JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE FRÉCHET

**Une expression générale du $n^{\text{ième}}$ itéré d'un noyau de Fredholm en fonction de $n$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 15 (1936), p. 251-270.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__251_0>

# *Une expression générale du $n^{\text{ième}}$ itéré d'un noyau de Fredholm en fonction de* $n$ ;

PAR MAURICE **FRÉCHET**.

*Hommage.* — La théorie des probabilités en chaîne nous a conduit à revenir sur quelques points particuliers, comme celui qui est traité ici, de la théorie des équations intégrales. Il nous est agréable de pouvoir dédier ce petit Mémoire en hommage à M. Goursat, qui a su apporter une contribution importante à cette théorie que les mémoires fondamentaux de Fredholm semblaient avoir épuisé.

*Introduction.* — Dans un Mémoire récent (¹), nous avons montré que, grâce à la notion de noyaux orthogonaux due à MM. Goursat, Heywood et Lalesco, il est possible d'étudier le comportement asymptotique de la suite des noyaux itérés, sans connaître l'expression précise du $n^{\text{ième}}$ itéré en fonction de $n$. Toutefois, nous observions qu'il serait cependant souhaitable pour d'autres buts d'obtenir une telle expression. Ce problème était déjà résolu dans le cas des noyaux symétriques; il est aussi résolu aux pages 120-123 de notre Mémoire cité ci-dessus dans le cas des noyaux principaux. L'objet du présent Mémoire est de le résoudre dans le cas général (²).

A cet effet, nous utiliserons la méthode due à Erhardt Schmidt,

(¹) *Sur l'allure asymptotique de la suite des itérés d'un noyau de Fredholm*, *The Quart. Journ. of Math.* (Oxford Series), vol. 5, p. 106-144.

(²) Le présent exposé est la première partie du développement d'une note, *Sur une expression générale des noyaux itérés* (*Comptes rendus*, **199**, 1934, p. 1008).

qui permet de passer d'un noyau dissymétrique à un noyau symétrique.

Il est d'ailleurs possible que d'autres méthodes fournissent, soit le même résultat, soit même d'autres formes de développement (¹). Mais l'essentiel était de trouver au moins *une* expression générale des noyaux itérés.

Afin de mettre d'abord en évidence le principe de la méthode et d'éviter de la compliquer de difficultés accessoires, nous nous contenterons *dans le présent Mémoire* de considérer le cas d'un noyau *continu* et d'un domaine d'intégration *borné*. Mais la même méthode s'étend au cas d'un domaine d'intégration quelconque sur lequel le carré du noyau ou de l'un de ses itérés est « doublement » sommable. Il résulte seulement de cette extension quelques restrictions en ce qui concerne la nature des convergences des séries utilisées, comme nous le montrerons dans un Mémoire ultérieur.

Il y a lieu de noter que c'est le *Calcul des Probabilités* qui nous a conduit à nous poser le problème actuel. Dans le problème des probabilités en chaîne, on a en effet à déterminer une suite de densités de probabilités qui ne sont autres que les itérés de certains noyaux (²).

*Rappel des propriétés des fonctions auxiliaires de E. Schmidt.* — En nous limitant au cas d'un noyau *réel et continu* sur un domaine V *borné* et *fermé*, ceci nous permettra de renvoyer pour les démonstrations des propriétés des fonctions auxiliaires de Schmidt au 3ᵉ volume du *Cours d'Analyse mathématique* de M. Goursat, p. 470 de la 2ᵉ édition. Nous supposerons toutefois, pour plus de généralité, sans plus de complication, que le domaine d'intégration est un ensemble V de points de l'espace $R_\nu$ à $\nu$ dimensions et que le noyau $K(M, P)$ dépend des positions de deux points M, P variables sur V. Introduisons avec

(¹) C'est, en effet, ce qu'on peut réaliser en appliquant à l'équation d'itération des noyaux les résultats que nous avons obtenus pour l'équation plus générale de Chapman-Kolmogoroff [*voir* M. FRÉCHET, *Solution générale de l'équation de l'équation de Chapman-Kolmogoroff* (*Annali R. Sc. Norm. sup.*, Pisa, 1936)].

(²) *Voir*, par exemple, M. FRÉCHET, *Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans le problème des probabilités en chaîne* (*Bull. Soc. math. France*, 69, 1934, p. 68-83).

E. Schmidt, relativement au noyau K(M, P) et au domaine V, deux fonctions associées X(M), Y(P) telles que l'on ait simultanément

$$(\sigma)\begin{cases}(\sigma_{\mathrm{I}}) & X(M) = \mu \int_V K(M, P)\, Y(P)\, dP, \\ (\sigma_{\mathrm{II}}) & Y(M) = \mu \int_V K(P, M)\, X(P)\, dP,\end{cases}$$

où $\mu$ est une constante non nulle. Nous appellerons ces fonctions X, Y les *fonctions auxiliaires* correspondant à la *constante auxiliaire* $\mu$.

De telles fonctions sont respectivement solutions des équations

$$(1) \qquad X(M) = \mu^2 \int \overline{K(M, P)}\, X(P)\, dP,$$

avec

$$(2) \qquad \overline{K(M, P)} = \int_V K(M, Q)\, K(P, Q)\, dQ,$$

et

$$(3) \qquad Y(M) = \mu^2 \int \underline{K(M, P)}\, Y(P)\, dP$$

avec

$$(4) \qquad \underline{K(M, P} = \int_V K(Q, M)\, K(Q, P)\, dQ.$$

Il est clair que $\overline{K(M, P)}$ et $\underline{K(M, P)}$ sont deux noyaux continus symétriques. Ce sont de plus des noyaux « positifs », ceci signifiant que, pour toute fonction Z(M), on a, par exemple, pour $\overline{K}$,

$$\int_V \int_V \overline{K(M, P)}\, Z(M)\, Z(P)\, dM\, dP \geqq 0.$$

Il en résulte que $\overline{K(M, P)}$ a au moins une constante fondamentale, que ses constantes fondamentales $c_1$, $c_2$, ... sont toutes réelles et positives et que, par suite, le système ($\sigma$) ne peut être vérifié que pour $\mu = \pm\sqrt{c_1}$, $\pm\sqrt{c_2}$, .... On peut toujours supposer $\mu > 0$, en changeant, au besoin, de signe Y(M).

On démontre alors que les valeurs positives de $\mu$ pour lesquelles ($\sigma$) est vérifiée sont *toutes* les quantités

$$\mu_1 = \sqrt{c_1}, \qquad \mu_2 = \sqrt{c_2}, \qquad \ldots$$

et que les constantes fondamentales de $\underline{K(M, P)}$ sont les mêmes que celles de $\overline{K(M, P)}$. Tout système de solution $X(M)$, $Y(M)$ de $\sigma$ correspondant à $\mu_j = \sqrt{c_j}$ est formé d'une fonction fondamentale $X(M)$ de $\overline{K(M, P)}$ associée à $c_j$ et d'une fonction fondamentale $Y(M)$ de $\underline{K(M, P)}$ associée à $c_j$. Soit $X_1(M)$, $X_2(M)$, ... un système orthonormé sur V fournissant par ses combinaisons linéaires toutes les fonctions fondamentales de $\overline{K(M, P)}$, et tel que $X_j(M)$ corresponde à $c_j$ en admettant au besoin l'égalité d'un nombre fini de constantes $c_j$, avec $|c_1| \leqq |c_2| \leqq |c_3| \leqq \ldots$. Si l'on pose en appliquant $\sigma_{11}$

$$Y_j(M) = \sqrt{c_j} \int_V \underline{K(P, M)}\, X_j(P)\, dP, \tag{5}$$

les $Y_j(M)$ formeront un système orthonormé et toute fonction fondamentale de $\underline{K(M, P)}$ sera combinaison linéaire d'un nombre fini des $Y_j$.

On démontre que

$$\int_V \int_V K^2(M, P)\, dM\, dP = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \tag{6}$$

et comme

$$\int_V \int_V \left\{ K(M, P) - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{X_i(M)\, Y_i(P)}{\mu_i} \right\}^2 dM\, dP$$
$$= \int_V \int_V K^2(M, P)\, dM\, dP - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\mu_i^2},$$

il en résulte que la série

$$\sum_{i=1}^{i=+\infty} \frac{X_i(M)\, Y_i(P)}{\mu_i}, \tag{7}$$

sans être nécessairement convergente au sens ordinaire, converge vers $K(M, P)$ « en double moyenne quadratique » sur V, c'est-à-dire, ici, que

$$\lim_{n \to \infty} \int_V \int_V \left\{ K(M, P) - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{X_i(M)\, Y_i(P)}{\mu_i} \right\}^2 dM\, dP = 0. \tag{8}$$

D'ailleurs, bien entendu, s'il existe des coefficients constants $a_i$, tels que la série

$$\sum_{i=1}^{i=+\infty} a_i X_i(M) Y_i(P)$$

converge uniformément vers K(M, P), ces coefficients sont bien déterminés et égaux respectivement aux quantités $\frac{1}{\mu_i}$.

On démontre aussi les égalités

$$\overline{\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P})} = \sum_{i=1}^{i=+\infty} \frac{X_i(M) X_i(P)}{\mu_i^2}, \tag{9}$$

$$\underline{\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P})} = \sum_{i=1}^{i=+\infty} \frac{Y_i(M) Y_i(P)}{\mu_i^2}; \tag{10}$$

mais on démontre, cette fois, que les seconds membres sont des séries absolument et uniformément convergentes.

Enfin, on démontre que si $h(Q)$ est une fonction de carré intégrable sur V et si l'on pose

$$f(M) = \int_V K(M, Q)\, h(Q)\, dQ, \tag{11}$$

la fonction $f(M)$ est développable en une série absolument et uniformément convergente sur V, série qui est une combinaison linéaire de fonctions $X_j(M)$ et qui se réduit nécessairement à une somme d'un nombre fini de termes quand $\overline{\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P})}$ n'a qu'un nombre fini de constantes fondamentales.

De même, si $l(Q)$ est une fonction de carré intégrable sur V et si l'on pose

$$g(P) = \int_V K(Q, P)\, l(Q)\, dQ,$$

la fonction $g(P)$ est développable en une série absolument et uniformément convergente sur V, série qui est une combinaison linéaire de fonctions $Y_j(P)$ et qui se réduit nécessairement à une somme d'un nombre fini de termes quand $\overline{\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P})}$ n'a qu'un nombre fini de constantes fondamentales.

*Application aux noyaux itérés.* — Dans le cas où

$$h(Q) = K_n(Q, P),$$

on a

$$f(M) = K_{n+1}(M, P).$$

Donc, on peut écrire

$$K_{n+1}(M, P) = \sum_i u_i^{(n+1)}(P)\, X_i(M), \tag{12}$$

le second membre étant alors une série absolument et uniformément convergente sur V, pour P fixe. En multipliant par la fonction continue $X_k(M)$, on peut donc intégrer terme à terme et l'on a

$$\int_V K_{n+1}(M, P)\, X_k(M)\, dM = \sum_i u_i^{(n+1)}(P) \int_V X_i(M)\, X_k(M)\, dM.$$

D'où

$$u_k^{(n+1)}(P) = \int_V K_{n+1}(M, P)\, X_k(M)\, dM \tag{13}$$

et, par suite,

$$u_k^{(n+1)}(P) = \int_V \left[ \int_V K_n(M, Q)\, X_k(M)\, dM \right] K(Q, P)\, d\varphi = \int_V l(Q)\, K(Q, P)\, d\varphi.$$

En vertu du dernier théorème cité, il en résulte que $u_k^{(n+1)}(P)$ est une combinaison linéaire absolument et uniformément convergente des $Y_j(P)$ :

$$u_k^{(n+1)}(P) = \sum_j \gamma_{kj}(n+1)\, Y_j(P). \tag{14}$$

Dès lors,

$$\boxed{K_{n+1}(M, P) = \sum_i \left[ \sum_j \gamma_{ij}(n+1)\, Y_j(P) \right] X_i(M).} \tag{15}$$

*On a ainsi exprimé* $K_{n+1}(M, P)$ *sous la forme d'une série double* dans laquelle *la dépendance de* $K_{n+1}(M, P)$ *relativement à n est reléguée dans les termes* $\gamma_{ij}(n+1)$, qui sont indépendants de M et de P. Pour déterminer ceux-ci, il suffit d'observer qu'on a, en vertu de (14) et (13),

$$\gamma_{ij}(n+1)=\int_V Y_j(P)\,u_i^{(n+1)}(P)\,dP,$$

$$(16)\qquad \gamma_{ij}(n+1)=\int_V\int_V K_{n+1}(M,P)\,X_i(M)\,Y_j(P)\,dM\,dP.$$

On est parti, pour obtenir (15), de la formule

$$(17)\qquad K_{n+1}(M,P)=\int_V K(M,Q)\,K_n(Q,P)\,d\varphi.$$

Mais on a aussi

$$K_{n+1}(M,P)=\int_V K(Q,P)\,K_n(M,Q).$$

En opérant de la même manière, à partir de cette formule, on aurait obtenu *le développement*

$$(15\,bis)\qquad \boxed{K_{n+1}(M,P)=\sum_j\left[\sum_i\gamma_{ij}(n+1)\,X_i(M)\right]Y_j(P)}$$

*dans lequel les deux séries*

$$v_j^{(n+1)}(M)=\sum_i\gamma_{ij}(n+1)X_i(M),\qquad K_{n+1}(M,P)=\sum_j v_j^{(n+1)}(M)Y_i(P)$$

sont chacune *absolument et uniformément convergentes* sur V, la première quand M varie, la seconde quand M restant fixe, P varie. Ceci conduirait à considérer la série double

$$\sum_{ij}\gamma_{ij}(n+1)\,X_i(M)\,Y_j(P)$$

sans s'assujettir comme dans (15) et (15 *bis*) à la sommer d'abord par ligne ou d'abord par colonne. Nous envisagerons successivement plusieurs procédés de sommation de cette série double

*Convergence en double moyenne quadratique.* — On peut être aussi conduit à la considération de la série double

$$\sum_{i,j=1}^{i,j=\infty}\gamma_{ij}(n)\,X_i(M)\,Y_j(P)$$

par une autre voie. Considérons la somme

$$S_{r,s}(M, P) = \sum_{i=1}^{i=r} \sum_{j=1}^{j=s} \alpha_{ij} X_i(M) Y_j(P) \tag{18}$$

et cherchons à déterminer les coefficients réels arbitraires $\alpha_{ij}$ de sorte que l'intégrale double

$$U = \int_V \int_V \{ K_n(M, P) - S_{r,s}(M, P) \}^2 \, dM \, dP \tag{19}$$

soit minimum. On a

$$U = \int_V \int_V K_n^2(M, P) \, dM \, dP$$

$$- 2 \sum_{ij} \alpha_{ij} \int_V \int_V K_n(M, P) X_i(M) Y_j(P) \, dM \, dP + \sum_{ij} (\alpha_{ij})^2;$$

$$U = I_n - \sum^{r,s} [\gamma_{ij}(n)]^2 + \sum^{r,s} [\alpha_{ij} - \gamma_{ij}(n)]^2. \tag{20}$$

Donc U est minimum pour $\alpha_{ij} = \gamma_{ij}(n)$. La valeur minimum est nécessairement $\geqq 0$. Donc,

$$\sum_{i=1}^{i=r} \sum_{j=1}^{j=s} [\gamma_{ij}(n)]^2 \leqq I_n = \int_V \int_V K_n^2(M, P) \, dM \, dP.$$

Par suite, *la série double des* $[\gamma_{ij}(n)]^2$ *est convergente* et sa somme est au plus égale à $I_n$.

On peut même montrer qu'*elle lui est égale*. On a, en effet,

$$I_n = \int_V \int_V \int_V \int_V \int_V \int_V K(M, Q) K_{n-2}(Q, R) K(R, P) K(M, S)$$
$$\times K_{n-2}(S, T) K(T, P) \, dQ \, dR \, dS \, dT \, dM \, dP$$
$$= \int_V \cdots \int_V \underline{K(Q, S)} K_{n-2}(Q, R) K_{n-2}(S, T) \overline{K(R, T)} \, dQ \, dR \, dS \, dT$$

et, d'après (9) et (10), où la convergence est uniforme et absolue,

$$I_n = \sum_{ij} \int_V \cdots \int_V \frac{Y_i(Q) Y_i(S)}{\mu_i^2} K_{n-2}(Q, R) K_{n-2}(S, T) \frac{X_j(R) X_j(T)}{\mu_j^2} \, dQ \, dR \, dS \, dT.$$

En remplaçant les $X_i$ et $Y_j$ au moyen des expressions correspondant à $\sigma_{\text{I}}$ et $\sigma_{\text{II}}$, on a

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{ij} \int_V \cdots \int_V X_i(M) K(M, Q) X_i(U) K(U, S) K_{n-2}(Q, R) K_{n-2}(S, T) Y_j(P) \\ &\quad \times K(R, P) Y_j(V) K(T, V)\, dQ\, dR\, dS\, dT\, dM\, dP\, dU\, dV \\ &= \sum_{ij} \left[ \int_V \cdots \int_V X_i(M) K_n(M, P) Y_j(P)\, dM\, dP \right] \\ &\quad \times \left[ \int_V \int_V X_i(U) K_n(U, V) Y_j(V)\, dU\, dV \right] \\ &= \sum_{ij} [\gamma_{ij}(n)]^2. \end{aligned}$$

D'où finalement

$$\boxed{\int_V \int_V [K_n(M, P)]^2\, dM\, dP = \sum_{ij} [\gamma_{ij}(n)]^2,} \tag{21}$$

où

$$\gamma_{ij}(n) = \int_V \int_V K_n(M, P) X_i(M) Y_j(P)\, dM\, dP. \tag{22}$$

La démonstration de cette formule est valable évidemment pour $n - 2 \geqq 1$. Elle est aussi valable pour $n = 2$ en remplaçant dans les calculs $K_{n-2}$ par 1 et diminuant le nombre des intégrations d'une unité à chaque fois. Enfin, pour $n = 1$, elle reste valable en écrivant

$$I_1 = \int_V \int_V K(MQ) K(M, Q)\, dM\, dQ = \int_V \overline{K(M, M)}\, dM$$

et remplaçant $\overline{K(M, M)}$ par son développement (9), ce qui donne la formule connue (6). Or, celle-ci peut s'écrire sous la forme (21) pour $n = 1$, si l'on observe que

$$\gamma_{ij}(1) = \int_V \left[ \int_V K(M, P) Y_j(P) \right] X_i(M)\, dM = \frac{1}{\mu_j} \int_V X_i(M) X_j(M)\, dM = \frac{\delta_{ij}}{\mu_j}$$

en posant

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

En définitive, *la formule* (21) *est valable pour toute valeur entière de* $n \geqq 1$.

En vertu des formules (18), (19), (20), (21), on voit qu'en posant

$$\sigma_n^{(r,s)}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \sum_{i=1}^{i=r} \sum_{j=1}^{j=s} \gamma_{ij}(n) \mathrm{X}_i(\mathrm{M}) \mathrm{Y}_i(\mathrm{P}),$$

on a

$$\lim_{\substack{r \to +\infty \\ s \to +\infty}} \int_{\mathrm{V}} \int_{\mathrm{V}} [\mathrm{K}_n(\mathrm{M}, \mathrm{P}) - \sigma_n^{(r,s)}(\mathrm{M}, \mathrm{P})]^2 \, d\mathrm{M} \, d\mathrm{P} = 0.$$

C'est ce qu'on exprimera en disant que *la série double*

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{i=+\infty \\ j=+\infty}} \gamma_{ij}(n) \mathrm{X}_i(\mathrm{M}) \mathrm{Y}_j(\mathrm{P})$$

*converge vers* $\mathrm{K}_n(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ EN DOUBLE MOYENNE QUADRATIQUE *sur* V, — résultat déjà connu pour $n = 1$ —, et ce qu'on représentera par la notation

$$(23) \qquad \boxed{\mathrm{K}_n(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \approx \sum_{i,j} \gamma_{i,j}(n) \mathrm{X}_i(\mathrm{M}) \mathrm{Y}_j(\mathrm{P}).}$$

*Calcul des coefficients du développement de* $\mathrm{K}_{n+1}$. Il est clair que la formule d'itération qui définit les $\mathrm{K}_n$, soit

$$(24) \qquad \mathrm{K}_{n+r}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \int_{\mathrm{V}} \mathrm{K}_n(\mathrm{M}, \mathrm{Q}) \mathrm{K}_r(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) \, d\mathrm{Q},$$

doit se traduire par une formule correspondante reliant les coefficients $\gamma_{ij}(n)$. Cependant, un premier calcul fait avec les $\gamma_{ij}(n)$ montre qu'on obtient un résultat plus simple en considérant au lieu des $\gamma$, les quantités $\alpha$ définies par

$$(25) \qquad \alpha_{ij}(n) = \sqrt{\mu_i \mu_j} \gamma_{ij}(n+1).$$

On a alors

$$(25 \textit{ bis}) \qquad \alpha_{ij}(n+p) = \sqrt{\mu_i \mu_j} \int_{\mathrm{V}} \int_{\mathrm{V}} \left[ \int_{\mathrm{V}} \mathrm{K}_{n+1}(\mathrm{M}, \mathrm{Q}) \mathrm{K}_p(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) \, d\mathrm{Q} \right] \times \mathrm{X}_i(\mathrm{M}) \mathrm{Y}_j(\mathrm{P}) \, d\mathrm{M} \, d\mathrm{P}.$$

Or, on a le droit de remplacer dans l'intégrale $K_{n+1}$ par son développement en double moyenne quadratique

$$K_{n+1}(M, Q) \approx \sum_{ek} \frac{\alpha_{ek}(n)}{\sqrt{\mu_e \mu_k}} X_e(M) Y_k(Q) \tag{26}$$

et d'intégrer terme à terme ([1]).

On a donc

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}(n+p) &= \sqrt{\mu_i \mu_j} \sum_{ek} \frac{\alpha_{ek}(n)}{\sqrt{\mu_e \mu_k}} \left[ \int_V X_i(M) X_e(M)\, dM \right] \\ &\quad \times \left[ \int_V \int_V Y_k(Q) K_p(Q, P) Y_j(P)\, dQ\, dP \right] \\ &= \sqrt{\mu_i \mu_j} \sum_k \frac{\alpha_{ik}(n)}{\sqrt{\mu_i \mu_k}} \int_V \int_V \left[ \mu_k \int_V K(R, Q) X_k(R)\, dR \right] K_p(Q, P) Y_j(P)\, dQ\, dP \\ &= \sum_k \alpha_{ik}(n) \left\{ \sqrt{\mu_j \mu_k} \int_V K_{p+1}(R, P) X_k(R) Y_j(P)\, dR\, dP \right\}.\end{aligned}$$

D'où, finalement, la relation de récurrence entre les $\alpha$ ([2])

$$\boxed{\alpha_{ij}(n+p) = \sum_{k=1}^{k=+\infty} \alpha_{ik}(n) \alpha_{kj}(p).} \tag{24 bis}$$

Ainsi *la détermimation de* $K_n(M, P)$ *en fonction de* $n$ [où $K_n(M, P)$ dépend, en plus de $n$, *de deux variables continues* M, P] *est ramenée par la formule* (26) *à la détermination de* $\alpha_{ij}(n)$ *en fonction de* $n$ [où $\alpha_{ij}(n)$ dépend, en dehors de $n$, de deux *entiers* $i, j$ variant de 1 à $+\infty$]. Et de plus, *la relation d'itération* (24 *bis*) *entre les* $\alpha$ *est exactement du type correspondant à la relation* (24) *d'itération entre les* $K_n$.

---

([1]) En effet, si l'on substitue dans (25 *bis*) à $K_{n+1}$ le commencement de son développement (26), on constate que le carré de la différence des valeurs du second membre de (25 *bis*), après et avant la substitution, peut, en vertu de l'inégalité de Schwarz, être rendu aussi petit que l'on veut.

([2]) On observera que cette relation (24 *bis*) est aussi celle qui se présente dans le problème des probabilités en chaîne, dans le cas où un point aléatoire A peut occuper un ensemble dénombrable *infini* de positions distinctes connues d'avance $A_1, A_2, \ldots$ et où $\alpha_{ij}(n)$ est la probabilité qu'en $n$ épreuves A passe de $A_i$ à $A_j$.

On pourra calculer les $\alpha_{ij}(n)$ de proche en proche au moyen des relations obtenues en faisant dans (24 *bis*), soit $n=1$, soit $p=1$, c'est-à-dire, en posant

$$\alpha_{ik}=\alpha_{ik}(1), \tag{27}$$

$$\alpha_{ij}(n+1)=\sum_k \alpha_{ik}\alpha_{kj}(n)=\sum_k \alpha_{ik}(n)\alpha_{kj}. \tag{28}$$

Il faut alors connaître les valeurs des $\alpha_{ik}$. Or,

$$\begin{aligned}\alpha_{ik}&=\sqrt{\mu_i\mu_k}\int_V\int_V\left[\int K(M,Q)K(Q,P)\,dQ\right]X_i(M)Y_k(P)\,dM\,dP\\ &=\sqrt{\mu_i\mu_k}\int_V\left[\int_V K(M,Q)X_i(M)\,dM\right]\left[\int_V K(Q,P)Y_k(P)\,dP\right]dQ\\ &=\sqrt{\mu_i\mu_k}\int_V\frac{Y_i(Q)}{\mu_i}\,\frac{X_k(Q)}{\mu_k}\,dQ.\end{aligned}$$

D'où

$$\alpha_{ik}=\frac{\int_V X_k(Q)Y_i(Q)\,dQ}{\sqrt{\mu_i\mu_k}}=\frac{u_{ki}}{\sqrt{\mu_i\mu_k}}. \tag{29}$$

*Convergence de la relation de récurrence entre les* $\alpha_{ik}(n)$. La démonstration précédente établit du même coup la convergence du second membre de (24 *bis*) et son égalité à $\alpha_{ij}(n+p)$.

On peut démontrer séparément la convergence d'une façon qui prouve que la convergence est absolue et fournit en même temps un autre résultat utile par ailleurs.

Considérons la somme partielle

$$\rho_{rr'}=\sum_{k=r}^{k=r'}[\alpha_{ki}(n)]^2$$

de la série

$$\sum_{k=1}^{k=+\infty}[\alpha_{ki}(n)]^2.$$

Pour établir la convergence de cette dernière, nous montrerons que $\rho_{rr'}$ est infiniment petit avec $\frac{1}{r}$, quel que soit $r'>r$. A cet effet, écrivons

$$\begin{aligned}
\rho_{rr'} &= \sum_{k=r}^{k=r'} \alpha_{ki}(n)\sqrt{\mu_k\mu_i}\int_V\int_V K_{n+1}(M, P)X_k(M)Y_i(P)\,dM\,dP \\
&= \sum_{k=r}^{k=r'}\sqrt{\mu_k\mu_i}\,\alpha_{ki}(n)\left(\int_V\left\{\left[\int_V X_k(M)K(M, Q)\,dM\right]\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.\times\left[\int_V K_n(Q, P)Y_i(P)\,dP\right]dQ\right\}\int_V X_i(R)X_i(R)\,dR\right) \\
&= \mu_i\int_V\int_V\left[\sum_{k=r}^{k=r'}\frac{\alpha_{ki}(n)}{\sqrt{\mu_k\mu_i}}X_i(R)Y_k(Q)\right]\left[\int_V K_n(Q, P)Y_i(P)\,dP\right]X_i(R)\,dQ\,dR.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Schwarz

$$[S_{rr'}]^2 \leqq \mu_i^2 RI_n$$

avec

$$R = \int_V\int_V\left[\sum_{k=r}^{k=r'}\gamma_{ki}(n+1)X_i(R)Y_k(Q)\right]^2 dQ\,dR = \sum_{k=r}^{k=r'}[\gamma_{ki}(n+1)]^2.$$

Or, on a vu, en établissant la formule (21) que la série double

$$\sum_{\substack{k=1\\ l=1}}^{\substack{k=+\infty\\ l=+\infty}} [\gamma_{kl}(n+1)]^2$$

est convergente. Comme elle est à termes $\geqq 0$, il en résulte que R et par suite $\rho_{rr'}$ est infiniment petit avec $\frac{1}{r}$.

Ainsi *la série*

$$\sum_{k=1}^{k=+\infty}[\alpha_{ki}(n)]^2$$

*est convergente;* de la même façon, on montrerait que *la série*

$$\sum_{k=1}^{k=+\infty}[\alpha_{ik}(n)]^2$$

*est convergente.*

En vertu de l'inégalité

$$\sum_k |a_k b_k| \leqq \frac{1}{2}\left[\sum_k a_k^2 + \sum_k b_k^2\right],$$

il en résulte que la série

$$\sum_k \alpha_{jk}(n)\alpha_{ki}(p) = \alpha_{ji}(n+p)$$

est *absolument* convergente.

En même temps, on a réduit l'étendue du champ de recherches de la solution du problème : trouver l'expression générale en fonction de $n$ des solutions $\alpha_{jk}(n)$ du système (24 *bis*) d'équations d'itération en nombre infini, à une infinité d'inconnues, ou plus précisément du système (28) précisé par (29). Dans ces systèmes, en effet, non seulement on doit supposer, pour qu'ils aient un sens, que les séries qui y figurent soient convergentes, mais les quantités $\alpha_{jk}(n)$ sont soumises à la condition restrictive que les deux séries

$$\sum_{k=1}^{k=+\infty} [\alpha_{ki}(n)]^2, \quad \sum_{k=1}^{k=+\infty} [\alpha_{jk}(n)]^2$$

soient convergentes.

*Remarque.* — De la formule

$$\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \approx \sum_i \frac{\mathrm{X}_i(\mathrm{M})\mathrm{Y}_i(\mathrm{P})}{\mu_i},$$

on pourrait déduire

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{V}} \mathrm{K}_2(\mathrm{M}, \mathrm{M})\, d\mathrm{M} &= \int_{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}} \mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\mathrm{K}(\mathrm{P}, \mathrm{M})\, d\mathrm{M}\, d\mathrm{P} \\ &= \sum_{ij} \int_{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}} \frac{\mathrm{X}_i(\mathrm{M})\mathrm{Y}_i(\mathrm{P})}{\mu_i}\,\frac{\mathrm{X}_j(\mathrm{P})\mathrm{Y}_j(\mathrm{M})}{\mu_j}\, d\mathrm{M}\, d\mathrm{P} \\ &= \sum_{ij} \frac{1}{\mu_i\mu_j}\int_{\mathrm{V}} \mathrm{X}_i(\mathrm{M})\mathrm{Y}_j(\mathrm{M})\, d\mathrm{M} \int_{\mathrm{V}} \mathrm{X}_j(\mathrm{P})\mathrm{Y}_i(\mathrm{P})\, \mathrm{P}d.\end{aligned}$$

D'où la valeur de la seconde « trace » de K

$$\int_{\mathrm{V}} \mathrm{K}_2(\mathrm{M}, \mathrm{M})\, d\mathrm{M} = \sum_{ij} \frac{u_{ij}u_{ji}}{\mu_i\mu_j}.$$

Mais il existe une expression plus simple de cette trace donnée par la formule, due à B. Hostinsky ([1]),

$$\int_V \int_V K(M, P) K(P, M)\, dM\, dP = \sum_j \frac{1}{(\lambda_j)^2},$$

où les $\lambda_j$ sont les constantes fondamentales de $K(M, P)$; cette formule est à rapprocher de la formule de Schur

$$\int_V \int_V K(M, P)^2\, dM\, dP \geqq \sum_j \frac{1}{|\lambda_j|^2}.$$

*Cas de convergence uniforme du développement de* $K_n$. — Retournons au développement de $K_n$ en série double. En l'écrivant sous la forme

$$\sum_{ij} U_{ij},$$

nous avons vu que les séries $s_i = \sum_j U_{ij}$, $\sum_i s_i$, $\sigma_i = \sum_i U_{ij}$, $\sum_j \sigma_j$ sont absolument convergentes. Il n'en résulte pas de façon immédiate que la série $\sum_{ij} U_{ij}$ soit absolument convergente ([2]). Nous avons vu aussi que $s_i$ et $\Sigma s_i$ sont uniformément convergentes, l'une quand, M étant fixe, P varie, l'autre quand P étant fixe M varie ; il n'en résulte pas immédiatement que la série $\sum_{ij} U_{ij}$ converge uniformément quand M et P varient simultanément.

---

([1]) *Notes sur l'équation de Fredholm* (*Public. de la Fac. Sc. Univ. Masaryk, Brno*, 1921, n° 1, p. 14).

([2]) C'est ce que montre l'exemple suivant emprunté à Bromwich. On prend pour tableau des $U_{ij}$ :

$$\begin{array}{l}
0 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots, \\
-1 + 0 + 1 + 0 + 0 + \ldots, \\
0 - 1 + 0 + 1 + 0 + \ldots, \\
0 + 0 - 1 + 0 + 1 + \ldots, \\
0 + 0 + 0 - 1 + 0 + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Nous allons indiquer un cas très général où l'on est assuré que $\sum_{ij} U_{ij}$ converge absolument et uniformément quand M et P varient indépendamment sur V. Dans ce but, nous allons déterminer des majorations utiles des quantités $\gamma_{ik}(n)$, $X_i(M)$, $Y_j(P)$.

On voit d'abord que la solution générale des équations d'itération (28) peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_{ik}(n) = \sum_{k_1, \ldots, k_{n-1}} \alpha_{ik_1}\alpha_{k_1 k_2} \ldots \alpha_{k_{n-2}k_{n-1}}\alpha_{k_{n-1}j},$$

où le second membre est une série multiple à $n$ entrées, qui est absolument convergente. Dès lors, en vertu de (29), on aura

$$\gamma_{ij}(2) = \frac{u_{ij}}{\mu_i \mu_j}$$

et, pour $n \geqq 2$,

$$\gamma_{ij}(n+1) = \frac{\alpha_{ij}(n)}{\sqrt{\mu_i \mu_j}} = \frac{1}{\mu_i \mu_j} \sum_{k_1, \ldots, k_{n-1}} \frac{u_{ik_1} u_{k_1 k_2} \ldots u_{k_{n-1},j}}{\mu_{k_1}\mu_{k_2} \ldots \mu_{k_{n-1}}}.$$

Or

$$(u_{ij})^2 = \left[\int_V X_i(M) Y_j(M)\, dM\right]^2 \leqq \int_V X_i^2(M)\, dM \int_V Y_j^2(M)\, dM \leqq 1$$

Donc $|u_{ij}| \leqq 1$ et, alors,

$$|\gamma_{ij}(2)| \leqq \frac{1}{\mu_i \mu_j}$$

et, pour $n \geqq 2$,

$$|\gamma_{ij}(n+1)| \leqq \frac{1}{\mu_i \mu_j} \sum_{k_1, \ldots, k_{n-1}} \left[\frac{1}{\mu_{k_1}} \frac{1}{\mu_{k_2}} \cdots \frac{1}{\mu_{k_{n-1}}}\right],$$

pourvu que la série multiple du dernier membre soit convergente. Or, celle-ci n'est autre que le développement formel de $\left[\sum \frac{1}{\mu_k}\right]^{n-1}$. Donc si la série $\sigma = \sum_k \frac{1}{\mu_k}$ converge, on a

$$|\gamma_{ij}(n+1)| \leqq \frac{\sigma^{n-1}}{\mu_i \mu_j}.$$

Dès lors, la série formelle

$$K_{n+1}(M, P) \approx \sum_{ij} \gamma_{ij}(n+1) X_i(M) Y_j(P) \tag{30}$$

est majorée par la série formelle

$$\sigma^{n-1}\sum_{ij}\left|\frac{X_i(M)}{\mu_i}\right|\left|\frac{Y_j(P)}{\mu_j}\right|$$

laquelle est le développement formel du produit

$$\sigma^{n-1}\left\{\sum_i \frac{|X_i(M)|}{\mu_i}\right\}\left\{\sum_j \frac{|Y_j(P)|}{\mu_j}\right\}.$$

On peut déjà montrer que les termes des deux séries en accolade sont toujours bornés. Car on a, en vertu de l'inégalité de Schwarz et de la définition de $X_i$, $Y_j$,

$$|X_i(M)| \leqq \mu_i\sqrt{\int_V K^2(M, P)\,dP}, \qquad |Y_j(M)| \leqq \mu_j\sqrt{\int_V K^2(P, M)\,dP}$$

et, puisque K et V sont bornés, il existe un nombre T indépendant de $i, j$, M, P, tel que

$$|X_i(M)| \leqq \mu_i T, \qquad |Y_j(M)| \leqq \mu_j T.$$

Finalement : *si la série* $\sigma = \sum_k \frac{1}{\mu_k}$ *est convergente; si, de plus, les séries*

$$\sum_i \frac{|X_i(M)|}{\mu_i}, \quad \sum_j \frac{|Y_j(P)|}{\mu_j}$$

*sont uniformément convergentes, il en sera de même du développement* (30) *de* $K_{n+1}(M, P)$ *pour* $n \geqq 1$.

Par exemple, c'est ce qui aura lieu quand V se réduit à l'intervalle $(0, \pi)$, quand $X_i(M)$, $Y_j(P)$ deviennent

$$X_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \qquad Y_k(y) = \frac{\cos ky}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}},$$

pourvu que la série $\sum_k \frac{1}{\mu_k}$ soit convergente. Dans ce cas, le développement de $K_{n+1}$ sera même « normalement » convergent au sens de Baire, c'est-à-dire majoré par une série convergente à termes indépendants de M et P, à savoir la série double

$$\sum_{ij} \frac{2\sigma^{n-1}}{\pi\mu_i\mu_j} = \frac{2}{\pi}\sigma^{n+1}.$$

*Exemple.* — Considérons le noyau

$$K(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{j=+\infty} q^j \sin jx \cos jy \qquad (0 < q < 1)$$

et le domaine d'intégration V réduit l'intervalle $(0, \pi)$.

La série qui définit K est normalement convergente; par suite $K(x, y)$ est continue en $x$ et $y$ sur V.

Pour le vérifier directement, on peut écrire

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi}[A(x+y) + A(x-y)]$$

et calculer facilement la somme de la série $A(\varphi) = \sum_{j \geq 1} q^j \sin j\varphi$. On en déduit de la forme explicite de K

$$K(x, y) = \frac{q}{\pi}\left\{\frac{\sin(x+y)}{1 - 2q\cos(x+y) + q^2} + \frac{\sin(x-y)}{1 - 2q\cos(x-y) + q^2}\right\}.$$

Les fonctions auxiliaires sont définies par le système $\sigma$ de la page 253, qui devient ici

$$X(x) = \frac{2\mu}{\pi} \sum_j q^j \sin jx \int_V Y(y) \cos jy\, dy,$$

$$Y(y) = \frac{2\mu}{\pi} \sum_j q^j \cos jy \int_V X(x) \sin jx\, dx.$$

Ainsi X et Y sont de la forme

$$(31) \qquad X(x) = \sum_j A_j \sin jx, \qquad Y(y) = \sum_j B_j \cos jy$$

avec

$$(32) \quad A_j = \frac{2\mu}{\pi} q^j \int_V Y(y) \cos jy\, dy, \qquad B_j = \frac{2\mu}{\pi} q^j \int_V X(x) \sin jx\, dx.$$

Si l'on se limite aux fonctions auxiliaires de carrés intégrables ces deux séries seront normalement convergentes (de sorte que les fonctions auxiliaires seront même continues). Car en vertu de l'inégalité de Schwarz

$$|A_j| \leqq \frac{2\mu}{\pi} q^j \sqrt{\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} Y^2(y)\,dy} = Hq^j$$

et de même

$$|B_j| \leqq Lq^j.$$

Il est alors légitime de remplacer dans (32), $X(x)$ et $Y(y)$ par leurs développements (31) et d'intégrer terme à terme. On a ainsi

$$A_j = \frac{2\mu}{\pi} q^j \sum_k B_k \int_0^{\pi} \cos ky \cos jy\,dy = \mu q^j B_j$$

et de même

$$B_j = \mu q^j A_j.$$

D'où, par substitution, $A_j = (\mu q^j)^2 A_j$, c'est-à-dire

$$(\mu q^j)^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad A_j = 0.$$

Les $A_j$ n'étant pas tous nuls, $\mu$ (qui est positif comme $q$) est égal à l'une des quantités $\frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots,$ par exemple $\frac{1}{q^k}$; on a alors

$$\mu = \frac{1}{q^k}, \qquad A_j = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k, \qquad B_j = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k \quad \text{et} \quad A_k = B_k.$$

On aura ainsi un couple fonctions auxiliaires

$$X_k(x) = A_k \sin kx, \qquad Y_k(y) = A_k \cos ky,$$

et puisque $X_k(x)$ est normée $A_k = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. On peut prendre par exemple $A_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. D'où finalement les deux systèmes de fonctions auxiliaires et de constantes auxiliaires

$$X_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \qquad \dots, \qquad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx, \qquad \dots,$$

$$Y_1(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x, \qquad \dots. \qquad Y_k(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos ky, \qquad \dots,$$

$$\mu_1 = \frac{1}{q}, \qquad \dots, \qquad \mu_k = \frac{1}{q^k}, \qquad \dots.$$

Et l'on peut écrire

$$K(x, y) = \sum_k \frac{X_k(x) Y_k(y)}{\mu_k},$$

où le second membre converge vers $K(x, y)$, non seulement, comme dans la théorie générale, en double moyenne quadratique, mais en particulier, ici *normalement*.

Dans le cas actuel, la série $\sum_k \frac{1}{\mu_k} = \sum q^k$ est convergente et les deux séries

$$\sum_k \frac{X_k(x)}{\mu_k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_k q^k \sin kx, \qquad \sum_k \frac{Y_k(y)}{\mu_k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_k q^k \cos ky$$

sont normalement convergentes. D'après la page 267, il en résulte qu'on pourra représenter $K_n$ sous la forme d'une série double

$$K_n(x, y) = \sum_{hj} \gamma_{hj}(n) X_h(x) Y_j(y) = \frac{2}{\pi} \sum_{hj} \gamma_{hj}(n) \sin hx \cos jy$$

*normalement convergente* quand $x$ et $y$ varient *simultanément* de manières indépendantes.