JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL DUBREIL

Sur la dimension des idéaux de polynômes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 271-283.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__271_0>

Sur la dimension des idéaux de polynomes;

PAR PAUL DUBREIL.

A Monsieur Édouard Goursat,
Hommage de respectueuse admiration.

1. INTRODUCTION. — Les variétés algébriques de première espèce, tout en étant beaucoup plus générales que les intersections totales, ont, comme je l'ai montré antérieurement [1], les mêmes propriétés en ce qui concerne leur intersection avec une hypersurface. D'autre part, l'idéal homogène attaché à une intersection totale est un cas particulier des idéaux de la classe principale [2]; F. S. Macaulay a établi que *tout idéal de la classe principale est non-mixte* [3]. De même l'idéal attaché à une variété de première espèce est un cas particulier des idéaux de première espèce. Je me propose de donner, dans le présent travail la généralisation suivante du théorème que je viens de rappeler : *Tout idéal qui est complètement de première espèce est non-mixte* (§ 4). Ce résultat montre que l'intérêt présenté par les notions

(1) P. DUBREIL, *Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'Algèbre moderne* (*Actualités scientifiques et industrielles*, fasc. 210, Hermann, Paris, 1935).

(2) Idéaux homogènes, de dimension réduite d dans l'espace projectif P_n admettant une base minima se composant de $n - d$ formes. (*Voir* F. S. MACAULAY, *Algebraic theory of modular systemes*, p. 48-49. Cambridge University Press, 1916).

(3) C'est-à-dire que tous ses composants primaires sont de la même dimension. On trouvera également la démonstration de ce théorème dans VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, t. II, § 95, p. 78.

de variété ou idéal de première espèce dans les problèmes d'intersection s'étend aussi aux problèmes de dimension.

La méthode que j'utilise consiste à faire intervenir la fonction caractéristique de Hilbert, et à pratiquer des sections par des espaces linéaires particuliers. Elle diffère donc essentiellement des méthodes employées jusqu'à présent (Macaulay, Van der Waerden) fondées d'une part sur l'élimination ou la représentation paramétrique, d'autre part sur la considération de certaines variables comme paramètres. Elle se rapproche peut-être un peu plus de l'intuition géométrique et présente l'avantage de n'utiliser aucun résultat algébrique emprunté à la théorie des corps.

Je commence (§ 2) par indiquer d'une manière très succincte comment on peut, à l'aide de la fonction caractéristique de Hilbert, définir et étudier la dimension et obtenir notamment le théorème de Macaulay sur les idéaux de la classe principale. Je donne ensuite (§ 3) une méthode pour exprimer qu'un idéal homogène n'admet ni composant impropre ni composant propre de dimension nulle. Enfin, dans le dernier paragraphe, j'établis, avec le résultat annoncé ci-dessus, quelques propriétés des variétés multiplement de première espèce qui relient les problèmes de dimension étudiés ici au problème de la réduction des variétés algébriques et à un problème d'intersection suggéré par M. Severi [1].

2. Fonction caractéristique de Hilbert et dimension. — Soit K le corps des nombres complexes (ou un corps algébriquement fermé de caractéristique zéro). Soit $\mathfrak{m} = (F_1, \ldots, F_h)$ un idéal homogène sans composant impropre dans l'anneau $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Soit $\mathfrak{m}_\omega = (\overline{F}_1, \ldots \overline{F}_h)$ l'idéal engendré dans $K[x_1, \ldots, x_n]$ par les formes

$$\overline{F} = F(\omega x_1, x_1, \ldots, x_n)$$

déduites des formes de $\mathfrak{m}$ par la substition $x_0 = \omega x_1$ (ω élément de K). Nous dirons que $\mathfrak{m}_\omega$ est l'*idéal-section* de $\mathfrak{m}$ par l'hyperplan $x_0 = \omega x_1$. Si aucune des variétés essentielles de $\mathfrak{m}$ n'est contenue dans un hyper-

---

(1) *Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 28, 1909, p. 38.

plan $x_0 = Cx_1$ comme nous le supposerons par la suite, on a le théorème suivant :

Théorème A. — *Si une forme $\Phi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est telle que*

$$\overline{\Phi} = \Phi(\omega x_1, x_1, \ldots, x_n)$$

appartienne à $\mathfrak{m}_\omega$ pour un nombre de valeurs de ω dépassant une certaine limite qui ne dépend que du degré de Φ et de la base de $\mathfrak{m}$, Φ appartient à $\mathfrak{m}$ (1).

Corollaire. — *La même hypothèse étant vérifiée pour deux idéaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ sans composants impropres, si la relation $\mathfrak{m}_\omega \subset \mathfrak{m}'_\omega$ est satisfaite pour un nombre de valeurs de ω dépassant une certaine limite, on a $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}'$.*

Les mêmes propriétés sont valables pour les idéaux non homogènes, comme on le voit en passant par l'intermédiaire des idéaux homogènes équivalents.

Soient $\mathfrak{a}$ un idéal homogène pouvant admettre un composant impropre, u une forme linéaire quelconque, $\bar{\mathfrak{a}}$ l'idéal section de $\mathfrak{a}$ par $u = 0$.

Théorème B. — *On a, entre les fonctions caractéristiques des idéaux $\mathfrak{a}$ et $\bar{\mathfrak{a}}$ la relation*

$$\chi(\mathfrak{a}, l) - \chi(\mathfrak{a}, l-1) \leqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) \tag{1}$$

et la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait l'égalité pour toutes les valeurs de l est que $\mathfrak{a} : u = \mathfrak{a}$. Si en particulier la forme u n'appartient à aucun des composants propres de $\mathfrak{a}$, (ou si l'on préfère ne s'annule sur aucune variété essentielle de $\mathfrak{a}$, autre que le point $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$), l'égalité aura lieu dans (1) pour toutes les valeurs de l dépassant une certaine limite (2).

De cette proposition, on déduit immédiatement par récurrence sur le nombre croissant des variables le théorème fondamental de Hilbert :

---

(1) Les démonstrations seront publiées dans un Ouvrage sur les idéaux de polynomes qui paraîtra dans la Collection des *Cahiers scientifiques* de M. Julia.

(2) L'égalité (1), pour les valeurs assez grandes de l, a été établie par Maurice Janet qui, tout en signalant son intérêt géométrique, l'a utilisée dans la résolu-

Théorème C. — *A partir d'une certaine valeur de l, la fonction caractéristique est un polynome en l de degré $n-1$ au plus (polynome caractéristique).*

Cela étant, *appelons dimension (réduite) d'un idéal homogène $\mathfrak{a}$ le degré d de son polynome caractéristique.* La concordance de cette définition avec la notion intuitive de dimension résulte des propriétés suivantes : un idéal sans variété (se réduisant à son composant impropre) a un polynome caractéristique identiquement nul et réciproquement; un idéal ayant pour variété un système de points a pour polynome caractéristique une constante, donc a pour dimension zéro, et réciproquement; la condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal $\mathfrak{a}$ soit de dimension d est que sa section $\bar{\mathfrak{a}}$ par un hyperplan n'en contenant aucune variété essentielle propre, soit de dimension $d-1$; *deux idéaux ayant même variété ont même dimension.*

Théorème D. — *Si $\mathfrak{a}$ est de dimension d et si F désigne une forme quelconque, la dimension δ de l'idéal $(\mathfrak{a}, F)$ est égale à d ou $d-1$. Si l'hypersurface $F=0$ ne contient aucune variété essentielle propre de $\mathfrak{a}$, on a $\delta = d-1$.*

Théorème E. — *$\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ étant deux idéaux primaires de dimensions d et d', l'idéal $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']$ a pour dimension le plus grand des nombres d, d'.*

Théorème F. — *Un idéal homogène $\mathfrak{a}$ dont une base minima comprend k formes ($k \leqq n$) est de dimension $d \geqq n-k$. Si $k=1$, on a $d=n-1$, et l'idéal est non-mixte.*

Théorème F′ (Macaulay). — *Un idéal $\mathfrak{a}=(F_1, \ldots, F_k)$ $(k \leqq n)$ de la classe principale ($d=n-k$), est non-mixte.*

Indiquons très rapidement le principe de la démonstration de ce

---

tion de certains problèmes relatifs aux équations aux dérivées partielles. *Voir* notamment les deux Mémoires de cet Auteur intitulés : *Sur les Modules de formes algébriques, etc.* (*Ann. École Normale*, 3ᵉ série, t. 41, 1924, p. 58) *et Sur les Systèmes linéaires d'hypersurfaces* (*Actes du Congrès International des Math.*, Toronto, p. 838). *Voir* aussi le travail cité Note (1), p. 271. Nous poserons, par la suite,

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) = \chi(\mathfrak{a}, l) - \chi(\mathfrak{a}, l-1) + \lambda(l).$$

dernier théorème : la proposition étant vraie pour $k=1$, quel que soit le nombre des variables, on raisonne par récurrence sur le nombre k. Pour le passage de $k-1$ à k, récurrence sur n : pour $n-k$ variables, le théorème exprime simplement que l'idéal n'admet pas de composant impropre et résulte du théorème II du Mémoire cité note [1], p. 271 (*voir* p. 13 et 17 de ce Mémoire). Le passage de $n-1$ à n s'effectue au moyen du théorème A.

3. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal homogène n'admette ni composant impropre ni composants propres de dimension nulle. — Si un idéal homogène $\mathfrak{a}$ n'admet ni composant impropre ni composants propres de dimension nulle, on a

$$\mathfrak{a} : u = \mathfrak{a}$$

pour toute forme linéaire u telle que l'hyperplan $u=0$ ne contienne aucune variété essentielle propre de $\mathfrak{a}$ de dimension supérieure ou égale à 1. Or, l'idéal $\mathfrak{a}$ étant donné, on peut toujours choisir les coordonnées de manière qu'aucun des hyperplans contenant (éventuellement) une telle variété essentielle de $\mathfrak{a}$, ne passe par l'espace linéaire $x_0=x_1=0$. *On a alors*

$$\mathfrak{a} : (\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1) = \mathfrak{a} \tag{2}$$

pour toutes les valeurs de μ_0 *et* μ_1 *dans* K.

Réciproquement, si (2) est vérifiée quels que soient μ_0 et μ_1, $\mathfrak{a}$ n'admet aucun composant primaire $\mathfrak{q}$ dont l'idéal premier $\mathfrak{p}$ divise l'idéal principal $(\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1)$ pour des valeurs convenables de μ_0 et μ_1. Donc $\mathfrak{a}$ n'admet ni composant impropre ni composants propres de dimension réduite nulle, ni même de composants propres de dimension supérieure ou égale à 1 dont la variété soit contenue dans un hyperplan passant par l'espace linéaire $x_0=x_1=0$.

Si nous tenons compte du théorème B et désignons par $\bar{\mathfrak{a}}$ la section de $\mathfrak{a}$ par $\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 = 0$, nous voyons que la condition (2) est équivalente à

$$\chi(\mathfrak{a}, l) - \chi(\mathfrak{a}, l-1) = \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l), \tag{3}$$

quel que soit l, et nous avons la proposition suivante :

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal homogène* $\mathfrak{a}$ *n'admette ni composant impropre, ni composants propres de dimension nulle (donc en particulier pour qu'un idéal de dimension* 1 *soit non-mixte) est que l'on puisse choisir les coordonnées de manière que la relation*

$$\chi(\mathfrak{a}, l) - \chi(\mathfrak{a}, l-1) = \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l),$$

où $\bar{\mathfrak{a}}$ *désigne la section de* $\mathfrak{a}$ *par l'hyperplan* $\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 = 0$, *soit vérifiée pour toutes les valeurs de* l, *quelles que soient les valeurs de* μ_0 *et* μ_1 *dans le corps fondamental* K.

Cela étant, nous dirons qu'un idéal $\mathfrak{a}$ est de première espèce s'il n'admet pas de composant impropre et s'il existe un espace linéaire (soit, avec un choix convenable des coordonnées, $x_0 = 0$) n'en contenant aucune variété essentielle et tel que la section correspondante $\bar{\mathfrak{a}}_0$ soit elle-même dépourvue de composant impropre. D'après les résultats établis dans le travail cité note (1), p. 271, on a la même propriété quand on remplace $x_0 = 0$ par un autre hyperplan ne contenant aucune variété essentielle de $\mathfrak{a}$, et si $\Phi = 0$ est une hypersurface satisfaisant à la même condition, l'idéal $(\mathfrak{a}, \Phi)$ n'admet pas de composant impropre. Le théorème I entraîne :

Théorème II. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est de dimension* 1 *et de première espèce,* $\mathfrak{a}$ *est non-mixte.*

On a en effet par hypothèse

$$\chi(\mathfrak{a}, l) - \chi(\mathfrak{a}, l-1) = \chi(\bar{\mathfrak{a}}_0, l)$$

et puisque $\bar{\mathfrak{a}}_0$ n'admet pas lui-même de composant impropre,

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}_0, l) - \chi(\bar{\mathfrak{a}}_0, l-1) = \chi(\bar{\bar{\mathfrak{a}}}, l)$$

$\bar{\bar{\mathfrak{a}}}$ étant la section de $\bar{\mathfrak{a}}_0$ par $x_1 = 0$ dans $x_0 = 0$; nous pouvons encore dire que $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}$ est la section de $\mathfrak{a}$ par l'espace linéaire $x_0 = x_1 = 0$.

Soit $\bar{\mathfrak{a}}$ la section de $\mathfrak{a}$ par l'hyperplan $\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 = 0$. Il nous suffit de montrer que dans l'inégalité

$$\chi(\ddot{\mathfrak{a}}, l) \geqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}_0, l) \qquad (\mu_1 \neq 0),$$

qui résulte du théorème B, on a nécessairement l'égalité.

L'idéal $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}$ étant la section de $\bar{\mathfrak{a}}$ par $x_1 = 0$, on a

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) - \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l-1) \leqq \chi(\bar{\bar{\mathfrak{a}}}, l)$$

ou

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) - \chi(\bar{\mathfrak{a}}, l-1) \leqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}_0, l) - \chi(\bar{\mathfrak{a}}_0, l-1). \tag{4}$$

Or les idéaux $\bar{\mathfrak{a}}$ et $\bar{\mathfrak{a}}_0$ admettant des variétés non vides (puisque $\mathfrak{a}$ est de dimension 1), ne contiennent aucune constante. Donc

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}, 0) = \chi(\bar{\mathfrak{a}}_0, 0);$$

d'où, d'après (4),

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) \leqq \chi(\bar{\mathfrak{a}}_0, l),$$

qui entraîne l'égalité à démontrer.

4. Idéaux non-mixtes, idéaux et variétés multiplememt de première espèce. — Nous appellerons dans ce qui suit idéal sans composant impropre équivalent à un idéal homogène $\mathfrak{m}$ et désignerons par $\mathfrak{m}^*$ l'idéal obtenu en supprimant, dans la décomposition de $\mathfrak{m}$ en idéaux primaires, le composant impropre éventuel de $\mathfrak{m}$. Si $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}'$, et si $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ ont même polynome caractéristique, on a $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}'^*$.

Soit à exprimer qu'un idéal homogène $\mathfrak{a}$ de dimension d est non-mixte. On appliquera d'abord le théorème I, puis on sera ramené à exprimer que l'idéal $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^*$, n'admet aucun composant propre de dimension $1, 2, \ldots,$ ou $d-1$. Nous utiliserons pour cela la proposition suivante :

Théorème III. — *Si δ est la dimension minima d'un composant primaire de $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^*$, avec $1 \leqq \delta < d$, on peut trouver (d'une infinité de manières) un hyperplan $u = 0$ ne contenant aucune variété essentielle de $\mathfrak{a}$ et tel que l'idéal $(\bar{\mathfrak{a}})^*$, de dimension $d-1$, admette au moins un composant primaire de dimension inférieure ou égale à $\delta - 1$.*

Soit

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}', \mathfrak{q}'', \ldots] = [\mathfrak{q}, \mathfrak{b}], \qquad \mathfrak{b} = [\mathfrak{q}', \mathfrak{q}'', \ldots] \not\subset \mathfrak{q},$$

où $\mathfrak{q}$ est de dimension δ, $\mathfrak{b}$ de dimension d. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier attaché à $\mathfrak{q}$. On a, en prenant les sections par $u = x_0 - \omega x_1 = 0$,

$$\bar{\mathfrak{a}} \subset [\bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{b}}].$$

Nous allons montrer d'abord que

$$\bar{\mathfrak{a}}^* = [\bar{\mathfrak{q}}^*, \bar{\mathfrak{b}}^*].$$

On a en effet, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{q}$ étant des idéaux sans composant impropre,

$$\begin{aligned}\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) = \chi(\mathfrak{a}, l) - \chi(\mathfrak{a}, l-1) &= \chi(\mathfrak{b}, l) + \chi(\mathfrak{q}, l) - \chi[(\mathfrak{b}, \mathfrak{q}), l] \\ &\quad - \chi(\mathfrak{b}, l-1) - \chi(\mathfrak{q}, l-1) + \chi[(\mathfrak{b}, \mathfrak{q}), l-1] \\ &= \chi(\bar{\mathfrak{b}}, l) + \chi(\bar{\mathfrak{q}}, l) - \chi(\overline{(\mathfrak{b}, \mathfrak{q})}, l) + \lambda(l),\end{aligned}$$

$\lambda(l)$ étant la fonction λ relative à l'idéal $(\mathfrak{b}, \mathfrak{q})$, qui peut admettre un composant impropre. Cette fonction est identiquement nulle pour l assez grand et comme

$$\overline{(\mathfrak{b}, \mathfrak{q})} = (\bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{q}})$$

nous avons

$$\chi(\bar{\mathfrak{a}}, l) = \chi([\bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{q}}], l) \qquad \text{pour } l \text{ grand.}$$

Donc

$$\bar{\mathfrak{a}}^* = [\bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{q}}]^* = [\bar{\mathfrak{b}}^*, \bar{\mathfrak{q}}^*].$$

Cela étant, $\bar{\mathfrak{q}}^*$ n'admet que des composants primaires de dimension inférieure ou égale à $\delta - 1$. Si pour une valeur de ω, ces composants sont tous superflus dans la décomposition de $\bar{\mathfrak{a}}^*$, on a $\bar{\mathfrak{b}}^* \subset \bar{\mathfrak{q}}^*$.

Supposons que cette circonstance se produise pour un certain nombre N de valeurs de ω. Désignons par

$$\Phi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, h)$$

les formes de base de $\mathfrak{b}$. Puisqu'on a

$$\bar{\mathfrak{b}} \subset \bar{\mathfrak{b}}^* \subset \bar{\mathfrak{q}}^*,$$

les produits des formes $\Phi_i(\omega x_1, x_1, \ldots, x_n)$ par une puissance convenable x_n^τ de la variable x_n (¹) appartiennent à $\bar{\mathfrak{q}}$. Si le nombre N dépassait une certaine limite, on aurait donc

$$x_n^\tau \Phi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{q},$$

(¹) On pourra prendre τ égal à l'exposant de l'idéal $\bar{\mathfrak{q}}$, exposant qui, ainsi qu'on peut le vérifier, est indépendant de ω. On pourrait d'ailleurs aussi, dans cette seconde partie de la démonstration, passer en variables non homogènes.

et si $x_n \not\subset \mathfrak{p}$, comme on peut toujours le supposer,

$$\Phi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{q};$$

donc

$$\mathfrak{b} \subset \mathfrak{q},$$

ce qui est impossible. Le nombre N ne peut donc pas dépasser une certaine limite, et puisqu'il y a au plus un nombre limité de valeurs de ω pour lesquelles les composants provenant de $\bar{\mathfrak{q}}^*$ sont superflus dans $\bar{\mathfrak{a}}^*$, le théorème est démontré.

Il sera en général commode d'appliquer ce théorème sous la forme suivante, évidemment équivalente :

Théorème III'. — *Si un idéal* $\mathfrak{a}$ *sans composant impropre ni composants propres de dimension nulle est coupé par tout hyperplan n'en contenant aucune variété essentielle suivant un idéal* $\bar{\mathfrak{a}}$ *tel que l'idéal sans composant impropre équivalent* $\bar{\mathfrak{a}}^*$ *soit non-mixte,* $\mathfrak{a}$ *est lui-même non-mixte.*

On a ainsi une méthode, procédant par récurrence sur les dimensions décroissantes, qui permet d'exprimer qu'un idéal est non-mixte. Cette méthode va s'appliquer immédiatement à une catégorie d'idéaux que nous devons maintenant définir et pour lesquels les idéaux sections seront *ipso facto* dépourvus de composant impropre.

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal homogène de première espèce. Si $S = 0$ et $\Sigma = 0$ sont deux hypersurfaces ne contenant aucune des variétés essentielles de $\mathfrak{m}$, les idéaux $(\mathfrak{m}, S)$ et $(\mathfrak{m}, \Sigma)$ n'admettent pas de composant impropre. Si de plus $\Sigma = 0$ ne contient aucune variété essentielle de $(\mathfrak{m}, S)$ et $S = 0$ aucune variété essentielle de $(\mathfrak{m}, \Sigma)$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'un quelconque des idéaux $(\mathfrak{m}, S)$, $(\mathfrak{m}, \Sigma)$ soit de première espèce est que $(\mathfrak{m}, S, \Sigma)$ n'admette pas de composant impropre. Donc $(\mathfrak{m}, S)$ et $(\mathfrak{m}, \Sigma)$ sont en même temps de première espèce, ou encore la propriété que l'idéal $(\mathfrak{m}, S)$ soit de première espèce est indépendante du choix de l'hypersurface S et caractérise l'idéal $\mathfrak{m}$. Nous dirons alors que $\mathfrak{m}$ est *doublement de première espèce*.

En particulier, on pourra prendre comme hypersurface $S = 0$ un hyperplan, soit, par exemple, $x_1 = 0$. Posons $\mathfrak{a} = (\mathfrak{m}, x_1)$, de sorte que $x_1 \subset \mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{b}$ l'idéal de l'anneau $K[x_0, x_2, \ldots, x_n]$ section de $\mathfrak{a}$ par $x_1 = 0$.

Théorème. — *Les idéaux* $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ *sont en même temps de première espèce.*

Désignons par $\mathfrak{a}'$ l'idéal de l'anneau $K[x_0, x_1, \ldots x_n]$ déduit de $\mathfrak{a}$ par la substitution $x_1 = 0$. On a $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}', x_1)$. L'idéal $\mathfrak{a}'$ a même base que $\mathfrak{b}$, de sorte qu'une forme de $K[x_0, x_2, \ldots, x_n]$ appartenant à $\mathfrak{b}$ appartient à $\mathfrak{a}'$ dans $K[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ et inversement.

1° *Si* $\mathfrak{a}$ *est de première espèce, il en est de même de* $\mathfrak{b}$. — Coupons par l'hyperplan $x_0 = 0$ (convenablement choisi) et montrons que si

$$\bar{\mathfrak{a}} = (\bar{\mathfrak{a}}', x_1)$$

est sans composant impropre, il en est de même de $\bar{\mathfrak{b}}$.

Soit

$$\sigma(x_2, \ldots, x_n) \in \bar{\mathfrak{b}}^*,$$

donc

$$x_n^{\tau} \sigma \in \bar{\mathfrak{b}} \quad \text{dans} \quad K[x_2, \ldots, x_n]$$

et par suite

$$x_n^{\tau} \sigma \in \bar{\mathfrak{a}}' \subset (\bar{\mathfrak{a}}', x_1) \quad \text{dans} \quad K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

et

$$\sigma \in (\bar{\mathfrak{a}}', x_1) = \bar{\mathfrak{a}}.$$

La forme σ est donc la section par $x_0 = 0$ d'une forme $\Sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ appartenant à $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}', x_1)$:

$$(5) \quad \Sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n) = A'(x_0, x_2, \ldots, x_n) + x_1 P(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

avec

$$A' \in \mathfrak{a}' \quad \text{ou} \quad A' \in b \quad \text{dans} \quad K[x_0, x_2, \ldots, x_n].$$

Pour $x_0 = 0$, le premier membre de (5), identique à σ, est indépendant de x_1. Donc

$$P(0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sigma = A'(0, x_2, \ldots, x_n) \in \bar{\mathfrak{b}}.$$

Donc

$$\bar{\mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{b}}^*.$$

2° *Si* $\mathfrak{b}$ *est de première espèce, il en est de même de* $\mathfrak{a}$. — Montrons que l'idéal $(\mathfrak{a}, \Phi)$ ou $\Phi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est une forme ne contenant aucune variété essentielle de $\mathfrak{a}$, n'admet pas de composant impropre. Soit $T(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une forme de $(\mathfrak{a}, \Phi)^\star$, c'est-à-dire telle que

$$u^\lambda T = A\Phi + P \qquad (P \in \mathfrak{a}),$$

u étant une forme linéaire indépendante de x_1 et ne s'annulant sur aucune variété essentielle de $(\mathfrak{b}, \varphi)$ (¹) dans $K[x_0, x_2, \ldots, x_n]$, et λ désignant un entier convenable. On en déduit

$$u^\lambda t = a\varphi + p,$$

où

$$p = P(x_0, 0, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{a}';$$

donc

$$p \in \mathfrak{b} \quad \text{dans} \quad K[x_0, x_2, \ldots, x_n].$$

Or l'idéal $(\mathfrak{b}, \varphi)$ n'admet pas de composant impropre. Par suite, la relation précédente entraîne

$$t = b\varphi + q \qquad (q \in \mathfrak{b})$$

et, dans $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$,

$$T = b\Phi + q + x_1 R,$$

où $q \in \mathfrak{a}'$, donc $q + x_1 R \in \mathfrak{a}$, ce qui démontre la propriété.

D'après le théorème précédent, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal soit doublement de première espèce est que sa section par un hyperplan n'en contenant aucune variété essentielle soit de première espèce.*

On en déduit, par application du théorème III', qu'un tel idéal, qui n'admet, comme nous l'avons vu, ni composant impropre ni composants propres de dimension nulle, ne peut pas non plus admettre de composants propres de dimension 1. Par suite :

Tout idéal de dimension 2 qui est doublement de première espèce est non-mixte.

Passons maintenant au cas général. Nous dirons qu'un idéal $\mathfrak{a}$ de

(¹) Nous désignons par φ, f, ... les formes déduites de Φ, F, ... par la substitution $x_1 = 0$.

première espèce est h fois de première espèce, s'il existe $h-1$ hypersurfaces $S_1=0$, $S_2=0$, ..., $S_{h-1}=0$ choisies de manière que $S_i=0$ ne contienne aucune variété essentielle de $\mathfrak{a}_{i-1}=(\mathfrak{a}, S_1, \ldots, S_{i-1})$ et telles que les $h-1$ idéaux $\mathfrak{a}_1$, ..., $\mathfrak{a}_{h-1}$ soient de première espèce. La propriété subsiste si on remplace une quelconque des hypersurfaces $S_i=0$ par une hypersurface arbitraire; elle est donc bien indépendante des hypersurfaces S_i et caractérise l'idéal $\mathfrak{a}$. En particulier, on peut prendre comme hypersurfaces des hyperplans et la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{a}$ soit h fois de première espèce est qu'il existe une série de $h-1$ sections consécutives de $\mathfrak{a}: \mathfrak{a}_1=\bar{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{a}_2=\bar{\bar{\mathfrak{a}}}$, ..., $\mathfrak{a}_{h-1}$ qui soient chacune de première espèce. Si $\mathfrak{a}$ est h fois de première espèce, sa section par un hyperplan n'en contenant aucune variété essentielle l'est $h-1$ fois. Un raisonnement par récurrence immédiat montre, en tenant compte du théorème III, que :

Un idéal h fois de première espèce ne peut admettre de composants propres de dimension inférieure ou égale à $h-1$. Par suite :

THÉORÈME IV. — *Si un idéal de dimension d est d fois de première espèce (ou complètement de première espèce), il est non-mixte.*

Notons que, comme on le vérifie immmédiatement, *un idéal de la classe principale de dimension d, est d fois de première espèce.* Le théorème de Macaulay rappelé dans ce travail est donc moins général que le théorème IV.

Si l'on appelle variété h fois de première espèce une variété V telle que l'idéal $\mathfrak{a}_V$ qui lui est attaché soit h fois de première espèce, on a le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Toute variété* V *de dimension d qui se déduit d'une intersection totale non-mixte à d dimensions est complètement de première espèce.*

Ce théorème, qui se démontre immédiatement par récurrence sur d, donne une condition *nécessaire* pour qu'une variété soit réductible à une intersection totale et montre que les variétés (simplement) de première espèce sont plus générales que les variétés réductibles à une intersection totale.

Nous terminerons par la remarque suivante. Dans le Mémoire cité note (1), page 272, F. Severi remarque que si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont deux idéaux attachés à deux variétés V et V′, l'idéal ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$) n'est pas en général l'idéal attaché à la variété intersection de V et V′. Cela tient au fait que, si, plus généralement, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux sans composant impropre, l'idéal ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) peut très bien admettre un composant impropre. Si $\mathfrak{b}$ est principal, $\mathfrak{b} = (\Phi)$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'en soit pas ainsi est que $\mathfrak{a}$ soit de première espèce, en supposant que $\Phi = 0$ ne contienne aucune variété essentielle de $\mathfrak{a}$. Supposons maintenant que $\mathfrak{b} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ soit de la classe principale et que les hypersurfaces $\Phi_1, \ldots, \Phi_{k-1}$ satisfassent aux hypothèses énoncées ci-dessus pour les hypersurfaces S_i. Supposons enfin la dimension d de $\mathfrak{a}$ supérieure ou égale à k.

Pour que l'idéal ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) *n'admette pas de composant impropre, il suffit que* $\mathfrak{a}$ *soit* k *fois de première espèce.*