JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANDRÉ MARCHAUD

Les surfaces du second ordre en Géométrie finie

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 293-300.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__293_0>

Les surfaces du second ordre *en Géométrie finie;*

PAR ANDRÉ **MARCHAUD**.

INTRODUCTION. — La *Géométrie finie* est l'étude de certaines courbes et surfaces envisagées uniquement au point de vue *réel.* Ces courbes et surfaces ne sont pas nécessairement algébriques ni même analytiques, mais elles possèdent un *ordre de réalité*, ou plus simplement un *ordre déterminé*. L'*ordre* d'une courbe plane (ou gauche) est la borne supérieure du nombre de ses points sur toute droite de son plan (ou sur tout plan de l'espace). L'*ordre* d'une surface est la borne supérieure du nombre de ses points d'intersection avec une droite quelconque. Courbes et surfaces sont projectivement fermées. Enfin, pour ne pas écarter les surfaces réglées et même celles du troisième degré, on suppose que toute droite ayant plus de n points sur une surface d'ordre n y est contenue tout entière. L'analogie entre l'*ordre* des courbes et surfaces de la Géométrie finie et le *degré* des courbes et surfaces de la Géométrie algébrique est immédiate. Il faut cependant observer que l'ordre d'une courbe algébrique, par exemple, considérée en Géométrie finie, peut être moindre que son degré. (La courbe plane d'équation $x^4+y^4=0$, est du second ordre.) Ce qui fait l'intérêt de la généralisation apportée par la Géométrie finie, c'est que bien des propriétés des courbes et surfaces de *degré n* appartiennent à celles d'*ordre n*, surtout pour les petites valeurs de n. C. Juel a édifié une théorie d'ensemble des courbes et surfaces d'ordre peu élevé, et obtenu des résultats remarquables, mettant en évidence la richesse de la notion d'*ordre*. Le plus justement célèbre est certainement celui relatif à la distribution des droites sur les surfaces du troisième ordre, distribution qui conduit exactement au même énoncé que pour les surfaces algébriques du troisième degré (¹).

Mais les courbes et surfaces considérées par C. Juel sont malgré tout soumises à de nombreuses restrictions. Les courbes planes, par exemple, sont des *courbes élémentaires*, c'est-à-dire formées par un nombre fini d'arcs convexes à tangente partout placés bout à bout. Les surfaces sont supposées avoir partout un plan tangent variant continuement avec le point de contact, de plus, leurs sections planes et contours apparents doivent être des courbes élémentaires. Il est naturel de chercher à s'affranchir de celles des hypothèses qui ne sont encore là que pour la commodité. C'est ce que j'ai fait dans deux mémoires antérieurs en ce qui concerne les courbes (²). Dans l'espace euclidien projectif à n dimensions, un continu est d'ordre borné s'il a un nombre borné de points sur toute multiplicité linéaire à $n-1$ dimensions, son ordre est la borne supérieure du nombre de ces points. J'ai montré que tout continu d'ordre borné est forcément une courbe de Jordan, d'autant plus simple que son ordre se rapproche davantage de n. Dans le cas du plan ($n=2$) un continu d'ordre deux est une courbe simple de Jordan, ouverte ou fermée, un continu d'ordre trois est une courbe de Jordan ouverte ou fermée ayant au plus un point double, ou bien la somme de deux arcs ayant au plus un point commun (³). Si l'on suppose que chaque extrémité d'arc est extrémité pour un nombre pair d'arcs, on obtient les courbes de Jordan d'ordre trois au plus, qui se trouvent ainsi définies avec le minimum d'hypothèses (⁴).

(¹) C. Juel, *Einleitung in die Theorie des Elementarflächen dritter Ordnung* (*Math. An.*, Bd. LXXVI, p. 548-574).

Sur la *Géométrie finie* et sur les travaux de C. Juel, on consultera avec profit un très intéressant article de M. Paul Montel, paru sous ce titre, *Bull. Sc. Math.*, t. XLVIII, 1924, p. 109-128.

(²) A. Marchaud, *Sur les continus d'ordre borné* (*Acta Math.*, t. 55, p. 67-115) et *Sur diverses extensions de la notion de continu d'ordre borné* (*Ann. Éc. Norm.*, 3ᵉ série, t. XLIX, p. 113-136).

(³) *Continus d'ordre borné*, nᵒˢ 5, 12 et 15. *Diverses extensions...*, nº 21.

(⁴) La définition des courbes (planes) d'ordre supérieur à 3, si l'on veut ne considérer que celles ayant un nombre fini de points doubles, demande une hypothèse supplémentaire : limitation du nombre des points de ramification

Si l'on veut faire quelque chose de semblable pour les surfaces, on se trouve en présence d'une difficulté supplémentaire. Il est évident, en effet, qu'un continu de l'espace à trois dimensions ne sera pas forcément une surface s'il a seulement un nombre borné de points sur toute droite (même en donnant au mot *surface* un sens aussi large que possible, par exemple : continu de dimension deux au sens d'Urysohn). Une condition complémentaire sera donc indispensable. L'analogie avec les surfaces algébriques donne l'idée de faire intervenir les sections planes, et de chercher si un continu dont les sections planes sont des courbes d'ordre borné peut être considéré comme une surface, au sens élémentaire du mot : ensemble décomposable en morceaux de surfaces de Jordan sans point double. La réponse est affirmative si les sections planes sont des courbes *fermées* d'ordre trois au plus (il suffit même de considérer non pas un continu, mais un ensemble fermé sans point isolé) (1). Bien entendu il faudra étendre le champ des courbes fermées d'ordre trois au plus, et considérer des courbes décomposées, c'est-à-dire contenant des droites ou des points isolés. Une courbe d'ordre trois pourra être constituée par deux courbes de Jordan distinctes.

Ainsi les surfaces d'ordre trois au plus de la Géométrie finie pourront être définies d'une manière très directe sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir la notion de surface dans leur définition.

(*continus d'ordre borné*, n° 6). D'ailleurs, à partir de l'ordre 4, les choses se compliquent d'une autre manière : une courbe d'ordre 3 est nécessairement une somme d'arcs convexes placés bout à bout (*Mémoire cité*, n° 17), il en résulte que, si elle a une tangente partout, cette tangente varie continuement. Ceci n'a plus lieu pour les courbes d'ordre 4 (*Mémoire cité*, n° 21). D'une manière générale, dans l'espace à n dimensions, c'est à partir de l'ordre $n+2$ que les choses se compliquent. *Voir* OTTO HAUPT, *Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung* (*Math. Ann.*, Bd. **108**, 1933, p. 108).

(1) Dans un article précédent : *Sur les surfaces convexes* (*Bull. Sc. math.*, t. LVIII, 1934, p. 52-57), j'avais obtenu un résultat analogue, valable seulement pour les surfaces convexes : un ensemble fermé, ayant deux points au plus sur toute droite et dont chaque section plane est un continu, est une surface fermée convexe ou une calotte de telle surface à bord plan.

Comme pour les courbes planes, les choses se compliquent à partir de l'ordre quatre.

Je ne traiterai ici que le cas des surfaces du second ordre, lequel est particulièrement simple et élémentaire. Le cas des surfaces du troisième ordre demanderait plus de développements. Il fera l'objet d'un mémoire spécial.

1. Il s'agira d'ensembles fermés de l'espace projectif euclidien à deux ou trois dimensions. Nous nous occuperons d'abord des courbes du second ordre.

Un continu plan ayant deux points au plus sur toute droite est une courbe de Jordan ouverte ou fermée (1). Si on la suppose fermée, on obtient la *courbe du second ordre non décomposée*, qui est ainsi définie d'une manière aussi directe que possible à partir de la notion de continu. Les propriétés de cette courbe nécessaires pour la suite, sont les suivantes. Le lecteur les établira aisément. Elles sont d'ailleurs tout à fait intuitives.

Soit C une courbe du second ordre non décomposée.

1° Si C a deux points sur une droite, elle la traverse en chacun d'eux.

2° Il existe des droites n'ayant aucun point sur C. On pourra par suite ramener la courbe à distance bornée par une transformation homographique. C'est alors un *ovale*.

3° Un ovale partage le plan en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure. Toute demi-droite issue d'un point intérieur coupe l'ovale en un point et un seul. Un ovale C′ ayant un point intérieur et un point extérieur à un ovale C le coupe en deux points au moins.

Une quadrique non décomposée est coupée par ses plans tangents suivant une conique décomposée. Si donc nous voulons définir les surfaces du second ordre comme des ensembles dont les sections planes sont des courbes du second ordre, il sera nécessaire de considérer des courbes décomposées. Celles-ci seront soit un système de

---

(1) *Sur les continus d'ordre borné*, n° 12. *Sur diverses extensions...*, n° 21.

deux droites, soit un point isolé. Pour respecter l'égalité entre l'ordre de la courbe et l'ordre de l'ensemble de points qu'elle constitue, il faudra considérer un point isolé comme un point double. Mais cette convention n'est pas indispensable. On remarquera que nous n'avons pas ici de courbe du second ordre analogue à la droite double de la Géométrie algébrique. Dans ce qui suit un point compte toujours pour *un* sauf si l'on veut les points isolés.

Enfin il faudra aussi considérer des courbes du second ordre dans le plan de l'infini. Une telle courbe est l'ensemble des points à l'infini d'un cône ayant pour base une courbe du second ordre.

2. Ceci posé, *soit S un ensemble fermé dont toute section plane est une courbe du second ordre au plus*, l'une au moins : C étant du second ordre et non décomposée. (Les courbes du premier ordre sont naturellement les droites.) Je vais montrer que S est une surface, en distinguant deux cas suivants que S contient ou non au moins une droite.

1° *S contient une droite D.* — C et D ont un point commun et un seul : O. Soit m un point de C distinct de O. Le plan (D, m) coupe nécessairement S suivant une seconde droite M, qui rencontre D en un point μ distinct de O, sans quoi le plan de C couperait S suivant C et une droite. Considérons deux points distincts m_1 et m_2, et les points correspondants μ_1 et μ_2. Je dis que si μ_1 et μ_2 sont confondus, μ est fixe. Il en résultera que S se réduit au cône (ou cylindre) (μ, C), car il ne peut évidemment avoir de point en dehors de cette surface. Soit donc m_3 un troisième point. Il s'agit de montrer que μ_3 est confondu avec μ_1 et μ_2. Supposons le contraire. Les plans (M_1, m_2) et (M_3, m_2) ont au moins une droite commune, qui coupe les droites M_1, M_2, M_3 aux points m'_1, m_2, m'_3, respectivement. Si m'_1 est distinct de μ_1, le plan (M_1, M_2) coupe S suivant trois droites, ce qui est impossible. Il faut donc que m'_1 soit en μ_1, mais alors M_2 rencontre M_3, ce qui donne encore un plan coupant S suivant trois droites.

Reste à examiner le cas où à trois points m distincts correspondent trois points μ distincts. Alors trois droites M_1, M_2, M_3 définissent une quadrique réglée non décomposée Q. Il est presque évident que S se réduit à Q. Soit G une génératrice de Q, rencontrant les M_i. La section de S par le plan (M_1, G) contient G, puisque cette droite a trois points sur S. Q est donc contenue dans S. Mais ce dernier ne peut évidemment avoir de point en dehors de Q.

En résumé, si S renferme au moins une droite, c'est un cône (ou cylindre) convexe ou bien une *quadrique réglée* non décomposée.

5. 2° S *ne contient aucune droite.* — Je vais d'abord montrer que, dans ce cas, il y a des plans qui ne coupent pas S. En faisant au besoin une transformation homographique, on peut supposer C dans le plan de l'infini. Considérons le cône (c) de sommet, un point donné O et de directrice C. Soient d et d_1 deux génératrices distinctes de ce cône et p un plan coupant le cône au seul point O. Désignons par l l'intersection des plans (d, d_1) et p. Les sections de S par les plans parallèles à p sont des ovales ou des points isolés, à moins qu'elles ne soient vides. Les sections par les plans parallèles à (d, d_1) existent toujours, ce sont des courbes non décomposées ayant deux points à l'infini : ceux de d et de d_1. Considérons l'une d'elles. Il est possible de trouver dans son plan une sécante parallèle à l la coupant en deux points. La section de S par le plan P mené par cette sécante parallèlement à p est un ovale s. Soient alors Σ et Σ_1 les cylindres de directrice s et de génératrices respectivement parallèles à d et d_1, P' un plan parallèle à P, mais distinct, et enfin s', σ' et σ'_1 les sections respectives de S, Σ et Σ_1 par P'. Il résulte de la propriété 3° du n° **1** que, si il existe, s' est soit intérieur soit extérieur à σ' et à σ_1. En effet, considérons par exemple σ'. Si s' avait un point intérieur et un point extérieur à σ', les deux ovales auraient au moins un point commun, et la génératrice de Σ passant par ce point aurait deux autres points sur S (un sur s, l'autre à l'infini), ce qui est impossible puisque S ne contient aucune droite. La conclusion subsiste si s' et σ' ont un point commun.

Considérons maintenant la partie commune aux deux cylindres considérés comme solides. C'est un domaine R borné et fermé. La section de R par P' est la partie commune aux domaines plan limité par σ' et σ'_1. Je dis qu'on peut choisir P' de manière que s' existe et soit intérieur à la fois à σ' et à σ_1. Supposons le contraire, et prenons sur s deux points a et b situés sur une parallèle à l. Menons par a et b les génératrices de Σ et Σ_1, soient A et B pour Σ, A_1 et B_1 pour Σ_1. La section de R par le plan (A, B) est un parallélogramme limité par les droites A, A_1, B et B_1. D'après notre hypothèse, ce parallélogramme ne renferme aucun point de S à son intérieur. Considérons la section de S par le plan (A, B). Cette courbe est au voisinage de a dans les angles formés par A et A_1 ne contenant pas la droite ab, et au voisinage de b dans les angles formés par B et B_1 ne contenant pas la même droite ab. En effet, cette courbe doit traverser en a les droites A et A_1, et en b les droites B et B_1 (n° **1**, 1°). Mais alors un plan P′ suffisamment voisin de P coupera la courbe en question en deux points, l'un intérieur, l'autre extérieur à σ', ce qui, on l'a vu, est impossible.

L'ensemble S contient donc des points intérieurs à R, car un point intérieur à la fois à σ' et σ'_1 est intérieur à R. Soit alors S.R l'ensemble commun à S et à R. Cet ensemble est borné et fermé. Il a des points en dehors de P, d'un certain côté, le dessus si l'on veut, en supposant P horizontal. Soit h la borne supérieure, nécessairement positive. de la cote des points de S.R. Le plan P″ de cote h coupe Σ, Σ_1 et S suivant des ovales σ'', σ''_1 et s'', ce dernier pouvant se réduire à un point. D'après la remarque précédente, s'' est intérieur à σ'' et σ''_1, car il a au moins un point intérieur à chacun de ces ovales : un point de S.R ayant la cote maximum h, puisque S.R est fermé. Je dis qu'un plan de cote légèrement supérieure à h n'aura aucun point sur S. Supposons le contraire, il existe alors sur S une suite de points de cote supérieure à h, donc n'appartenant pas à S.R, ces cotes ayant pour limite h. La suite admet au moins un point d'accumulation sur s'', puisque S est fermé. Mais ce point ne peut être intérieur à R, c'est-à-dire intérieur à la fois à σ'' et σ''_1. Il y a donc contradiction.

Il est donc bien établi que si S ne renferme aucune droite, on peut trouver un plan ne le coupant pas. Prenons ce plan pour plan de l'infini. S sera tout entier à distance bornée. Soient alors m_1 et m_2 deux points de S, et I un point du segment m_1m_2, compris entre m_1 et m_2. Menons par I une demi-droite δ. Le plan (m_1m_2, δ) coupe S suivant un ovale ayant I à son intérieur. δ coupe par suite cet ovale, donc S en un point m et un seul (n° **1**, 3°). Soit μ le point de δ situé sur une sphère fixe centrée sur I. La correspondance entre m et μ est biunivoque. Elle est évidemment continue dans le sens m, μ, elle l'est donc dans les deux sens. Il en résulte que S est l'image biunivoque, et bicontinue d'une sphère. C'est une surface de Jordan fermée sans point double et convexe.

En définitive, nous avons obtenu le théorème suivant :

Un ensemble fermé dont chaque section plane est une courbe du second ordre au plus, l'une au moins étant du second ordre et non décomposée, est soit une surface fermée convexe, soit un cône (ou cylindre) convexe, soit une quadrique réglée non décomposée.

Ce théorème donne une définition géométrique directe très élémentaire des surfaces de second ordre et aussi une propriété importante de celles d'entre elles qui ne sont pas convexes : *elles sont algébriques* [1].

---

[1] Ce fait n'est pas isolé en *Géométrie finie*. C. JUEL a montré qu'une surface fermée convexe d'ordre cyclique 4 (c'est-à-dire ayant 4 points au plus sur tout cercle) est nécessairement un ellipsoïde ou une cyclide algébrique, tout au moins si certaines conditions différentielles sont satisfaites. (*Voir* C. JUEL, *Bespiele von Elementarkurven und Elementarflächen*, *Atti d. Congr. Intern. d. Math. Bologna*, 3-10 septembre 1928, t. VI, p. 195-215).