JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

RENÉ DE POSSEL

Sur la dérivation abstraite des fonctions d'ensemble

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 391-409.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__391_0>

Sur la dérivation abstraite des fonctions d'ensemble ;

PAR RENÉ DE POSSEL.

1. Parmi les propriétés de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue, les unes s'étendent d'une manière évidente au cas où l'ensemble fondamental, au lieu d'être la droite ou l'espace à n dimensions, est un ensemble d'éléments de nature arbitraire dans lequel se trouve définie une mesure vérifiant certains axiomes, l'ensemble ainsi muni de sa mesure pouvant être appelé un *espace mesuré;* d'autres au contraire semblent perdre toute signification dès que l'espace n'est plus métrique. A cette deuxième catégorie appartiennent les propriétés de dérivation d'une fonction d'ensemble, et les théorèmes tels que celui-ci : un ensemble mesurable a une densité (¹) égale à 1 en presque tous ses points et une densité égale à 0 en presque tout point qui ne lui appartient pas. Il y a encore bien entendu les propriétés relatives à l'invariance de la mesure vis-à-vis d'un groupe, propriétés qui se généralisent d'une manière parfaite au moyen de la mesure de Haar (²), et dont nous ne nous occuperons pas ici.

Le but du présent mémoire est de démontrer, pour un espace mesuré quelconque, des théorèmes qui, dans le cas de la mesure de Lebesgue de l'espace à n dimensions, se réduisent en général à des théorèmes connus de la deuxième catégorie ci-dessus, c'est-à-dire des

(¹) Le mot « densité » en théorie des ensembles a été utilisé dans deux sens entièrement différents. Le sens adopté ici est celui qui est calqué sur le sens physique.

(²) Voir *Mémorial* A. WEIL, *Méthodes intégrales en théorie des groupes*, (à paraître prochainement).

théorèmes de dérivation ou de densité. La notion essentielle sera celle d'un système d'ensembles attachés à chaque point, système dans lequel sera définie une notion de limite, et qu'on pourra appeler système de *voisinages* du point, bien qu'il n'y ait qu'un lointain rapport avec les systèmes de voisinages topologiques. Lorsqu'un tel système jouira de propriétés analogues à celles des suites d'intervalles tendant vers zéro pour la mesure de Lebesgue, nous dirons que c'est un *système de voisinages en mesure pour l'espace mesuré*.

Les principales propriétés de ces systèmes ont été énoncées dans une Note (1) aux *Comptes rendus*.

I. — L'espace mesuré.

2. Considérons un ensemble quelconque E. Nous dirons qu'une famille $\mathfrak{T}$ d'ensembles de E est une *tribu* quand elle jouit des propriétés suivantes :

1° *La différence de deux ensembles de la famille lui appartient encore.*

2° *La réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille lui appartient également* (2).

Il en résulte immédiatement que l'intersection d'une infinité dénombrable d'ensembles de la tribu lui appartient; mais par contre le complémentaire d'un ensemble de la tribu ne lui appartient pas toujours.

On dit souvent σ-corps au lieu de tribu, mais il paraît préférable de réserver au mot corps son sens algébrique.

---

(1) *Comptes rendus*, **201**, 1935, p. 579.

(2) Nous ne parlons de la différence de deux ensembles E et F que dans le cas où E est contenu dans F.

« Réunion » de plusieurs ensembles signifie « ensemble des points qui appartiennent à l'un au moins de ces ensembles ». Nous écrivons $A \dotplus B$, ou $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{i \in I} A_i$. Nous réservons le mot somme et les notations $A + B$ et $\sum\limits_{i \in I} A_i$ au cas où les ensembles sont *étrangers* les uns aux autres.

Nous aurons à considérer des fonctions de point, définies pour tout point d'un ensemble E de E, et des fonctions d'ensemble, définies pour tous les ensembles d'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles de E. La valeur de ces fonctions sera toujours un nombre réel, pouvant être égal à $+\infty$ ou à $-\infty$.

Considérons une fonction d'ensemble, m, que nous appellerons *mesure*, et qui possède les propriétés suivantes :

1° *Les ensembles pour lesquels m est définie forment une tribu $\mathfrak{T}$, et sont dits mesurables.*

2° mE *vérifie les inégalités*

$$0 \leqq m\mathrm{E} \leqq +\infty.$$

3° *La mesure m est complètement additive, c'est-à-dire que si les* E_i *sont des ensembles étrangers appartenant à $\mathfrak{T}$, l'égalité* $\mathrm{E} = \sum_1^\infty \mathrm{E}_i$ *entraîne* $m\mathrm{E} = \sum_1^\infty m\mathrm{E}_i$.

L'association de l'ensemble E et de la mesure m possédant les propriétés 1°, 2°, 3° constitue par définition un *espace mesuré* $\mathfrak{E}$.

Pour l'étude que nous avons en vue, nous supposerons en outre que la condition suivante est vérifiée :

4° *L'ensemble* E *est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables et de mesure finie.*

Dans ces conditions, E lui-même est mesurable, et le complémentaire de tout ensemble de $\mathfrak{T}$ appartient à $\mathfrak{T}$.

Mesure extérieure. — De la mesure m on peut déduire une fonction d'ensemble $\overline{m}$ définie pour toutes les parties de l'ensemble E en posant

$$\overline{m}\,\mathrm{A} = \text{borne inférieure } m\mathrm{E},$$

pour tous les ensembles E mesurables et contenant A, ou $m\mathrm{A} = +\infty$ s'il n'existe pas de tels ensembles E. La fonction $\overline{m}$ est évidemment égale à m pour les ensembles mesurables ; on la nomme souvant *mesure extérieure correspondant à la mesure m.*

Dans ces conditions, il existe pour tout ensemble A un ensemble mesurable $\bar{A}$ contenant A et tel que $\overline{m}A = m\bar{A}$. Il suffit en effet de prendre pour $\bar{A}$ l'intersection d'une suite d'ensembles mesurables dont chacun contient A et dont les mesures tendent vers $\overline{m}A$.

$\bar{A}$ est appelé une *couverture d'égale mesure* de A.

Un ensemble A est dit *de mesure nulle* si $\overline{m}A = 0$. Nous ne supposons pas comme on le fait souvent que tout ensemble de mesure nulle est mesurable.

On dit qu'une propriété définie pour un point est vérifiée *en presque tout point* d'un ensemble A ou encore *presque partout* dans A si elle est vraie en tout point de A sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle.

3. Démontrons enfin un lemme utilisé dans la suite :

LEMME I. — *Soient $f(p)$ et $g(p)$ deux fonctions de point définies en tout point p de $\mathfrak{E}$, et telles que, toutes les fois que l'on a $g(p) > a$ en tout point d'un ensemble* A *de mesure extérieure positive, il existe un point p de* A *où $f(p) \geqq a$. Dans ces conditions, on a, en presque tout point de l'espace, $f(p) \geqq g(p)$. Le sens des inégalités peut d'ailleurs être inversé, comme on le voit en changeant f en $-f$, g en $-g$ et a en $-a$.*

Dans le cas contraire il existerait un ensemble A_1 tel que $\overline{m}A_1 > 0$, $f(p) < g(p)$ en tout point de A_1. Pour tout couple (m, n) où m est entier et n entier positif, désignons par $B_{m,n}$ l'ensemble des points de A_1 tels que

$$f(p) < \frac{m-1}{n} < \frac{m}{n} < g(p).$$

Ces ensembles sont en infinité dénombrable, et leur réunion est A_1. L'un au moins d'entre eux B est donc de mesure extérieure non nulle, et l'on a, pour tout point p de B,

$$g(p) > \frac{m-1}{n}, \qquad f(p) < \frac{m-1}{n}.$$

C'est en contradiction avec l'hypothèse.

II. — L'existence de l'opération inverse de l'intégration.

4. Étant donné un espace mesuré $\mathfrak{E}$, constitué par un ensemble $\mathbf{E}$ et une mesure m, nous appellerons *fonction d'ensemble de base m* toute fonction d'ensemble $\mathfrak{F}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1° $\mathfrak{F}$ *est définie pour tout ensemble mesurable et il y a l'une des valeurs* $+\infty$, $-\infty$ *qu'elle ne prend jamais.*

2° $\mathfrak{F}$ *est complètement additive.*

3° $\mathfrak{F}$ *est nulle pour tout ensemble mesurable de mesure nulle.*

Soit $f(p)$ une fonction de point non négative, et *mesurable* par rapport à la mesure m, c'est-à-dire que l'ensemble des points où $f(p) > a$ est mesurable pour tout nombre a. On définit alors l'*intégrale* $\int f(p).dm$ de $f(p)$ par rapport à m, étendue à tout l'espace, par exemple au moyen des sommes de Lebesgue. L'intégrale indéfinie étendue à un ensemble mesurable E est alors

$$\int_{E} f(p).dm = \int \varphi_{E}(p).f(p).m\,;$$

c'est une fonction d'ensemble de base m.

Supposons maintenant $f(p)$ de signe quelconque, et désignons par f^{+} et f^{-} les fonctions non négatives minima telles que $f = f^{+} - f^{-}$. Si les deux intégrales $\int f^{+}dm$ et $\int f^{-}dm$ ne sont pas infinies toutes deux, nous dirons que $f(p)$ est *intégrable au sens large*, et nous poserons

$$\mathfrak{F}E = \int_{E} f(p).dm = \int_{E} f^{+}\,dm - \int_{E} f^{-}\,dm.$$

$\mathfrak{F}E$ est l'intégrable indéfinie de $f(p)$; c'est une fonction d'ensemble de base m.

Réciproquement, on a le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Pour toute fonction d'ensemble $\mathfrak{F}$ de base m, il existe une fonction de point $f(p)$ telle que*

$$\mathfrak{F}E = \int_{E} f(p).dm.$$

La fonction $f(p)$ peut être appelée la *pseudo-dérivée* de la fonction $\mathfrak{I}$ par rapport à m.

Elle n'est évidemment définie qu'à un ensemble de mesure nulle près, puisqu'on peut modifier arbitrairement sa valeur sur un ensemble de mesure nulle sans changer la valeur de l'intégrale.

Dans le cas de l'espace à n dimensions, et de la mesure de Lebesgue, la fonction $f(p)$ n'est autre que la *dérivée* de $\mathfrak{I}$ par rapport à m.

Le théorème a été étendu successivement par J. Radon [1], P. J. Daniell [2], et O. Nikodym [3]. Une démonstration très simple se trouve dans S. Saks [4]. L'idée de la démonstration consiste à partager l'espace en ensembles dans lesquels le rapport $\frac{\mathfrak{I}\mathrm{E}}{m\mathrm{E}}$ reste compris entre deux limites très voisines.

Rappelons encore que pour toute fonction $\mathfrak{I}$ de base m, la décomposition $f = f^+ - f^-$ conduit à une décomposition $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^+ - \mathfrak{I}^-$ et à une décomposition correspondante de l'espace $\mathsf{E} = \mathsf{E}^+ + \mathsf{E}^-$, telles que

$$\mathfrak{I}^+\mathrm{E} = \mathfrak{I}(\mathrm{E} \cap \mathsf{E}^+) = \int_{\mathrm{E}} f^+\, dm, \qquad \mathfrak{I}^-\mathrm{E} = \mathfrak{I}(\mathrm{E} \cap \mathsf{E}^-) = \int_{\mathrm{E}} f^-\, dm.$$

Nous nous proposons d'étudier certains « systèmes de voisinages » par rapport auxquels la pseudo-dérivée $f(p)$ pourra être définie comme une limite, d'une façon analogue à la dérivée ordinaire et qui généraliseront par conséquent les systèmes d'intervalles de la droite.

5. Auparavant, démontrons un lemme :

Lemme II. — *Soit $\mathfrak{I}$ une fonction d'ensemble de base m, et $f(p)$ une pseudo-dérivée de $\mathfrak{I}$ par rapport à m.*

Si, pour toute partie A *de mesure extérieure positive d'un ensemble* B, *on a* $\mathfrak{I}\,\overline{\mathrm{A}} > a \,.\, m\overline{\mathrm{A}}$, *il en résulte, presque partout dans* B, $f(p) > a$. *Le*

---

(1) J. Radon, *Théorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen* (*Wiener Sitzungsber*, **122**, 1913).

(2) P. J. Daniell, *Stieltjes derivatives* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, **26**, 1919, p. 444-448).

(3) O. Nikodym. *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon* (*Fundam. Math.*, **15**, 1930, p. 131-179).

(4) S. Saks, *Théorie de l'intégrale* (Varsovie, 1933), ou *Theory of the Integral* (Varsovie, 1936).

sens des inégalités peut être inversé en changeant $\mathfrak{I}$ en $-\mathfrak{I}$ et a en $-a$.

Supposons $f(p) \leqq a$ dans un ensemble A de mesure extérieure positive contenu dans B. Posons $E_a = f^{-1}(y \leqq a)$ (y désignant la valeur de f). On a $A \subset E_a$. Il existe donc une couverture mesurable d'égale mesure $\bar{A}$ de A contenue dans E_a. On a donc, en tout point de $\bar{A}$, $f(p) \leqq a$; d'où

$$\mathfrak{I}\bar{A} = \int_{\bar{A}} f(p)\, dm \leqq a.m\bar{A}.$$

Mais par hypothèse $\mathfrak{I}\bar{A} > a.m\bar{A}$. Contradiction.

III. — Système de voisinages. Notion de dérivée évaluée avec un tel système.

6. Au point p de l'espace, supposons attachés des ensembles mesurables $V(p)$, ne contenant pas nécessairement le point p. Supposons en outre définie dans l'ensemble des $V(p)$ une notion de « convergence vers p », (c'est-à-dire qu'on saura distinguer certaines suites V_n qui seront dites « tendre vers p »), vérifiant les conditions suivantes :

1° *Il existe au moins une suite v_n convergeant vers p.*

2° *Si la suite v_n converge vers p, toute suite infinie extraite de v_n converge vers p.*

Une telle notion de convergence s'obtient par exemple si à tout V correspond un paramètre positif $r(V)$ et si l'on convient que la suite V_n converge vers p lorsque $r(V_n)$ tend vers zéro. Elle vérifiera les conditions voulues pourvu qu'il existe des V de paramètre arbitrairement petit.

On dira que les ensembles $V(p)$ ainsi munis d'une notion de convergence forment un *système de voisinages* pour le point p. C'est là une notion différente de celle de « système de voisinages topologiques » (1).

(1) Il s'agit en somme d'une topologie dans l'ensemble des V, pour laquelle le seul élément limite possible est un élément idéal qu'on peut identifier avec p. Les V forment un espace $\mathcal{L}$ au sens de M. Fréchet.

Si l'on ne conserve que certains des voisinages d'un système, ils constitueront encore un système de voisinages à condition qu'il reste des suites convergeant vers p.

Désignons maintenant par σ une fonction d'ensemble définie pour les ensembles mesurables, donc en particulier pour les V. Soit V_n une suite convergeant vers p, et V_{n_i} une suite extraite de V_n et telle que la suite de nombres $\sigma(V_{n_i})$ converge; soit λ sa limite. Par définition, les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble des nombres λ seront appelées les *limites inférieure et supérieure de σ au point p évaluées avec le système de voisinages considéré.* Nous écrirons

$$\overline{\lim_{V \succ p}}\, \sigma(V), \qquad \underline{\lim_{V \succ p}}\, \sigma(V)$$

ou encore, s'il y a lieu de préciser le système $\mathfrak{S}$ de voisinages,

$$\overline{\lim_{\substack{V \succ p \\ \mathfrak{S}}}}\, \sigma(V), \qquad \underline{\lim_{\substack{V \succ p \\ \mathfrak{S}}}}\, \sigma(V).$$

Si à tout point p d'un ensemble A correspond un système de voisinages, nous dirons que l'on a un *système de voisinages pour* A.

7. Dérivée d'une fonction d'ensemble par rapport a un système de voisinages. — Dans un espace mesuré supposons donné un système $\mathfrak{S}$ de voisinages pour l'ensemble des points de l'espace. Soit $\mathfrak{F}$ une fonction réelle d'ensemble, définie pour tout ensemble mesurable; les définitions de la dérivée supérieure $\overline{D}(p)$ et de la dérivée inférieure $\underline{D}(p)$ de la fonction $\mathfrak{F}$ par rapport à la mesure m de l'espace, évaluées avec le système $\mathfrak{S}$, s'imposent d'elles-mêmes : nous poserons

$$\overline{D}(p) = \overline{\lim_{V(p) \succ p}} \frac{\mathfrak{F}[V(p)]}{m[V(p)]}, \qquad \underline{D}(p) = \underline{\lim_{V(p) \succ p}} \frac{\mathfrak{F}[V(p)]}{m[V(p)]}.$$

Il en est de même de la définition des *densités supérieure et inférieure* d'un ensemble mesurable F au point p. Ce seront les dérivées supérieures et inférieures de la fonction $\mathfrak{F}E = m(F \cap E)$ ou, encore, les expressions

$$\overline{\lim_{V \succ p}} \frac{m(F \cap V)}{m(V)}, \qquad \underline{\lim_{V \succ p}} \frac{m(F \cap V)}{m(V)}.$$

IV. — Système de voisinages dérivant une fonction d'ensemble.

8. La question posée précédemment peut maintenant s'énoncer ainsi :

Trouver des conditions relatives à un système $\mathfrak{S}$ de voisinages sous lesquelles les dérivées d'une fonction d'ensemble $\mathfrak{F}$ de base m soient presque partout égales à la pseudo-dérivée de $\mathfrak{F}$ par rapport à m. Nous dirons dans ce cas que le système $\mathfrak{S}$ « dérive la fonction $\mathfrak{F}$ ».

Démontrons d'abord un théorème préliminaire :

Théorème II. — *Soit $\mathfrak{S}$ un système de voisinages, et $\mathfrak{F}$ une fonction d'ensemble de base m, jouissant de la propriété suivante : chaque fois que les* V *d'un système de voisinages extrait de $\mathfrak{F}$ attachés aux points d'un ensemble* A *vérifient l'inégalité $\mathfrak{F}\mathrm{V} > a.m\mathrm{V}$, on a $\mathfrak{F}\overline{\mathrm{A}} > a.m\overline{\mathrm{A}}$, et chaque fois qu'ils vérifient $\mathfrak{F}\mathrm{V} < a.m\mathrm{V}$, on a $\mathfrak{F}\overline{\mathrm{A}} < a.m\overline{\mathrm{A}}$. Dans ces conditions $\mathfrak{S}$ dérive $\mathfrak{F}$.*

Supposons qu'au point p, on ait $\overline{\mathrm{D}} > a$. L'ensemble des $\mathrm{V}(p)$ pour lesquels $\mathfrak{F}\mathrm{V}(p) > a.m\mathrm{V}(p)$ contient alors des suites $\mathrm{V}_n(p)$ tendant vers p, donc constitue un système de voisinages pour le point p. Si donc en tout point p d'un ensemble A, on a $\overline{\mathrm{D}} > a$, il existe un système $\mathfrak{S}_1$ de voisinages pour l'espace, contenu dans $\mathfrak{S}$, et tel que pour tout point p de A et tout $\mathrm{V}(p)$ de $\mathfrak{S}_1$, on ait $\mathfrak{F}\mathrm{V}(p) > a.m\mathrm{V}(p)$. On conclut de là, d'après l'hypothèse, pour toute partie B de A : $\mathfrak{F}\overline{\mathrm{B}} > a.m\overline{\mathrm{B}}$. D'où, d'après le lemme II, l'inégalité $\overline{\mathrm{D}}(p) > a$ en tout point de A entraîne, en presque tout point de A, $f(p) > a$.

On démontre de même que $\underline{\mathrm{D}}(p) < a$ en tout point de A entraîne, en presque tout point de A, $f(p) < a$.

Par conséquent, d'après le lemme I, on a

$$\overline{\mathrm{D}}(p) \leqq f(p), \qquad \underline{\mathrm{D}}(p) \geqq f(p)$$

en presque tout point de l'espace. Par suite, $\overline{\mathrm{D}}(p)$ et $\underline{\mathrm{D}}(p)$ sont des fonctions presque partout égales à $f(p)$, et l'on a

$$\mathfrak{F}E = \int_E \overline{D}(p).dm, \qquad \mathfrak{F}E = \int_E \underline{D}(p).dm.$$

Le système $\mathfrak{S}$ dérive donc la fonction $\mathfrak{F}$.

V. — Systèmes qui dérivent les fonctions à pseudo-dérivée bornée.

9. Étudions les systèmes qui dérivent à la fois toutes les fonctions $\mathfrak{F}$ de base m pour lesquelles il existe un nombre positif k tel que

$$|\mathfrak{F}E| < k.mE.$$

Ce sont les fonctions dont une *pseudo-dérivée est bornée* (lemme II).

Nous démontrerons que ces systèmes peuvent être caractérisés par plusieurs propriétés équivalentes, et pour cela nous prouverons que chacune d'elles entraîne la suivante.

Démontrons d'abord deux théorèmes préliminaires. Soient $\mathfrak{T}$ un système d'ensembles comprenant pour chaque point p une famille d'ensembles mesurables $V(p)$ [nous ne supposons pas qu'il y ait de notion de convergence pour les $V(p)$], et α un nombre fixe tel que $0 < \alpha < 1$.

Théorème III. — *Si le système $\mathfrak{T}$ vérifie la propriété suivante :*

a. Étant donné un ensemble A *de mesure extérieure non nulle, il existe toujours un point p de* A *et un ensemble* $V(p)$ *du système* $\mathfrak{T}$ *tels que*

$$m[\overline{A} \cap V(p)] > \alpha.mV(p),$$

il vérifie aussi la propriété b :

b. Pour tout ensemble A *de mesure extérieure non nulle, il existe une infinité dénombrable d'ensembles* $V_n(p_n)$ *attachés à des points* p_n *de* A, *et tels que l'on ait*

$$m\overline{A} = m\left(\overline{A} \cap \mathbf{S}\, V_n\right), \qquad \sum mV_n < \frac{1}{\alpha}\, m\overline{A}.$$

Commençons par la remarque suivante : soit B un ensemble quelconque; désignons par $\mathcal{V}_B$ la famille des ensembles V du système $\mathfrak{T}$ attachés à des points de B, et qui vérifient la condition

$$m(\overline{B} \cap V) > a . m V,$$

et par μ_B la borne supérieure des mesures de ces voisinages. *Dans ces conditions, on ne peut avoir* $\mu_B = 0$ *que si* $m\overline{B} = 0$.

Nous allons définir par récurrence les ensembles V_n cherchés. Soit $\overline{A}$ une couverture d'égale mesure de A. Supposons $m\overline{A}$ fini; dans le cas contraire on décomposerait $\overline{A}$ en une somme d'ensembles de mesure finie. Choisissons V_0 dans la famille $\mathcal{V}_A$ tel que $m(V_0) > k\mu_A$, k étant un nombre quelconque compris entre zéro et un. Posons

$$A_1 = A - A \cap V_0, \qquad \overline{A}_1 = \overline{A} - \overline{A} \cap V_0.$$

$\overline{A}_1$ est une couverture d'égale mesure de A_1. Si $m\overline{A}_1$ est nul, le théorème est démontré, sinon on répète la même opération sur A_1, avec la même valeur de K. Supposons définis les V_i pour $i < n$; posons

$$A_n = A - A \cap \mathop{\mathfrak{S}}_0^{n-1} V_i, \qquad \overline{A}_n = \overline{A} - \overline{A} \cap \mathop{\mathfrak{S}}_0^{n-1} V_i;$$

$\overline{A}_n$ est une couverture d'égale mesure de A_n. Si $m\overline{A}_n = 0$, le théorème est démontré, sinon choisissons V_n dans la famille $\mathcal{V}_{A_n}$ tel que

$$m V_n > k . \mu A_n. \tag{9,1}$$

Si aucun des $m\overline{A}_n$ n'est nul, nous obtenons une suite dénombrable d'ensembles V_n dont il s'agit de démontrer qu'ils satisfont aux conditions voulues.

On a $m(\overline{A}_n \cap V_n) > \alpha . m V_n$; on en déduit par sommation, en remarquant que les ensembles $\overline{A}_n \cap V_n$ sont étrangers,

$$\begin{aligned} m\overline{A} &\geqq m\left(\overline{A} \cap \mathop{\mathfrak{S}}_0^{\infty} V_n\right) \\ &= m\left(\sum_0^{\infty} \overline{A}_n \cap V_n\right) = m(\overline{A} \cap V_0) + m(\overline{A}_1 \cap V_1) + \ldots > \alpha \sum_0^{\infty} m V_n. \end{aligned} \tag{9,2}$$

Il en résulte la deuxième des relations à démontrer.

$m\overline{A}$ étant fini, on conclut des relations (9,2) que la série $\Sigma m V_n$ est convergente; il en est de même de la série $\Sigma \mu_{A_n}$ d'après (9,1). Par conséquent μ_{A_n} tend vers zéro.

Posons

$$A_\infty = A - A \cap \left(\mathop{S}_{0}^{\infty} V_n \right).$$

Il faut démontrer que l'on a $m\overline{A}_\infty = 0$. De $A_\infty \subset A_n$, on conclut $\mathcal{V}_{A_\infty} \subset \mathcal{V}_{A_n}$, et $\mu_{A_\infty} \leqq \mu_{A_n}$; d'où $\mu_{A_\infty} = 0$. Donc, d'après la remarque du début, $mA_\infty = 0$.

10. Théorème IV. — *Supposons que le système $\mathfrak{V}$ vérifie la condition b du théorème précédent pour tout α inférieur à un, et soit ϑ une fonction d'ensemble de base m, satisfaisant à l'inégalité* $|\vartheta E| < k.mE$.

Si en tout point p d'un ensemble A, *tous les* $V(p)$ *du système* $\mathfrak{V}$ *vérifient la condition* $\vartheta V > a.mV(p)$, *on a* $\vartheta \overline{A} > a.m\overline{A}$. *Le sens des inégalités peut être inversé en changeant ϑ en $-\vartheta$ et a en $-a$.*

Supposons $m\overline{A}$ fini. Pour tout ε positif, il existe par hypothèse une infinité dénombrable d'ensembles V_n du système $\mathfrak{V}$ attachés à des points de A et tels que l'on ait, en posant $V = \mathop{S} V_n$,

$$m\overline{A} = m\overline{A} \cap V, \qquad \Sigma m V_n < m\overline{A} + \varepsilon. \tag{10,1}$$

De $\vartheta V_n > a.mV_n$, on déduit $\Sigma \vartheta V_n > a.\Sigma m V_n$. Or nous allons démontrer que l'on a

$$|\vartheta \overline{A} - \Sigma \vartheta V_n| < 2\varepsilon k. \tag{10,2}$$

$$|m\overline{A} - \Sigma m V_n| < \varepsilon. \tag{10,3}$$

ε étant arbitraire, il en résultera immédiatement la conclusion voulue.

Tout d'abord (10,3) résulte de (10,1) en remarquant que l'on a

$$\Sigma m V_n \geqq mV \geqq m(V \cap \overline{A}) = m\overline{A}.$$

Pour démontrer (10,2), remplaçons les V_n par des ensembles étrangers V'_n, contenus respectivement dans les V_n, et tels que

$\sum V'_n = \mathbf{S}\, V_n = V$. Posons pour cela

$$V'_0 = V_0, \qquad V'_n = V_n - \left(V_n \cap \mathbf{S}_1^{n-1} V_i\right), \qquad V''_n = V'_n - V_n.$$

Posons enfin $C = V - \overline{A} \cap V$.

On a, en tenant compte de (10, 1),

$$\Sigma m V_n = \Sigma m V'_n + \Sigma m V''_n = m V + \Sigma m V''_n,$$
$$\Sigma m V_n = m(\overline{A} \cap V) + m C + \Sigma V''_n = m \overline{A} + m C + \Sigma m V''_n < m \overline{A} + \varepsilon.$$

La dernière inégalité donne

$$m C < \varepsilon, \qquad \Sigma m V''_n < \varepsilon.$$

Opérant avec $\mathfrak{I}$ comme on vient d'opérer avec m, on obtient

$$\Sigma \mathfrak{I} V_n = \mathfrak{I} V + \Sigma \mathfrak{I} V''_n = \mathfrak{I}(\overline{A} \cap V) + \mathfrak{I} C + \Sigma \mathfrak{I} V''_n,$$

et comme

$$|\mathfrak{I}\overline{A} - \mathfrak{I}(\overline{A} \cap V)| = |\mathfrak{I}(\overline{A} - \overline{A} \cap V)| < K.m(\overline{A} - \overline{A} \cap V) = 0,$$

on a

$$|\mathfrak{I}\overline{A} - \Sigma \mathfrak{I} V_n| \leqq |\mathfrak{I} C| + \Sigma |\mathfrak{I} V''_n| < K(m C + \Sigma m V''_n) < 2\varepsilon K.$$

11. Pour formuler les théorèmes qui vont suivre, il est commode d'introduire quelques définitions :

Nous dirons qu'un système $\mathfrak{S}$ *de voisinages pour l'espace vérifie la propriété* A *ou* B *si tout système de voisinages contenu dans* $\mathfrak{S}$ *vérifie la propriété a ou b, pour tout nombre* $\alpha < 1$.

A et B s'énoncent donc ainsi :

Étant donné un système $\mathfrak{S}_1$ *contenu dans* $\mathfrak{S}$, *un ensemble* A *de mesure extérieure non nulle, et un nombre* α *tel que* $0 < \alpha < 1$.

A. *Il existe toujours un point* p *de* A *et un ensemble* $V(p)$ *du système* $\mathfrak{S}_1$ *tel que*

$$m[\overline{A} \cap V(p)] > \alpha . m\, V(p).$$

B. *Il existe toujours une infinité dénombrable d'ensembles* $V_n(p_n)$ *du* *système $\mathfrak{S}_1$, attachés à des points p_n de* A, *et tels que l'on ait*

$$m\bar{A} = m\left(\bar{A} \cap \mathop{\mathrm{S}} V_n\right), \qquad \sum m V_n < \frac{1}{\alpha} m\bar{A}.$$

Le théorème III conduit alors à l'énoncé suivant :

Théorème V. — *Si un système de voisinages vérifie* A, *il vérifie aussi* B.

Le théorème IV joint au Théorème II donne immédiatement le théorème suivant :

Théorème VI. — *Si un système de voisinages vérifie* B, *il dérive toute fonction de base m à pseudo-dérivée bornée.*

Nous appellerons dans la suite C la propriété pour un système de voisinages de dériver toute fonction à pseudo-dérivée bornée. Nous avons le théorème suivant :

Théorème VII. — *Si un système $\mathfrak{S}$ de voisinages vérifie* C, *il vérifie aussi la propriété suivante* D :

D. *La densité inférieure de tout ensemble mesurable* E *évaluée avec le système $\mathfrak{S}$, est égale à* 1 *en presque tout point de* E.

En effet, les densités inférieure et supérieure de l'ensemble mesurable E sont les dérivées inférieure et supérieure de la fonction $\vartheta F = m(F \cap E)$. Ces densités sont donc presque partout égales à une fonction f telle que $m(F \cap E) = \int_F f(p).dm$.

Pour tout ensemble $A \subset E$, il existe une couverture mesurable $\bar{A} \subset E$, et l'on a $\vartheta \bar{A} = m\bar{A}$; par conséquent, si $m\bar{A}$ n'est pas nul,

$$\vartheta \bar{A} > (1 - \varepsilon)\, m\bar{A},$$

D où, d'après le lemme II, $f(p) > 1 - \varepsilon$ en tout point de E sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle E_ε. Donnons à ε une suite de valeurs ε_i tendant vers zéro. On a $f(p) = 1$ en tout point de E sauf aux points de l'ensemble $\mathop{\mathrm{S}}\limits_1^\infty E_{\varepsilon_i}$ qui est de mesure nulle. Par conséquent, les deux densités sont égales à 1 en presque tout point de E.

Il est à remarquer que l'on aurait de même $f(p) = 0$ en presque tout point du complémentaire de F. C'est évident d'après la relation

$$\textit{densité supérieure de } E = 1 - \textit{densité inférieure de } E.$$

THÉORÈME VIII. — *Si un système* $\mathfrak{S}$ *de voisinages vérifie* D, *il vérifie aussi la propriété suivante* E.

E. *Étant donné un ensemble* A *de mesure extérieure non nulle il existe toujours un point p de* A *où la densité inférieure de* A *évaluée au moyen de* $\mathfrak{S}$ *est égale à* 1.

En effet, on a en tout point de $\overline{A}$,

$$\textit{densité inférieure de } A = 1,$$

sauf aux points d'un ensemble A_0 de mesure nulle. L'égalité est donc vraie aux points de $A - A \cap A_0$, donc au moins en un point.

Enfin, il est évident que si un système $\mathfrak{S}$ vérifie E, il vérifie aussi A. Par conséquent *les cinq propriétés* A, B, C, D, E *sont équivalentes et caractérisent les systèmes dérivant les fonctions à pseudo-dérivée bornée.*

Nous nommerons *système de voisinages en mesure pour l'espace mesuré* $\mathfrak{E}$ les systèmes de voisinages qui satisfont à l'une de ces cinq propriétés.

De l'une quelconque des propriétés A, B, C, résulte immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *Tout système de voisinages extrait d'un système de voisinages en mesure est encore un système de voisinages en mesure.*

VI. — Exemples.

12. Prenons comme espace mesuré le plan muni de la mesure de Lebesgue. On obtient des systèmes de voisinages en mesure en prenant par exemple pour voisinages du point p tous les cercles de centre p ou tous les cercles contenant p ou encore tous les carrés contenant p, et en convenant dans chaque cas qu'une suite de voisinages de p converge vers p lorsque leur diamètre tend vers zéro. Ces systèmes dérivent non seulement les fonctions d'ensemble à dérivée bornée mais aussi toutes les fonctions qui sont finies sur tout ensemble de mesure finie. Ce sont des théorèmes bien connus de la théorie de la mesure; *voir* par exemple CARATHÉODORY, *Reelle Funktionen*, Kap. IX. Il en est de même de systèmes beaucoup plus généraux, CARATHÉODORY, *loc. cit.*

Il ne faut pas croire cependant que tout système de voisinages en mesure du plan muni de la mesure de Lebesgue dérive toute fonction finie sur tout ensemble de mesure finie. Par exemple, le système obtenu, en attachant à tout point tous les rectangles qui ont pour centre ce point et dont les côtés sont parallèles à des directions fixes, avec la même condition de convergence que ci-dessus, est un système de voisinages en mesure. En effet, pour un tel système, la densité de tout ensemble mesurable est égale à 1 en presque tous ses points (*voir* par exemple S. SAKS, *Théorie de l'intégrale*, p. 231). Cependant, ce système n'est pas dérivant pour certaines fonctions finies sur tout ensemble de mesure finie (*loc. cit.*, p. 232).

Quant au système $\mathcal{R}$ de tous les rectangles de centre p, toujours avec la même condition de convergence, ce n'est pas un système de voisinages en mesure (*loc. cit.*, p. 232). O. Nikodym a en effet construit un ensemble plan fermé, de mesure positive, tel que pour presque tout point p de cet ensemble, il existe un intervalle rectiligne ouvert dont l'intersection avec l'ensemble se réduit au point p (*Fund. Math.*, 10, 1927, p. 116-168). La densité inférieure de cet ensemble évaluée avec le système $\mathcal{R}$ est donc presque partout égale à zéro, et par suite $\mathcal{R}$ n'est pas un système de voisinages en mesure.

VII. — Relations entre plusieurs systèmes de voisinages en mesure.

13. A partir d'un système de voisinages en mesure, on en obtient d'autres au moyen du théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *Soit $\mathcal{S}$ un système de voisinages en mesure* $\mathrm{V}(p)$. *A chaque* $\mathrm{V}(p)$ *associons un ensemble mesurable* $\mathrm{W}(p)$ *de telle sorte que l'on ait*

$$\underset{\mathrm{V}(p)\to p}{\underline{\lim}} \frac{m\mathrm{W}}{m\mathrm{V}} > 0, \qquad \underset{\mathrm{V}(p)\to p}{\overline{\lim}} \frac{m(\mathrm{W} \cap \complement \mathrm{V})}{m\mathrm{V}} = 0$$

en presque tout point p.

Considérons le système de voisinages Σ formé des ensembles $W(p)$, en convenant que la suite $W_n(p)$ converge vers p lorsqu'il en est ainsi de la suite correspondante $V_n(p)$. Dans ces conditions, le système Σ est encore un système de voisinages en mesure.

Soit A un ensemble quelconque de mesure extérieure positive. De la relation évidente

$$(\complement\bar{A}\cap W)\subset(\complement\bar{A}\cap V)\;(\complement V\dotplus\cap W),$$

on déduit

$$m(\complement\bar{A}\cap W)\leqq m(\complement\bar{A}\cap V)+m(\complement V\cap W);$$

d'où

$$(1)\qquad 1-\frac{m(W\cap\bar{A})}{mW}\geqq\left(\frac{m(\complement\bar{A}\cap V)}{mV}+\frac{m(\complement V\cap W)}{mV}\right)\frac{mV}{mW}.$$

Soit $\mathfrak{S}_1$ un système quelconque extrait de $\mathfrak{S}$, et Σ_1 le système correspondant extrait de Σ. Prenons les limites supérieures des deux membres de (1), par rapport aux systèmes $\mathfrak{S}_1$ et Σ_1 : en presque tout point de $\bar{E}$, le premier terme du premier facteur du second membre a pour limite supérieure zéro, puisque $\mathfrak{S}$ est un système de voisinages en mesure, le deuxième terme a pour limite supérieure zéro par hypothèse, et le second facteur a une limite supérieure finie également par hypothèse. On a donc, en presque tout point de A, et pour tout système Σ_1 extrait de Σ,

$$1-\varlimsup_{\substack{V\to p\\ \Sigma}}\frac{m(W\cap\bar{A})}{mW}=0.$$

Le système Σ jouit donc de la propriété A et par conséquent est un système de voisinages en mesure.

VIII. — Un théorème sur la dérivation des fonctions finies sur tout ensemble de mesure finie.

14. Considérons un système de voisinages jouissant de la propriété de recouvrement B^* que l'on déduit de B en supposant les ensembles V_n étrangers les uns aux autres :

B^*. *Étant donné un système $\mathfrak{S}_1$ de voisinages contenu dans $\mathfrak{S}$, un* *ensemble* A *de mesure extérieure non nulle, et un nombre positif* ε, *il existe toujours une infinité dénombrable d'ensembles étrangers les uns aux autres* $V_n(p_n)$ *attachés à des points* p_n *de* A, *et tels que l'on ait*

$$m\overline{A} = m(\overline{A} \cap \Sigma V_n), \qquad \Sigma m V_n < m\overline{A} + \varepsilon.$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème X. — *Un système de voisinages qui vérifie* B^* *dérive toute fonction* $\mathfrak{I}$ *de base m qui est finie pour tout ensemble de mesure finie.*

Il suffit pour cela de prouver que si tous les V d'un système partiel $\mathfrak{S}_1$ attachés aux points d'un ensemble A vérifient l'inégalité

$$\mathfrak{I}V > a.mV \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{I}V < a.mV,$$

on a

$$\mathfrak{I}\overline{A} > a.m\overline{A} \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{I}\overline{A} < a.m\overline{A},$$

la conclusion résultant alors du théorème II.

Pour tout nombre ε, on peut trouver dans $\mathfrak{S}_1$ des V_n attachés à des points de A tels que en posant, comme au n° 10,

$$V = \Sigma V_n, \qquad C = V - V \cap \overline{A},$$

on ait

$$mC < \varepsilon, \qquad m(V \cap \overline{A})\, m\overline{A}.$$

De

$$\mathfrak{I}V_n > a.mV_n \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{I}V_n < a.mV_n,$$

on déduit alors par sommation

$$\mathfrak{I}V > a.mV \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{I}V < a.mV;$$

d'où

$$\mathfrak{I}\overline{A} + \mathfrak{I}C > a(m\overline{A} + mC) \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{I}\overline{A} + \mathfrak{I}C < a(m\overline{A} + mC).$$

Il suffit de prouver que pour tout nombre η, il existe un ε assez petit pour que l'on ait $|\mathfrak{I}C| < \eta$.

Donnons à ε une suite de valeurs ε_i, telles que la série $\sum_1^\infty \varepsilon_i$ converge. Soient C_i les ensembles C correspondants. Posons

$$B = \mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\infty} C_i, \qquad B_n = \mathop{\mathbf{S}}_{n}^{\infty} C_n.$$

On a alors

$$mB \leqq \sum_{1}^{\infty} m C_i < \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_i,$$

donc mB est fini, et par conséquent $\mathfrak{S}B$ est fini. Les B_n forment une suite non décroissante dont l'intersection est vide, et sont tous contenus dans l'ensemble B de mesure finie. Si donc on décompose $\mathfrak{S}$ en ses parties positive et négative sous la forme $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ - \mathfrak{S}^-$, les suites $\mathfrak{S}^+ B_n$ et $\mathfrak{S}^- B_n$ tendent vers zéro. On a donc, à partir d'un indice n assez grand : $\mathfrak{S}^+ B_n < \eta$ et $\mathfrak{S}^- B_n < \eta$, donc, *a fortiori*, $\mathfrak{S}^+ C_n < \eta$ et $\mathfrak{S}^- C_n < \eta$, d'où $|\mathfrak{S}C| < \eta$.

Enfin, il est évident que *tout système extrait d'un système qui vérifie* $B^\star$ *vérifie encore la même propriété.*