JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN CHAZY

Sur les solutions périodiques d'un système différentiel au voisinage d'une position d'équilibre

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 411-421.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__411_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur les solutions périodiques d'un système différentiel au voisinage d'une position d'équilibre;

PAR JEAN CHAZY.

On appelle souvent solutions périodiques d'un système différentiel au voisinage d'une position d'équilibre, les solutions périodiques de ce système qui restent voisines d'une solution constituée par des valeurs constantes des fonctions inconnues. Ces solutions périodiques ont été étudiées ([1]) par Poincaré, par M. Picard, par Painlevé, par Horn. Painlevé a affirmé l'existence de telles solutions dans des hypothèses trop larges. Horn en a démontré l'existence en introduisant cette hypothèse que le système différentiel possède une intégrale holomorphe pour le système des valeurs constantes correspondant à la position d'équilibre; cette dernière condition se trouve souvent réalisée dans les applications : en Mécanique notamment dans le cas qui a fourni la désignation des solutions périodiques considérées, l'intégrale qui en détermine l'existence est souvent l'intégrale des forces vives.

J'énonce ici diverses remarques relatives à la fois aux solutions périodiques d'un système différentiel d'ordre 2 au voisinage d'une position d'équilibre, et à la théorie des centres; ces remarques donnent, je crois, plus de netteté à la première question.

([1]) *Cf.* POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 1, p. 156-161; PICARD, *Traité d'Analyse*, t. 3, 3e éd., p. 181-186.; PAINLEVÉ, *Comptes rendus*, t. 124, 1897, p. 1224; *Notice sur ses travaux scientifiques*, Paris, 1900, p. 107; HORN, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Band 47, 1902, p. 400-428 et Band 48, 1903, p. 400-434.

1. Nous nous bornerons au cas le plus simple ([1]). Soit dans le domaine réel un système de deux équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

définissant les deux fonctions x et y du temps t, qui est la variable indépendante, mais ne contenant pas explicitement cette variable. Supposons que ces deux équations admettent une solution où les deux fonctions x et y ont des valeurs constantes; par soustraction de ces valeurs constantes, cette solution est, si l'on veut, $x = 0, y = 0$, c'est-à-dire est *la solution zéro*, et alors les deux fonctions f et g doivent s'annuler quand x et y s'annulent à la fois. Supposons en outre que les deux fonctions f et g soient holomorphes au voisinage du système de valeurs $x = 0, y = 0$, c'est-à-dire au voisinage de la solution zéro, et mettons en évidence les termes linéaires de leurs développements

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y + \ldots, \qquad \frac{dy}{dt} = \gamma x + \delta y + \ldots.$$

Pour que la solution définie par les conditions initiales $t = 0$, $x = x_0, y = y_0$ soit une solution périodique, il faut qu'au bout d'un certain intervalle de temps T les valeurs des variables x et y, appelons-les

$$x_0 + F(x_0, y_0, T), \quad y_0 + G(x_0, y_0, T),$$

soient égales aux valeurs initiales. Et réciproquement, cette condition est suffisante, car, si elle est remplie, les conditions du mouvement à l'instant T seront les mêmes qu'à l'instant initial : la solution considérée a pour période T, ou une partie aliquote de T, si nous réduisons toujours la période à la plus petite valeur absolue possible ([2]). Ainsi, avec la notation adoptée, pour obtenir les solutions

---

([1]) Car une équation unique de la forme $\frac{dx}{dt} = f(x)$, où $f(x)$ est holomorphe et nul pour $x = 0$, ne peut avoir de solution périodique qui reste, ni même qui devienne arbitrairement petite.

([2]) Nous écartons le cas où les deux fonctions f et g sont identiquement nulles, et d'ailleurs, selon la remarque qui précède, si une seule de ces périodiques du système (1), nous avons à résoudre les deux équations à trois inconnues

$$F(x_0, y_0, T) = 0, \qquad G(x_0, y_0, T) = 0, \tag{3}$$

que nous appellerons les *conditions de périodicité*.

2. D'après la forme des équations (2), il est naturel d'éliminer la différentielle dt entre ces deux équations. Si l'on représente d'ailleurs les deux variables x, y dans un plan d'origine O, on obtient entre ces deux variables, et au voisinage du point singulier O, l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dx}{\alpha x + \beta y + \ldots} = \frac{dy}{\gamma x + \delta y + \ldots}. \tag{4}$$

Si notamment dans le plan représentatif le point O est un centre [1], il est entouré par une infinité de courbes intégrales, et chacune de ces courbes définit une solution périodique des équations (2). Si au contraire, et c'est le cas général, le point singulier est un nœud, un col ou un foyer, l'équation du premier ordre (4) ne peut admettre de courbe intégrale fermée au voisinage de ce point, et les équations (2) n'admettent pas de solution périodique, du moins voisine de la solution $x = 0, y = 0$.

Pour que ces équations admettent une telle solution, il est donc nécessaire d'abord que l'équation en λ correspondant au point singulier O selon la théorie des courbes définies par une équation différentielle du premier ordre, soit

$$(\alpha - \lambda)(\delta - \lambda) - \beta\gamma = 0, \tag{5}$$

ait ses racines purement imaginaires, ou exceptionnellement ait ses deux racines nulles.

Quand l'équation (5) a ses racines purement imaginaires, l'équation différentielle (4) peut, par un changement de variables linéaire

---

fonctions est identiquement nulle, le système différentiel (1) ne peut avoir de solution périodique : de sorte que chacune des deux fonctions F et G contient nécessairement l'intervalle T.

[1] *Cf.* PICARD, *Traité d'Analyse*, t. 3, 3e éd., p. 222.

effectué sur x et y, être réduite à la forme

$$\frac{dx}{-y+P(x,y)}=\frac{dy}{x+Q(x,y)}, \tag{6}$$

P et Q désignant deux fonctions de x et y holomorphes pour $x=0$, $y=0$, et dont les développements commencent par des termes de degré 2 au moins. Sous cette forme, selon le calcul ([1]) de Poincaré, il est nécessaire, pour que le point O ne soit pas un foyer, que certaines constantes C_0 soient nulles successivement, et nous appellerons les conditions ainsi définies les *conditions* (C_0).

Quand toutes les conditions (C_0) sont vérifiées successivement, le point O est un centre; le calcul de Poincaré conduit à un développement ordonné suivant les puissances entières de x et y, commençant par le terme x^2+y^2, et dont la somme est une intégrale de l'équation différentielle (4), et des équations (2), soit

$$x^2+y^2+H_3(x,y)+\ldots+H_n(x,y)+\ldots=h, \tag{7}$$

$H_n(x,y)$ désignant un polynome homogène de degré n en x et y, et h une constante positive arbitraire. L'équation ainsi formée réprésente pour h assez petit les courbes intégrales de l'équation (4) au voisinage du centre O. A chacune de ces courbes intégrales correspond une solution périodique du système différentiel (2) voisine de la solution zéro : le temps t dans cette solution et la période T sont déterminés par la quadrature résultant des deux équations (2). Au total les solutions périodiques obtenues dépendent de deux paramètres, la constante h et l'origine du temps. Et réciproquement l'existence d'une intégrale holomorphe de la forme (7) suffit à établir l'existence des solutions périodiques.

Ainsi se trouve démontrée la proposition : *Quand les fonctions f et g du système différentiel* (1) *sont nulles et holomorphes pour* $x=y=0$, *pour que ce système admette des solutions périodiques voisines de la solution zéro, il faut et il suffit qu'il admette, quand les racines de l'équation* (5) *sont purement imaginaires, une intégrale holomorphe pour les*

([1]) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. 1, 1885, p. 172-193; *Œuvres*, t. 1, 1928, p. 95-112.

valeurs $x = 0$, $y = 0$, *et dont le développement commence par le terme* $x^2 + y^2$.

5. On peut faire sur les intégrales de l'équation différentielle (4) les remarques suivantes.

En premier lieu, puisque cette équation admet l'intégrale représentée par le développement (7), soit $H(x, y)$, c'est-à-dire une intégrale holomorphe pour les valeur $x = 0, y = 0$, et dont le développement commence par les termes $x^2 + y^2$, on déduit de $H(x, y)$ une infinité d'autres intégrales possédant les deux mêmes propriétés : par exemple par substitution dans la série entière

$$H + a_2 H^2 + \ldots + a_n H^n + \ldots,$$

où les constantes $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ satisfont à cette seule condition que la série converge pour H assez petit. Ces constantes équivalent évidemment aux constantes laissées arbitraires par Poincaré dans chaque polynome $H_n(x, y)$ de degré pair du développement $H(x, y)$.

En deuxième lieu, pour démontrer l'existence de solutions périodiques d'un système de la forme (1), Horn suppose d'une facon précise (¹) que l'équation (4) correspondante est réduite à la forme (6), et admet une intégrale, soit $K(x, y)$, holomorphe pour $x = 0, y = 0$, et représentée par un développement de la forme

$$K_p(x, y) + K_{p+1}(x, y) + \ldots + K_n(x, y) + \ldots,$$

où $K_n(x, y)$ désigne un polynome homogène de degré n en x, y, et où les termes de moindre degré $K_p(x, y)$ comportent un terme en x^p. Mais introduisons un paramètre dans l'équation différentielle (6) : remplaçons-y x et y par εx et εy, ε désignant une constante. Chaque solution $y(x)$ ou $x(y)$ est fonction holomorphe du paramètre ε s'il est assez petit, et pour $\varepsilon = 0$ l'équation obtenue se réduit à l'équation

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

qui admet l'intégrale $x^2 + y^2$. Dans le même passage à la limite, l'intégrale $K(x, y)$ se réduit aux termes de moindre degré $K_p(x, y)$:

(¹) *Loc. cit.*, Band 48, 1903, p. 413-414.

donc nécessairement le degré p est pair, et, à un facteur constant près, le polynome $K_p(x, y)$ est identique à $(x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}$. Dès lors les courbes définies par l'équation

$$K(x,y)=k,$$

où k désigne une constante arbitraire assez petite, sont des courbes fermées entourant l'origine O, et le point O est un centre des courbes intégrales de l'équation différentielle (6). Par suite la seconde intégrale $K(x, y)$ de cette équation est nécessairement fonction de l'intégrale $H(x, y)$ correspondant à la même équation, et l'on a

$$K(x, y)=H^{\frac{p}{2}}(1+b_1 H+b_2 H^2+\ldots+b_n H^n+\ldots),$$

$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ désignant des constantes telles que la série entre parenthèses soit convergente pour H assez petit. Et, au lieu de l'intégrale $K(x, y)$, il suffit de considérer l'intégrale $H(x, y)$.

En troisième lieu, par un changement de variables effectué sur x et y, on peut chercher au contraire à simplifier l'intégrale considérée; on peut notamment, en fonction des nouvelles variables X et Y, réduire le développement (7) à la forme

$$X^2+Y^2.$$

Il suffit par exemple d'égaler à X^2 la somme des termes de ce développement contenant x^2 en facteur, et à Y^2 la somme des termes restants, et qui contiennent y^2 en facteur. On obtient ainsi

$$X^2=x^2 S(x, y), \qquad Y^2=y^2 S(x, y),$$

$S(x, y)$ désignant dans ces deux formules et dans celles qui vont suivre une fonction de x, y holomorphe et égale à 1 pour $x=0, y=0$, fonction qui bien entendu n'est pas toujours la même. En extrayant les racines carrées, et prenant les variables X et Y de mêmes signes que x et y, on déduit

$$X=xS(x, y), \qquad Y=yS(x, y),$$

puis inversement, par application de la formule de Lagrange à deux variables

$$x=XS(X, Y), \qquad y=YS(X, Y).$$

Avec les nouvelles variables, l'équation différentielle (4) se transforme en l'équation

$$\frac{dX}{-Y} = \frac{dY}{X},$$

et le système (1) en un système de la forme

$$\frac{dX}{dt} = -\omega Y S(X, Y), \qquad \frac{dY}{dt} = \omega X S(X, Y),$$

ω désignant une constante qu'on peut supposer positive en changeant au besoin le sens du temps. En particulier la période de la solution périodique correspondant à la valeur h de l'intégrale (7) devient, si l'on fait

$$X = \sqrt{h}\cos u, \qquad Y = \sqrt{h}\sin u,$$

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{dX}{-\omega Y} S(X, Y) = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} (\sqrt{h}\cos u, \sqrt{h}\sin u)\, du.$$

Donc, pour h assez petit, la période T est la somme d'une série entière en h; quand h tend vers zéro, la période T tend vers le terme constant de cette série, soit $\frac{2\pi}{\omega}$ avec les notations introduites.

4. De l'étude de l'équation du premier ordre (4) résulte pour les conditions de périodicité (3) la conséquence suivante. Ou bien ces deux conditions donnent une identité par élimination de l'intervalle T, et par suite se réduisent à une équation unique déterminant la période T en fonction des conditions initiales x_0, y_0 : les équations (1) admettent dans ce cas une infinité de solutions périodiques voisines de la solution zéro, dépendant des deux paramètres x_0, y_0, arbitraires pourvu qu'ils soient assez petits. Ou bien, et c'est le cas général, dans toute solution des équations (3), T, ou x_0 et y_0, sont nuls : les équations (1) n'admettent aucune solution périodique voisine de la solution zéro. Ainsi, les coefficients des deux équations (1) étant regardés comme arbitraires, le cas où ces équations admettent une solution périodique voisine de la solution zéro, apparaît comme tout à fait exceptionnel, puisqu'il comporte une infinité de conditions d'égalité successives entre les coefficients considérés, savoir les conditions (C_0).

Horn a montré, selon le raisonnement classique de Poincaré, que, quand les deux équations (2) possèdent une intégrale $K(x, y)$ holomorphe pour $x = 0$, $y = 0$, les deux conditions de périodicité (3) sont conséquence l'une de l'autre; dans le même ordre d'idées, ces deux conditions possèdent encore la propriété suivante. Quand elles sont vérifiées par les valeurs initiales x_0, y_0, les deux mêmes conditions sont vérifiées encore si l'on substitue à x_0, y_0 les valeurs x, y correspondant à un instant quelconque t : de sorte que, T étant donné, si ces deux conditions sont vérifiées à un instant, elles sont vérifiées à tout instant. Donc les deux relations (3) forment ce que Poincaré a appelé ([1]) un système de *relations invariantes*, et Painlevé un système d'*équations intégrales* des équations différentielles (1).

5. Je veux intercaler ici une remarque sur la convergence du développement (7); dans le calcul de Poincaré la formation des conditions (C_0) est relativement simple, au contraire la démonstration de la convergence du développement (7) est compliquée : cette démonstration peut être simplifiée comme il suit. Transformons l'équation différentielle (6) en coordonnées polaires ([2]); faisant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, nous obtenons une équation de la forme

$$\frac{dr}{d\theta} = A_2 r^2 + A_3 r^3 + \ldots + A_n r^n + \ldots, \tag{8}$$

dont le second membre est convergent pour r assez petit, et où les A_n désignent des polynomes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Poincaré et M. Picard ont considéré la solution de l'équation (8) prenant pour $\theta = 0$ la valeur donnée r_0; cette solution est fonction holomorphe de r_0 pour r_0, assez petit, admet le développement

$$r = r_0 + B_2 r_0^2 + B_3 r_0^3 + \ldots + B_n r_0^n + \ldots, \tag{9}$$

où les B_n désignent des fonctions de θ seulement. Pour que les courbes intégrales correspondantes soient fermées, et que le pôle $r = 0$ ne soit pas un foyer, il faut et il suffit que les coefficients successifs B_2,

([1]) Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 1, p. 45; Painlevé, *Bulletin astronomique*, t. 15, 1898, p. 82.

([2]) *Cf.* Poincaré, *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. 1, 1885, p. 182; *Œuvres*, t. 1, 1928, p. 102; Picard, *Traité d'Analyse*, t. 3, 3e éd., p. 221.

$B_3, \ldots, B_n, \ldots$ soient des fonctions périodiques de θ de période 2π. On retrouve ainsi par une seconde méthode la suite infinie des conditions (C_0). Nous supposons toutes ces conditions remplies : les coefficients B_n sont des polynomes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

En résolvant un problème de retour des suites à partir du développement (9), ou en considérant inversement la valeur r_0 comme fonction de la valeur r correspondant à l'angle θ, puis en effectuant une élévation au carré, on obtient les deux développements

$$(10)\qquad \begin{aligned} r_0 &= r + C_2 r^2 + \ldots + C_n r^n + \ldots, \\ r_0^2 &= r^2 + D_3 r^3 + \ldots + D_n r^n + \ldots, \end{aligned}$$

convergents si r est assez petit, et où les coefficients C_n et D_n sont encore des polynomes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Si l'on revient aux variables x et y, le second membre de l'équation (10) est une intégrale de l'équation différentielle (6), dont le premier terme est $x^2 + y^2$, mais dont les termes suivants ne sont pas des polynomes en x et y. Comme l'équation (8) ne change pas si l'on change r et θ en $-r$ et $\theta + \pi$, on déduit de cette première intégrale une deuxième intégrale par le même changement de variables, puis une troisième intégrale égale à la demi-somme des deux premières, soit

$$(11)\qquad r^2 + E_3 r^3 + \ldots + E_n r^n + \ldots;$$

dans cette troisième intégrale chaque coefficient E_n est encore un polynome en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, et tous les termes de ce polynome ont la parité de l'exposant n. Or il résulte du calcul de Poincaré relatif à la formation des conditions (C_0), que dans une telle intégrale le degré en $\cos\theta$ et $\sin\theta$ du polynome E_n ne peut surpasser l'exposant n, compte tenu bien entendu de l'identité

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Donc, si l'on exprime l'intégrale (11) en x et y, on obtient un développement de la forme (7) dont tous les termes sont des polynomes. En fait le développement (7) dont nous démontrons ainsi la convergence, est exactement celui dont Poincaré a démontré la convergence par une méthode plus compliquée.

6. Supposons enfin que les deux racines de l'équation (5) en λ

soient nulles : deux cas peuvent se présenter. Dans l'équation différentielle (4), quand les quatre coefficients α, β, γ, δ des termes linéaires des dénominateurs ne sont pas nuls à la fois, l'un des coefficients β et γ, β par exemple, est différent de zéro : dans ce premier cas, si l'on prend comme variable y, au lieu de la variable primitive, la fonction figurant en dénominateur au-dessous de dx, l'équation (4) prend la forme

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{Q}, \tag{12}$$

Q désignant une fonction de x et y holomorphe pour $x = 0$, $y = 0$, et dont le développement commence par des termes de degré 2 au moins. Dans le second cas, quand les quatre coefficients α, β, γ, δ sont nuls, l'équation (4) a la forme

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}, \tag{13}$$

P et Q désignant deux fonctions de x et y holomorphes pour $x = 0$, $y = 0$, et dont les développements commencent par des termes de degré 2 au moins.

D'une part il est évident qu'ici encore, si l'équation (12) ou (13) admet une intégrale, soit $H(x, y)$, holomorphe pour $x = 0$, $y = 0$, et telle que l'équation

$$H(x, y) = h$$

représente pour h assez petit des courbes fermées entourant l'origine, à chacune de ces courbes correspondent une infinité de solutions périodiques de l'équation (1) correspondante, voisines de la solution zéro.

D'autre part, pour étudier l'équation (12) ou l'équation (13), on peut y introduire un paramètre. Remplaçons dans l'équation (13) rendue entière x et y par εx et $\varepsilon^\mu y$, ε et μ désignant deux constantes positives : les deux quantités $Q\,dx$ et $P\,dy$ deviennent des séries entières en ε et ε^μ; déterminons l'exposant μ de façon que, dans ces deux quantités ordonnées en ε, le degré des termes de degré minimum soit le même, et égalons ces termes de degré minimum. L'équation différentielle ainsi formée, analogue à l'équation $x\,dx + y\,dy = 0$, que nous avons formée à partir de l'équation (6), doit d'abord admettre comme courbes intégrales des courbes fermées, si les équations (1) correspondantes admettent des solutions périodiques voisines de la solution zéro, et représentées elles-mêmes par des courbes fermées. Par suite, dans les cas les plus simples, et après des transformations simples effectuées sur les variables x et y, les équations réduites formées à partir des équations (12) et (13), sont définies par les intégrales

$$y^2 + x^4 = C, \qquad x^4 + y^4 = C, \qquad x^4 + 2a\, x^2 y^2 + y^4 = C,$$

a désignant une constante comprise entre -1 et $+1$, et C une constante positive arbitraire.

Au voisinage de chacune des courbes fermées ainsi obtenues, la solution $y(x)$ ou $x(y)$ de l'équation (12) ou (13) est fonction holomorphe du paramètre ε pour ε assez petit; si notamment la solution $x(t)$, $y(t)$ correspondante est périodique, la période T tend vers l'infini quand la courbe considérée tend vers l'origine et la solution périodique vers la solution zéro.