{1+\alpha}},$$

il s'ensuit que

$$\overline{\lim_{\sigma=\infty}} \frac{\log_3|H(\sigma+i\tau)|}{\log\frac{1}{\tau}} \geqq 1,$$

ce qui entraîne le théorème énoncé.