JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. HADAMARD

La caustique des enveloppes à deux paramètres

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 333-337.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__333_0>

La caustique des enveloppes à deux paramètres;

PAR J. HADAMARD,
Université de Paris.

Je ne sais s'il a été remarqué que le fait classique de l'existence d'une arête de rebroussement ou caustique ([1]) pour l'enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre se rencontre également pour les surfaces dépendant de deux paramètres.

1. Rappelons d'abord que, cas classique, le fait en question se rattache aux propriétés de la représentation paramétrique des surfaces.

Soit, pour une surface S,

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \tag{1}$$

une telle représentation. Il peut arriver que les trois déterminants fonctionnels

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \tag{2}$$

s'annulent simultanément.

([1]) Nous proposons de substituer la seconde dénomination à la première, en raison du fait qu'une caustique peut elle-même présenter, et présente effectivement dans des cas généraux et importants, des points de rebroussement, que nous avons étudiés dans les *C. R. du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays slaves*, 1930 (p. 318) et dans le tome LIV des *Acta Mathematica*, p. 247.

Si cela a lieu identiquement (¹) en u et v, les formules (1) ne définissent plus une surface, mais une ligne.

Le cas opposé est celui où les trois déterminants (2) s'annuleraient en un point unique ou en des points isolés. On trouve alors pour S des points singuliers, la curieuse singularité connue sous le nom de « point-pince ».

Enfin, le cas intermédiaire donne, en général, une arête de rebroussement; et si les enveloppes à un paramètre présentent des rebroussements le long de leurs caustiques, c'est précisément pour cette raison, une telle enveloppe étant, comme on sait, engendrée par des lignes caractéristiques, lesquelles sont toutes tangentes à la caustique.

Il est d'ailleurs bien connu que la ligne de rebroussement ainsi obtenue peut dégénérer en une ligne « d'arrêt ». C'est ainsi que la développable engendrée par les tangentes à une ligne L de l'espace devient, lorsque L est plane, une *portion* de plan recouverte deux fois, les deux feuillets ainsi superposés représentant un cas limite des deux nappes d'une développable.

2. Arrêtons-nous encore un instant sur ce cas du plan. D'une manière générale, écrivons, dans le plan des xy, les deux formules

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \tag{1'}$$

les seconds membres étant [comme nous le supposerons également pour les formules (1)] dépourvus de singularités, c'est-à-dire continus et à dérivées continues dans les régions sur lesquelles nous portons notre attention. Nous supposerons que ces seconds membres sont des fonctions indépendantes, de sorte que le lieu du point (x, y) ainsi défini ne se réduit pas à une ligne. Mais il n'en résulte pas que le point en question puisse occuper n'importe quelle position dans le plan lorsque u et v prennent tous les systèmes de valeurs réelles possibles : il arrivera assez généralement que les points (x, y) pour lesquels le système (1′) admet en u, v des solutions réelles remplissent seulement une certaine portion R du plan.

(¹) *Voir* à ce sujet notre article de l'*Enseignement mathématique*, t. XVI, 1914, p. 356.

Le contour L de R sera alors formé de points en lesquels le système (1') admettra une solution double, c'est-à-dire en lesquels le déterminant fonctionnel $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ s'annulera. En de tels points, les lignes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ (si elles n'ont pas de points singuliers) seront tangentes entre elles : la ligne L sera l'enveloppe des lignes $u = \text{const.} = u_1$ lorsque u_1 variera et, de même, l'enveloppe des lignes $v = \text{const.} = v_1$ lorsque v_1 variera.

Aux équations (1'), on peut substituer deux équations de la forme

$$g(x, y, u, v) = 0, \qquad h(x, y, u, v) = 0,$$

et, là encore, la ligne limite ou « ligne d'arrêt » L sera définie par la relation

$$\frac{D(g, h)}{D(u, v)} = 0.$$

3. Ce qui se passe sur le plan se passe de même sur une surface déterminée quelconque

$$f(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

si l'on définit un point de cette surface en adjoignant à son équation les deux conditions

$$g(x, y, z; u, v) = 0, \qquad h(x, y, z; u, v) = 0.$$

Supposons que les trois équations ainsi écrites soient régulières au point de vue du théorème des fonctions implicites, c'est-à-dire que leur déterminant fonctionnel en x, y, z ne s'annule pas. Ces trois coordonnées cartésiennes étant ainsi exprimables en fonction de u, v, leurs dérivées partielles par rapport à u sont données par les trois équations du premier degré (à déterminant non nul)

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{\partial g}{\partial u}, \\ &\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \ldots\ldots + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{\partial h}{\partial u}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

De même, les dérivées par rapport à v sont données par l'équation analogue à (4) jointe à

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} &= -\frac{\partial g}{\partial v}, \\ \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} &= -\frac{\partial h}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Si le déterminant fonctionnel $\frac{D(g, h)}{D(u, v)}$ est nul, les seconds membres des équations (5′) sont proportionnels à ceux des équations (5) et, dès lors, les rapports mutuels des inconnues sont les mêmes dans les deux cas. Le lieu L des points en lesquels cette circonstance se présente sera donc encore, sur la surface (3), une ligne d'arrêt servant de contour à la région où peuvent se trouver les points correspondant à des valeurs réelles de u, v.

4. Venons maintenant au cas d'une enveloppe à deux paramètres, celle de la famille de surfaces

$$F(x, y, z;\, u, v) = 0.$$

Nous allons voir qu'on est alors conduit à un calcul tout semblable à celui que nous venons d'indiquer en dernier lieu, à ceci près qu'on est alors en présence d'une véritable arête de rebroussement et non plus d'une ligne d'arrêt.

Les points caractéristiques, sur l'une quelconque des surfaces de la famille, sont définis par les équations

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

Nous supposerons encore que le jacobien

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial z} \end{vmatrix}$$

des trois premiers membres est différent de zéro. Formons encore par différentiation de ces équations, les équations du premier degré en $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$. Suivant une remarque classique, nous trouvons d'abord une équation

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0, \tag{6}$$

dépourvue de terme indépendant des inconnues; les deux autres équations sont

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{\partial^2 F}{\partial u^2},\\ &\frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}.\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Pareillement, les équations en $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ seront

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0 \tag{6'}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v},\\ &\frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.\end{aligned}\right. \tag{7'}$$

Si les seconds membres des équations (7') sont proportionnels à ceux des équations (7), c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}\right)^2=0, \tag{8}$$

les rapport mutuels des dérivées $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ seront les mêmes que ceux de $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ et, par conséquent, la ligne L, lieu des points où cette relation (8) sera vérifiée en même temps que $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial u}=0$, $\frac{\partial F}{\partial v}=0$ *sera encore une arête de rebroussement.*

L'identité de ce calcul avec celui qui avait été donné au numéro précédent provient, comme on le voit, de la disparition des termes $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ dans la différentiation de F.