JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LEBEL

Enveloppes de cercles ou de sphères. Surfaces applicables

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 25-41.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__25_0>

Enveloppes de cercles ou de sphères. Surfaces applicables;

Par J. LEBEL
(Dijon).

---

1. Introduction. — Une partie importante de l'œuvre mathématique de M. Goursat est consacrée à des questions géométriques, résolues par une heureuse synthèse de remarques géométriques et de propriétés des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles, l'ingéniosité de l'auteur consistant, non à éblouir le lecteur par une série continue d'artifices, mais bien à rendre la solution évidente par la confrontation de remarques intuitives.

Nous essaierons, de notre mieux, d'appliquer ces principes directeurs, en étudiant dans le plan, sur la sphère ou dans l'espace, les cercles à un paramètre, admettant deux points limites qui décrivent des arcs égaux. La même méthode est ensuite appliquée aux sphères à deux paramètres dont les points limites engendrent deux surfaces applicables.

M. Gambier nous a suggéré divers résultats, et nous lui exprimons ici toute notre reconnaissance.

2. Cercles a un paramètre dans le plan. — Nous déterminons les *familles de cercles à un paramètre, tels que les points limites* A, B *décrivent sur les deux branches* (A), (B) *de l'enveloppe des arcs égaux.*

Orientons la tangente $A\alpha$ en A à (A) dans le sens où A se déplace; la tangente $B\beta$ en B à (B) se trouve orientée par là même. Les angles *non orientés* (donc évalués par un nombre compris entre o et π)

$$\theta_A = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\alpha}), \qquad \theta_B = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\beta})$$

sont *égaux* ou *supplémentaires*. La formule générale

$$dl_{AB} = - ds_A \cos\theta_A - ds_B \cos\theta_B,$$

où l_{AB} est la distance AB prise en valeur absolue, et s_A, s_B les arcs de (A) et (B) comptés positivement dans le sens $\overrightarrow{A\alpha}$ ou $\overrightarrow{B\beta}$, donne dans le premier cas

$$dl_{AB} = -2\, ds_A \cos\theta_A,$$

dans le second cas

$$dl_{AB} = 0,$$

de sorte que *la distance* AB *est variable dans le premier cas*, *fixe dans le second.*

Si K est le milieu du segment AB, la vitesse de K est toujours la demi-somme géométrique des vecteurs vitesses de A et B; *dans le premier cas*, les vecteurs vitesses de A et B sont symétriques par rapport à la médiatrice de AB; la vitesse de K est normale à la droite AB ou (D), de sorte que (D), supposée liée à K, roule sans glisser sur son enveloppe, si elle a une direction variable, ou se déplace d'un mouvement de translation perpendiculaire à (D) si (D) a une direction fixe. Les vitesses de A ou B résultent de leur vitesse d'entraînement, perpendiculaire à (D), et de leur vitesse relative sur (D); ces deux vitesses relatives sont égales et opposées; les vitesses d'entraînement sont donc équipollentes, donc (D) a nécessairement une direction invariable; K décrit une droite fixe (Δ). *On a le cas évident d'un cercle à un paramètre dont le centre* I *décrit une droite.*

Passons maintenant au *second cas :* la vitesse de K est dirigée suivant la droite AB, appelée (D); donc si K est considéré comme lié à cette droite (D) et à la droite perpendiculaire (Δ) issue de K, cette droite (Δ) roule sans glisser sur son enveloppe, qu'elle touche en I, et les vitesses de A et B, qui sont de simples vitesses d'entraînement, sont égales. Le cercle (C) de centre I et de rayon IA = IB est le cercle étudié ici; *il est concentrique au cercle de courbure de la courbe* (K), *et le carré du rayon du cercle* (C) *surpasse d'une constante* $\left(a^2 = \overline{KA}^2 = \overline{KB}^2\right)$ *le carré du rayon du cercle osculateur.*

Les réciproques sont évidentes; il suffit, par exemple, de se donner arbitrairement la courbe (K) et de porter sur la tangente en K à cette courbe une longueur constante $KA = KB = a$, puis de tracer le cercle qui a pour centre I et pour rayon IA. On peut, au contraire, donner arbitrairement la courbe (A); alors, pour chaque choix de la constante a représentant KA, la courbe (K) est donnée par une équation différentielle du premier ordre. L'élément de contact issu d'un point K du plan est porté par l'une des droites réunissant K aux points communs à (A) et au cercle de centre K et de rayon a. L'élimination de a conduit à une équation différentielle d'ordre 2, donnant la courbe générale (K) susceptible d'être associée à (A), et cette équation admet comme intégrale première l'équation différentielle du premier ordre signalée à l'instant. Ainsi, dans le cas où (A) est une droite, (K) est une *tractrice* de base (A), et la courbe (I) une chaînette de base (A).

Nous allons encore donner une autre interprétation des résultats précédents. Soit s l'arc de la courbe (I) dont K décrit une développante; on peut choisir l'origine de cet arc de manière qu'il soit égal à IK, et alors le carré du rayon du cercle (C) est $s^2 + a^2$. Si l'on rectifie la courbe (I) en entraînant les cercles (C), ils viennent constituer un *faisceau de cercles*, du premier ou du second genre suivant le signe de a^2, si l'on admet les enveloppes imaginaires. Inversement on réalise la figure demandée en partant d'un faisceau quelconque de cercles, et en enroulant la droite des centres sur une courbe arbitraire du plan.

3. Cercles a un paramètre dans l'espace. — C'est une propriété bien connue que si un cercle de l'espace dépend d'un unique paramètre et a une enveloppe qu'il touche en deux points, la corde joignant les points limites est la caractéristique du plan du cercle; elle engendre donc une développable (δ). Si cette surface (δ) se déforme de façon que les génératrices restent génératrices, les deux courbes (A) et (B) engendrées par les points limites deviennent deux courbes nouvelles $(\overline{A})$, $(\overline{B})$ tracées sur la nouvelle développable $(\overline{\delta})$. Les tangentes en $\overline{A}$ et $\overline{B}$ continuent à faire un triangle isoscèle avec la corde $\overline{AB}$, de sorte qu'il existe encore un cercle tangent à $(\overline{A})$ en $\overline{A}$, à $(\overline{B})$ en $\overline{B}$. En particulier on peut réduire $(\overline{\delta})$ à un plan en considérant la courbe plane qui correspond par égalité d'arcs et de rayons de courbure à l'arête de rebroussement de (δ), de sorte que le problème consistant à réaliser dans l'espace l'égalité des arcs sur les deux branches (A), (B) de l'enveloppe se ramène au problème analogue dans le plan. (Il pourrait, bien entendu, être traité directement.) Nous avons donc les deux seuls cas déjà séparés pour le plan :

Dans le premier cas plan, les cordes de contact sont toutes parallèles, de sorte qu'il suffit d'enrouler le plan sur un cylindre quelconque, la droite $(\overline{\Delta})$, lieu des centres dans le plan, devenant une section droite du cylindre.

Dans le second cas plan, on est, après l'enroulement du plan sur une développable, conduit à envisager une courbe gauche quelconque (K), et à porter sur chaque tangente une longueur constante $KA = KB = a$. Les cercles obtenus sont concentriques au cercle osculateur de (K), avec un rayon dont le carré surpasse encore d'une constante a^2 celui du rayon du cercle osculateur. Alors, I étant le centre de courbure, et J le centre de la sphère osculatrice, la sphère de centre J et de rayon $JA = JB = \sqrt{\overline{JK}^2 + a^2}$ admet le cercle mobile étudié comme cercle caractéristique. On peut dire aussi que l'on fait rouler sans glisser un plan sur la développable dont (J) est l'arête de rebroussement. Deux points A, B symétriques par rapport à ce plan et invariablement liés à lui engendrent les deux courbes (A), (B) en jeu, le milieu K du segment AB décrivant la courbe (K) déjà étudiée. Si l'on se donne la courbe (A), ainsi que la constante a, les courbes (K) forment une *congruence*, car on détermine comme plus haut, pour chaque point K de l'espace, l'élément linéaire de contact de la courbe issue de ce point. En faisant ensuite varier a, on obtient un *complexe* de courbes (K).

Enfin la figure pourrait toujours dériver indirectement d'un faisceau de cercles déformé.

4. Étude des sphères. — Nous venons d'employer l'expression : *faire rouler sans glissement un plan sur une développable*. Cette développable, au lieu d'avoir une véritable arête de rebroussement, peut se réduire à un *cône* ou à un *cylindre*. Si c'est un cylindre, nous retrouvons le second cas plan. Car les deux points A, B restent dans une section droite du cylindre; la trace, sur le plan de cette section plane,

du plan roulant est une droite (Δ) qui roule sans glisser sur la section doite, A et B étant invariablement liés à (Δ); c'est bien notre second cas plan. Mais cela nous donne l'idée de construire, sur chaque cercle (C), la sphère (Σ) dont il est un cercle diamétral; on a aussi ∞^1 sphères (Σ). Ensuite, en imprimant à la figure un mouvement de translation parallèle aux génératrices du cylindre, on obtient ∞^2 cercles (C) et ∞^2 sphères (Σ). Ces sphères admettent évidemment pour enveloppe les cylindres dont (A) et (B) sont sections droites; et ces cylindres sont applicables l'un sur l'autre, étant bien entendu, pour éviter de considérer cette propriété comme banale, que *les points limites de chaque sphère sont ceux qui se correspondent dans cette applicabilité.*

Si la développable est un cône, nous avons des propriétés analogues. Les deux points A, B restent sur une sphère fixe (σ) dont le centre est le sommet O du cône, et les cercles (C) sont manifestement les sections de cette sphère (σ) par le plan mobile contenant les tangentes en A et B aux deux courbes sphériques (A), (B). On peut, si l'on veut, considérer le grand cercle AB de (σ), le milieu K de l'arc AB, milieu situé dans le plan roulant; on a alors le théorème analogue à celui du plan :

Si, sur les grands cercles tangents à une courbe sphérique (K) *en ses divers points* K, *on porte un arc constant* KA = KB, *les deux courbes sphériques* (A), (B) *se correspondent par arcs égaux; les deux tangentes en* A *et* B *à* (A) *et* (B) *sont également inclinées, soit sur le segment* AB, *soit sur l'arc de grand cercle* AB, *et la section de la sphère par leur plan est un cercle tangent en* A *à* (A), *en* B *à* (B).

Le cône sur lequel roule le plan médiateur de AB coupe (σ) suivant la développée sphérique de la courbe (K). On remarque d'ailleurs que la courbe décrite par le milieu du segment AB est aussi sphérique.

La considération de la développée sphérique nous conduit encore à cette conclusion, analogue à celle que nous avons obtenue dans le plan, que si l'on développe le cône (I) sur un plan diamétral de la sphère, en laissant le point O fixe, et en entraînant les cercles (C) dans un glissement sur la sphère, ces cercles viennent passer par deux points fixes et forment un faisceau sphérique.

Maintenant, comme pour le cas du cylindre, considérons les ∞^1 cercles (C) situés sur (σ), puis les sphères (Σ) orthogonales à (σ) le long de chaque cercle (C); elles sont évidemment tangentes en A et B aux cônes de sommet O ayant (A) et (B) pour directrices. Une homothétie par rapport à O nous donne ∞^2 sphères (Σ) qui ont pour enveloppe les deux cônes qui précèdent. *Ces deux cônes sont applicables l'un sur l'autre, les points limites de chaque sphère se correspondant dans cette applicabilité. D'autre part, l'angle* AOB *reste constant et, quand il est entraîné par le roulement sans glissement de son plan bissecteur sur le cône déjà signalé (plan normal suivant* OK *au cône lieu de cette droite), les deux côtés de l'angle engendrent les deux cônes applicables l'un sur l'autre.*

Nous venons de voir que, dans cette question relative à la sphère (σ), on peut raisonner uniquement sur (σ) en imaginant un déplacement continu de la sphère sur elle-même, la roulette mobile étant un grand cercle (Δ). Nous avons considéré un grand cercle (D) invariablement lié à (Δ), son pied K sur (Δ) et deux points fixes A et B de (D) tels que $KA = KB = a$, a étant une constante. On aurait pu encore se donner arbitrairement sur la sphère la courbe (A); une fois a donné, la courbe (K) s'en déduit par une équation différentielle du premier ordre. Si a varie, l'élimination de a conduit, comme précédemment, à une équation différentielle du second ordre.

En particulier, si la courbe (A) est un grand cercle, la courbe (B) peut être appelée *tractrice sphérique*, la développée de (K) *chaînette sphérique*, par analogie avec le plan. Dans ce cas, le cône de sommet O dont (A) est directrice *se réduit à un plan.* Nous avons ainsi résolu ce problème : *trouver une sphère à deux paramètres, tangente à un plan fixe en un point variable* A, *telle que le second point limite engendre une surface développable, l'applicabilité de cette surface sur le plan consistant à faire correspondre* A *et* B.

En réalité, nous avons indiqué *une* solution de ce problème; il faut démontrer que c'est *la* solution.

Supposons donc qu'une sphère variable, à deux paramètres, de centre I touche le plan fixe (Π) en un point A, et le complément de l'enveloppe au point B. Si la surface (B) est développable, il s'agit de démontrer qu'elle se réduit à un cône dont le sommet O est dans le plan (II), et que la surface (I) est aussi un cône de sommet O. En effet, (B) coupe (II) suivant la courbe commune à (II) et à (I); cela tient à ce que A et B sont toujours symétriques par rapport au plan tangent en I à (I). Si donc I vient dans (II), B et A se confondent avec I; si (I) coupe (II) suivant une courbe (i) non réduite à une droite, cette courbe (i) se correspond à elle-même dans l'applicabilité de (II) et (B). L'expression classique $\frac{\sin\theta}{R}$ est l'invariant classique qui se conserve; or ici $\frac{\sin\theta}{R} = \frac{1}{R}$ sur (II); donc sur (B) le même résultat a lieu, et $\sin\theta = 1$ même sur (B). De la sorte (i) est asymptotique de (B); chaque génératrice de (B) serait donc dans le plan osculateur de (i), donc dans (II); il y a impossibilité. Donc (B) est un cône dont le sommet O est dans (II). Aux génératrices de (B) correspondent donc les droites issues de O dans (II), et en coupant la figure par une sphère (σ) de centre O nous retombons nécessairement sur les considérations déjà exposées.

Dans le plan, nous avons trouvé deux sortes d'enveloppes de cercles avec égalité des arcs; ces deux sortes existent aussi sur la sphère. Celle que nous venons d'indiquer correspond au second cas du plan; le premier cas a aussi son analogue obtenu en choisissant une courbe (A) arbitraire sur la sphère (σ) et en lui associant sa symétrique (B) relativement à un plan diamétral quelconque. Ce genre d'enveloppe se retrouve d'ailleurs sur toute surface qui admet un plan de symétrie.

Il serait intéressant de chercher si, sur une surface quelconque, on peut trouver une enveloppe de cercles du premier ou du second type.

5. Étude analytique. — Prenons le cas du plan, en supposant (A) réduite à une droite Ox; les coordonnées du centre I sont (x, y), celles de $A(x, 0)$, celles de $B(x+\lambda y', -\lambda)$. On a d'abord, en exprimant que A et B sont symétriques relativement à la tangente en I,

$$\lambda = -\frac{2y'}{1+y'^2}. \tag{1}$$

Puis l'égalité des arcs donne

$$[d(x+\lambda y')]^2+d\lambda^2=dx$$

ou

$$(1+\lambda y''+\lambda' y')^2+\lambda'^2-1=0,$$

ce qui s'écrit

$$(1+\lambda y'')^2-1+\lambda'[\lambda'(y'^2+1)+2y'(\lambda y''+1)]=0.$$

La quantité entre crochets est la dérivée de $\lambda(y'^2+1)+2y$; elle est donc nulle, et l'on a simplement

$$\lambda y''(2+\lambda y'')=0. \tag{2}$$

Trois solutions se présentent : d'abord $\lambda=0$, d'où $y=0$; c'est une solution banale et d'ailleurs singulière, le cercle (C) se décomposant en deux droites isotropes; ensuite $y''=0$, le cercle variable reste tangent à deux droites fixes; enfin on a $2+\lambda y''=0$, ce qui, joint à (1), donne

$$1+y'^2=yy''. \tag{3}$$

En écrivant

$$\frac{y'}{y}=\frac{y'y''}{1+y'^2},$$

on aperçoit immédiatement l'intégrale première

$$y^2=a^2(1+y'^2)$$

qui conduit à

$$y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x-x_0}{a},$$

de sorte que l'on trouve bien la chaînette générale dont la base est Ox.

On pourrait mentionner la sinusoïde imaginaire, que l'on obtient en remplaçant la constante a^2 par $-a^2$, et la droite isotrope qui correspond à une valeur infinie de a.

6. Cas de la sphère. — Passons maintenant au cas de la sphère dont l'enveloppe se compose d'un plan (Π) et d'une surface développable. Le plan (Π) est pris pour plan xOy; le point I, centre de la sphère (Σ), a pour coordonnées (x, y, z), le point A $(x, y, 0)$ et le point

$B(x+\lambda p, y+\lambda q, -\lambda)$. La symétrie de A et B relativement au plan tangent en I à la surface (I) donne

$$\lambda = -\frac{2z}{1+p^2+q^2}. \tag{1}$$

L'applicabilité donne ensuite

$$[dx+d(\lambda p)]^2+[dy+d(\lambda q)]^2+d\lambda^2 = dx^2+dy^2$$

ou

$$d\lambda[(p^2+q^2+1)\,d\lambda+2\lambda(p\,dp+q\,dq)+2\,dz] + \lambda^2(dp^2+dq^2)+2\lambda(dp\,dx+dq\,dy)=0.$$

L'expression entre crochets est la différentielle de

$$\lambda(1+p^2+q^2)+2z;$$

elle est nulle et il reste, en supprimant la solution singulière $\lambda = 0$, l'équation

$$\lambda(dp^2+dq^2)+2(dp\,dx+dq\,dy)=0.$$

En remplaçant dp par $r\,dx+s\,dy$, dq par $s\,dx+t\,dy$, on a les trois équations à réunir à (1)

$$\lambda(r^2+s^2)+2r=0, \tag{2}$$

$$s[\lambda(r+t)+2]=0, \tag{3}$$

$$\lambda(s^2+t^2)+2t=0. \tag{4}$$

L'équation (3) est vérifiée pour $s=0$, et les deux autres deviennent

$$r(\lambda r+2)=0, \qquad t(\lambda t+2)=0,$$

on a une *première solution* $r=s=t=0$. La surface (1) est un plan quelconque; *on obtient les sphères inscrites dans un angle dièdre.*

On a ensuite une *seconde solution* $s=0$, $t=0$, $\lambda r+2=0$, pour laquelle $z=X+Y$, X et Y dépendant respectivement de x et y seul; $t=0$ entraîne

$$Y''=0, \qquad Y=\alpha y+\beta \qquad (\alpha, \beta = \text{const.}).$$

Les équations donnant λ deviennent

$$\lambda = -\frac{2}{X''} = -\frac{2(X+\alpha Y+\beta)}{1+X'^2+\alpha^2}$$

et, comme la première valeur de λ ne dépend que de x, on a $\alpha = 0$; β peut être incorporé à X (ce qui revient à prendre $\beta = 0$) et nous retrouvons l'équation

$$1 + X'^2 = XX'$$

qui conduit à une chaînette. *On a la solution cylindrique prévue* a priori *par des considérations géométriques.*

La troisième solution $s = r = 0$, $\lambda t + 2 = 0$, n'est pas distincte de la précédente : simple rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz.

La combinaison

$$s = 0, \qquad r + 2 = 0, \qquad t + 2 = 0, \qquad \lambda = -\frac{2z}{p^2 + q^2 + 1}$$

ne conduit à rien.

Nous allons maintenant supposer $s \neq 0$. L'équation (3) donne

$$\lambda = -\frac{2}{r + t},$$

ce qui, en comparant à (1), conduit à

$$(5) \qquad z(r + t) - (p^2 + q^2 + 1) = 0.$$

Les deux équations (2) et (4) entraînent par soustraction

$$(r - t)[\lambda(r + t) + 2] = 0,$$

équation satisfaite comme conséquence de (3); donc on peut se borner à considérer les deux équations

$$(2') \qquad \lambda(r^2 + s^2) + 2r = 0,$$

$$(3') \qquad \lambda(r + t) + 2 = 0,$$

qui remplacent (2), (3), (4).

La substitution $\lambda = -\frac{2}{r + t}$ dans (2') donne

$$(6) \qquad rt - s^2 = 0.$$

En résumé, *on conserve les équations* (5) *et* (6) *pour calculer* z, *puis* (1) *pour calculer* λ, *une fois* z *obtenu.*

Nous remarquons que l'équation (6) est explicitement intégrable; elle exprime que la surface (1) est *développable*. Nous pouvons donc considérer celle-ci comme l'enveloppe du plan mobile

$$(7) \qquad z = ax + by + c,$$

a, b, c étant des fonctions d'un paramètre u que nous nous réservons d'expliciter quand le moment sera venu, dans le but de simplifier nos équations.

La caractéristique de l'enveloppe est définie par

$$(8) \qquad a'x + b'y + c' = 0,$$

les accents indiquant des dérivées prises par rapport à u. On peut considérer les équations (7) et (8) comme définissant z et u en fonction de x et y; alors, en différentiant (8), on obtient

$$a'\,dx + b'\,dy + (a''x + b''y + c'')\,du = 0.$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a'}{a''x + b''y + c''}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{b'}{a''x + b''y + c''}.$$

Cela posé, d'après l'origine même de la question on a

$$p = a, \qquad q = b,$$

puis

$$r = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a'^2}{a''x + b''y + c''},$$
$$t = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{b'^2}{a''x + b''y + c''}.$$

Par substitution dans l'équation (5), nous obtenons

$$(9) \qquad (a'^2 + b'^2)(ax + by + c) + (a^2 + b^2 + 1)(a''x + b''y + c'') = 0.$$

Cette relation linéaire entre x et y, dont les coefficients sont des fonctions de u, a la même forme que (8). Si elle ne se réduit pas à une identité, elle ne devra pas être distincte de (8), sans quoi x, y, z, définis par (7), (8), (9), seraient des fonctions de la seule variable u, et l'on aurait une courbe au lieu d'une surface.

Or, on s'assure aisément que l'équation (9) ne peut pas être identique, car elle fournirait trois équations différentielles définissant a, b, c comme fonctions de u. Ce paramètre se trouverait explicité, ce qui est contraire à notre hypothèse.

La vraie condition est que les équations (8) et (9) en x et y aient leurs coefficients proportionnels, ce qui conduit à deux équations seulement

$$(10)\qquad \frac{(a^2+b^2+1)\,a''+(a'^2+b'^2)\,a}{a'}=\frac{(a^2+b^2+1)\,b''+(a'^2+b'^2)\,b}{b'}$$
$$=\frac{(a^2+b^2+1)\,c''+(a'^2+b'^2)\,c}{c'}.$$

Soit — B la valeur commune des rapports ; si nous posons

$$\mathrm{A}=a^2+b^2+1,\qquad \mathrm{C}=a'^2+b'^2,$$

nous voyons que a, b, c sont trois solutions de l'équation en θ

$$\mathrm{A}\theta''+\mathrm{B}\theta'+\mathrm{C}\theta=0.$$

Donc il existe entre a, b, c une relation linéaire et homogène à coefficients constants, ce qui indique que la trace du plan (7) sur $x\mathrm{O}y$ passe par un point fixe à distance finie ou infinie. La développable cherchée se réduit donc à un cône, ou à un cylindre parallèle au plan (II). Examinons séparément les deux cas.

Celui du cylindre est obtenu lorsque, dans la relation supposée entre a, b, c, le coefficient de c est nul. Si l'on choisit Ox parallèle aux génératrices, on aura $b=0$, et nous n'aurons plus à tenir compte que d'une équation (10)

$$(a^2+1)(a'c''-c'a'')-a'^2(ac'-ca')=0.$$

Nous avons le droit de préciser u en posant

$$a=\mathrm{sh}\,u,\qquad \text{d'où}\qquad a'=\mathrm{ch}\,u,\qquad a''=\mathrm{sh}\,u,$$

et il vient

$$c''\,\mathrm{ch}\,u-2c'\,\mathrm{sh}\,u+c\,\mathrm{ch}\,u=0.$$

Cette équation admettant la solution particulière évidente $c=\mathrm{sh}\,u$, pour obtenir l'intégrale générale nous poserons $c=\lambda\,\mathrm{sh}\,u$, et la fonction λ de u sera définie par

$$\lambda''\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u+2\lambda'=0,$$

qui donne successivement

$$\lambda'=-\frac{\alpha}{\mathrm{th}^2 u},\qquad \lambda=-\alpha(u-c\,\mathrm{th}\,u)+\beta,$$

α et β étant des constantes; puis

$$c = -\alpha(u \operatorname{sh} u - \operatorname{ch} u) + \beta \operatorname{sh} u,$$

et nous avons à chercher l'enveloppe du plan

$$z = (x + \beta) \operatorname{sh} u - \alpha(u \operatorname{sh} u - \operatorname{ch} u).$$

Le choix de l'origine permet d'annuler β, et l'on a l'équation dérivée par rapport à u

$$0 = (x - \alpha u) \operatorname{ch} u,$$

d'où

$$x = \alpha u \quad \text{et} \quad z = \alpha \operatorname{ch} u = \alpha \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha}.$$

On retrouve encore le cylindre admettant pour section droite une chaînette de base Ox.

Traitons maintenant le cas du cône. En prenant comme origine le point fixe à distance finie par où passe le plan mobile, on aura $c = 0$. Pour donner une interprétation avantageuse de u, permettant de s'affranchir d'une rotation autour de Oz, nous remarquons que a, b, fonctions de u, sont les coordonnées d'un point variable d'une courbe plane auxiliaire que nous considérerons comme l'enveloppe de la droite

$$x \cos u + y \sin u - h = 0,$$

h étant une certaine fonction inconnue de u. Le point de contact étant défini par l'équation

$$-x' \sin u + y \cos u - h' = 0,$$

nous aurons

$$a = h \cos u - h' \sin u, \qquad b = h \sin u + h' \cos u,$$

$$a' = -(h + h'') \sin u, \qquad b' = (h + h'') \cos u,$$

$$a'' = -(h + h'') \cos u - (h' + h''') \sin u,$$

$$b'' = -(h + h'') \sin u + (h' + h''') \cos u,$$

$$a^2 + b^2 = h^2 + h'^2, \qquad a'^2 + b'^2 = (h + h'')^2,$$

et h sera déterminé par l'équation unique

$$(a^2 + b^2 + 1)(a'b'' - b'a'') - (a'^2 + b'^2)(ab' - ba') = 0,$$

qui se réduit à

$$(h + h'')^2(h'^2 + 1 - hh'') = 0.$$

L'hypothèse $h + h'' = 0$ entraînant $a' = b' = 0$, a et b se réduiraient à des constantes, ce qui nous conduit aux sphères inscrites dans un angle dièdre. Pour l'autre solution, nous reconnaissons encore l'équation différentielle de la chaînette; donc si l'on s'en tient aux éléments réels, on aura, avec une seule constante arbitraire α, pourvu qu'on effectue une rotation convenable autour de Oz

$$h = \alpha \operatorname{ch} \frac{u}{\alpha}, \qquad h' = \operatorname{sh} \frac{u}{\alpha},$$

$$a = \alpha \operatorname{ch} \frac{u}{\alpha} \cos u - \operatorname{sh} \frac{u}{\alpha} \sin u, \qquad b = \operatorname{ch} \frac{u}{\alpha} \sin u + \operatorname{sh} \frac{u}{\alpha} \cos u.$$

Nous avons déterminé, en réalité, non pas directement le cône (I), mais le cône supplémentaire, lieu du support du vecteur variable $(a, b, -1)$. Remarquons qu'en vertu des équations d'où nous sommes parti pour introduire u, les deux vecteurs $(\cos u, \sin u, h)$ et $(-\sin u, \cos u, h')$ sont tous deux perpendiculaires sur le vecteur $(a, b, -1)$; comme le second est le dérivé du premier, cela prouve que *la courbe* (Γ) $(\cos u, \sin u, h)$ *est une directrice du cône* (I). *Cette courbe* (Γ) *résulte de l'enroulement, sur le cylindre* $x^2 + y^2 = 1$, *de la chaînette* $\eta = \alpha \operatorname{ch} \frac{\xi}{\alpha}$ *tracée dans un plan* (ξ, η), *la base de la chaînette s'enroulant sur la section droite du cylindre contenue dans le plan* xOy.

La solution imaginaire $h = \varepsilon i u$, $(h'' = 0)$ correspond à une hélice minima tracée sur le même cylindre.

Nous pouvons maintenant récapituler les surfaces (I) obtenues :

1° (I) est un plan; (B) est un plan;

2° (I) est un cylindre dont la section droite est une chaînette ayant sa base dans le plan xOy;

3° (I) est le cône $z = i\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$;

4° (I) est le cône $z = \alpha\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\alpha} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\right)$.

Il est intéressant de citer quelques propriétés de la chaînette sphérique, trace du cône (I) sur la sphère unitaire de centre O. On peut écrire pour cette courbe

$$x = \sin\varphi\cos\omega, \qquad y = \sin\varphi\sin\omega, \qquad z = \cos\varphi,$$
$$k\cot\varphi = \mathrm{ch}\, k\omega, \qquad \left(k = \frac{1}{\alpha}\right).$$

L'arc s est donné par la formule

$$ds^2 = d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\omega^2$$

et l'on trouve aisément

$$ds = \frac{\sqrt{k^2+1}\, d(\mathrm{sh}\, k\omega)}{k^2+1+\mathrm{sh}^2 k\omega}, \qquad \mathrm{tang}\, s = \frac{\mathrm{sh}\, k\omega}{\sqrt{k^2+1}}$$
$$r = \sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\cos s.$$

Cette dernière formule nous permet de vérifier directement, sur un cas particulier, le résultat général que nous avons établi au paragraphe **3**, relativement à certaines enveloppes de cercles tracés sur une sphère. Comme le rayon vecteur $r = \sin\varphi$ de la projection de la chaînette sphérique sur xOy est aussi la distance de O au plan du cercle (C) ou au centre de ce cercle, la relation dont il s'agit montre que le lieu de ce centre est la transformée d'un cercle de diamètre $\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ dont le plan a été enroulé sur le cône (I) et qui passe par son sommet. Si l'on déroule le cône sur un plan, en laissant fixe le point O et en entraînant les cercles (C), leurs plans passeront par une droite fixe, et eux-mêmes *passeront par deux points fixes*.

Enfin, sur le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, la courbe

$$\Gamma\left(\cos u,\ \sin u,\ \frac{1}{k}\,\mathrm{ch}\, ku\right)$$

est telle que *son plan osculateur fait avec le plan tangent au cylindre un angle constant.*

Nous n'avons évidemment traité qu'un cas particulier du problème qui consisterait à trouver toutes les enveloppes de sphères à deux paramètres telles que les deux nappes soient applicables par la correspondance des deux points limites. On voit aisément que le cas de deux cônes engendrés par les côtés d'un angle de grandeur constante est le seul où la congruence des droites AB admet comme surface focale le lieu du milieu du segment AB.

7. Sur une équation fonctionnelle. — Nous avons eu à intégrer le système

$$z(r + t) - (p^2 + q^2 + 1) = 0, \tag{5}$$

$$rt - s^2 + 0, \tag{6}$$

dans des conditions particulièrement avantageuses, puisque les intégrales générales des deux équations sont connues. Nous l'avons rappelé pour la seconde; mais, pour la première, si nous posons

$$u = x + iy, \qquad v = x - iy,$$

nous aurons

$$z = \frac{U - V}{2\sqrt{U'V'}},$$

U étant une fonction arbitraire de u, V de v.

Nous n'avions pas eu besoin de ce dernier résultat, car, partant de la solution connue de l'équation (6), nous avions substitué directement dans (5), ce qui nous avait donné sans difficulté la conclusion que nous cherchions.

Nous aurions été beaucoup moins bien inspirés en partant de l'intégrale de (5), comme nous allons le constater. Cependant, quand deux méthodes conduisent à un même résultat par des voies comportant des difficultés très inégales, il arrive que la plus simple fournisse automatiquement la solution d'un problème d'apparence moins encourageante. Le cas actuel donne un exemple de ce fait.

En exprimant que l'intégrale indiquée de l'équation (5) satisfait à (6), on obtient l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned}(U - V)^2(3U''^2 - 2U'U''')(3V''^2 - 2V'V''')\\ -[(U - V)U''V'' + 2(U''V'^2 - V''U'^2)] = 0.\end{aligned}$$

En considérant U′ comme fonction de U, V′ comme fonction de V, on obtient l'équation plus simple

$$\left[1 + \frac{2}{x - y}\left(\frac{Y}{Y'} - \frac{X}{X'}\right)\right]^2 = \left(1 - 2\frac{XX''}{X'^2}\right)\left(1 - 2\frac{YY''}{Y'^2}\right), \tag{E}$$

écrite en remplaçant U par x, U' par X, V par y, V' par Y. Cette équation entraîne

$$(E_1) \qquad 1 + \frac{2}{x - y}(Y_1 - X_1) = X_2 Y_2,$$

où X_1, X_2 dépendent de x seul, Y_1, Y_2 de y. On écrit (E_1) sous la forme

$$(x - y)X_2 Y_2 = x - 2X_1 - (y - 2Y_1)$$

et une double dérivation donne

$$(xX_2)' Y'_2 = X'_2 (yY_2)', \qquad \frac{(xX_2)'}{X'_2} = \frac{(yY_2)'}{Y'_2}.$$

On a aisément

$$X_2 = \frac{\alpha}{x - a}, \qquad Y = \frac{\beta}{y - a},$$

a, α, β étant constants; si l'on pose $\alpha\beta = b$, on a

$$2X_1 - x = \frac{b}{x - a} - c, \qquad 2Y_1 - y = \frac{b}{y - a} - c, \qquad X_2 Y_2 = \frac{b}{(x - a)(y - a)},$$

c étant une nouvelle constante. Comme on a

$$X_1 = \frac{X}{X'}, \qquad \frac{d}{dx}(2X_1 - x) = 1 - \frac{2XX''}{X'^2} = -\frac{b}{(x - a)^2},$$

on vérifie que $X_2^2\, Y_2^2$ est bien égal à $\left(1 - 2\frac{XX''}{X'^2}\right)\left(1 - 2\frac{YY''}{Y'^2}\right)$, de sorte que l'équation est effectivement *intégrable* et *intégrée*.