JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. LIÉNARD

Signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 235-250.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__235_0>

Signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique;

PAR A. LIÉNARD.

1. Le présent travail forme un complément au Mémoire sur le même objet que M. Chipart et moi avons publié en 1914 au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (6e série, t. X, p. 291 à 346). Le lecteur n'aura pas besoin de se reporter au premier Mémoire : notre exposé forme un tout par lui-même.

Comme dans le Mémoire primitif, il ne sera question que des équations à coefficients réels.

Rappelons d'abord que, pour abréger le langage, nous avons appelé *pseudo-positive* une quantité qui est, soit réelle et positive, soit imaginaire à partie réelle positive. Une définition semblable concerne les quantités pseudo-négatives. Toute quantité qui n'est ni pseudo-positive ni pseudo-négative est nécessairement nulle ou purement imaginaire.

Si

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

est l'équation algébrique à étudier, rappelons encore que nous avons été conduits à poser

$$f(x) \equiv \varphi(x^2) + x\psi(x^2).$$

Dans le cas particulier d'une équation du quatrième degré, le polynome $\varphi(x)$ est du second degré et $\psi(x)$ est du premier. M. Jouguet a remarqué que les conditions pour que les quatre racines de $f(x)$ soient pseudo-négatives entraînaient cette conséquence que les deux racines de $\varphi(x)$ étaient réelles et négatives et comprenaient entre elles l'unique racine de $\psi(x)$.

M. Chipart a étendu le résultat à une équation de degré quelconque [1].

Nous nous proposons de montrer que, d'une façon générale, les nombres N et N′ de racines pseudo-négatives et pseudo-positives d'une équation algébrique à coefficients réels $f = 0$ peuvent se déduire de la seule connaissance de la position relative de celles des racines de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ qui sont réelles et négatives. Plus exactement, cette position ne détermine que la valeur absolue de la différence $N - N'$, car le changement de ψ en $-\psi$, qui ne change rien à la position des racines de φ et de ψ permute les valeurs de N et N′.

2. Lorsqu'on fait varier les coefficients a d'un polynome $f(x)$, les racines du polynome varient d'une façon continue, à la seule condition que le coefficient a_0 ne s'annule pas.

Appelons *point figuratif* d'une équation $f(x) = 0$, le point de coordonnées $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans un espace à $n+1$ dimensions et considérons les domaines $D_0, D_1, \ldots, D_n$ où doivent se trouver les points figuratifs pour que l'équation admette $0, 1, 2, \ldots, n$ racines pseudo-positives et, inversement $n, (n-1), \ldots, 1, 0$ racines pseudo-négatives.

Sur les frontières séparant les divers domaines, le polynome $f(x)$ admet au moins une racine nulle ou un groupe de deux racines purement imaginaires conjuguées. Au contraire, il ne peut y avoir de racine nulle ou purement imaginaire lorsque le point figuratif est à l'intérieur d'un domaine D, toutes les racines à l'intérieur d'un tel domaine étant, par définition, soit pseudo-positives, soit pseudo-négatives.

Soit donc l'équation

$$f(x) \equiv \varphi(x^2) + x\psi(x^2) = 0$$

[1] La même propriété se manifeste lorsque toutes les racines sont pseudo-positives, car on passe d'un cas à l'autre en changeant ψ en $-\psi$ et la position relative des racines de φ et de $-\psi$ est la même que pour φ et ψ.

dont le point figuratif est supposé à l'*intérieur* d'un domaine D et qui ne possède par suite ni racine nulle ni racine purement imaginaire.

Je désigne par $x_1, x_2, \ldots$ les racines réelles de $\varphi(x) = 0$ et par $\xi_1, \xi_2, \ldots$ les racines réelles de $\psi(x)$. Cherchons ce qui reste invariable dans la position relative des points d'abscisses $x_1, x_2, \ldots, \xi_1, \xi_2, \ldots$ lorsque le point figuratif de l'équation se déplace d'une manière quelconque à l'intérieur de l'un des domaines D sans atteindre jamais la frontière de ce domaine. Pour satisfaire à la condition imposée il faut et il suffit que $f(x)$ n'admette à aucun moment ni racine nulle ni racine purement imaginaire $\pm si$ $(s \neq 0)$. L'absence de racine nulle exige que a_n ne s'annule pas. Donc a_n gardera un signe constant et $\varphi(x)$ n'aura jamais de racine nulle.

Quant à l'existence de racines purement imaginaires $\pm si$ elle entraînerait la relation

$$\varphi(-s^2) \pm si\,\psi(-s^2) = 0,$$

d'où (tous les coefficients a étant réels)

$$\varphi(-s^2) = 0, \qquad \psi(-s^2) = 0.$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ auraient donc une racine négative commune. Réciproquement l'existence d'une racine négative commune à $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ entraînerait pour $f(x)$ l'existence d'une racine purement imaginaire, de sorte que le point figuratif se trouverait sur une frontière de deux domaines D.

En conséquence, si le point figuratif reste à l'intérieur d'un domaine D, le point représentant une racine *négative* x_i ne pourra venir en coïncidence avec un point d'abscisse négative ξ_p. Mais rien n'empêcherait les points représentant des racines *positives* x_i *et* ξ_p de venir en coïncidence.

Lorsque l'on modifie les coefficients a, il peut arriver que des racines imaginaires conjuguées $\alpha + \beta i$ de $\varphi(x)$ deviennent réelles en passant d'abord par une racine double α_1. Ceci peut parfaitement se produire sans que l'on sorte d'un domaine D, à la seule condition que la racine double ne soit pas nulle et ne coïncide pas avec une racine négative ξ_p. Inversement on peut remplacer deux racines réelles x_i et x_k de $\varphi(x)$ par deux racines imaginaires conjuguées en commençant par les réunir en une racine double α_1. Cette opération se fera sans sortir du domaine D où l'on se trouvait pour le polynome f à la double condition : 1° que les racines x_i et x_k soient de même signe et qu'aucune ne passe par zéro pour parvenir à la racine double α_1 qui devra elle-même être différente de zéro; 2° qu'elles ne comprennent pas entre elles de racine ξ négative, car sans cela on ne pourrait arriver à les rendre égales sans passer par une racine négative commune à φ et à ψ.

On peut de même remplacer deux racines imaginaires conjuguées de $\psi(x)$ par deux racines réelles et inversement, sans sortir du domaine primitif. Il n'est toutefois pas nécessaire ici que les racines ξ_p et ξ_q à rendre égales soient de même signe ni que la racine double soit différente de zéro. Car le fait que a_{n-1} s'annule [une racine nulle pour $\psi(x)$] n'entraîne aucune particularité pour l'équation $f(x) = 0$.

3. Appliquons les considérations précédentes à l'équation

$$(1) \qquad f_1(x) \equiv \varphi(x^2) + \varepsilon x \psi(x^2) = 0$$

qui se réduit à l'équation proposée $f(x) = 0$ pour $\varepsilon = 1$. Pour toute autre valeur positive $\partial'\varepsilon$, ni nulle ni infinie, le point figuratif de l'équation $f_1(x)$ appartient au même domaine que l'équation $f(x)$ car : 1° le coefficient a_n est le même pour f_1 que pour f; 2° l'absence de toute racine négative commune à $\varphi(x)$ et à $\psi(x)$ entraîne la même absence pour φ et $\varepsilon\psi$, ε étant supposé essentiellement différent de zéro [1].

Au lieu de $f_1 = 0$, on pourrait encore considérer l'équation

$$(2) \qquad f_2(x) \equiv \eta \varphi(x^2) + x \psi(x^2) = 0.$$

[1] Que pourrait-on dire sur le domaine auquel appartiendrait l'équation $f_1 = 0$ pour ε négatif? La forme de (1) montre qu'il revient au même de donner à ε des valeurs négatives ou de le laisser positif en changeant x en $-x$. Or changer x en $-x$ dans une équation change le signe de toutes ses racines : celles qui étaient pseudo-négatives deviennent pseudo-positives et inversement. Autrement dit, il y a simple permutation des nombres N et N′ de ces racines, la différence N − N′ conservant sa valeur absolue. Si donc f appartient à un domaine D_k, l'équation $f_1 = 0$, pour ε négatif, appartiendra au domaine D_{n-k}.

Le résultat serait toujours le même, car on passe de f_1 à f_2 en divisant f_1 par ε et posant $\frac{1}{\varepsilon} = \eta$.

Pour toute valeur positive de η, les nombres N et N′ sont donc les mêmes pour f_2 que pour f_1 et pour f.

Nous allons appliquer le théorème établi au calcul de N et N′ en déterminant ces quantités pour les équations (1) ou (2) où nous considérerons soit ε, soit η, comme des quantités positives mais très petites.

Ayant entre N et N′ la relation évidente

$$N + N' = n,$$

il suffira pour avoir séparément N et N′ de trouver une autre relation entre ces quantités. La suite nous montrera qu'il est commode de rechercher la valeur de la différence N — N′.

4. Pour continuer les calculs je commencerai par examiner le cas de n pair, en supposant en outre que l'on utilise le polynome f_1.

Je récris l'équation (1)

$$f_1(x) \equiv \varphi(x^2) + \varepsilon x \psi(x^2) \tag{1}$$

et je pose $n = 2m$.

n étant pair, la fonction φ contient les deux coefficients a_0 et a_n qui sont l'un et l'autre différents de zéro, le premier parce que l'équation est supposée être réellement le degré n et le second parce que l'équation n'a pas de racine nulle.

Pour ε très petit, les racines de $f_1(x)$ sont voisines de celles de $\varphi(x^2) = 0$, c'est-à-dire voisines des racines carrées des racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$

Il y a deux cas à distinguer. Soit d'abord une racine $\alpha + \beta i$ qui ne soit pas réelle et négative. $\sqrt{\alpha + \beta i}$ a deux valeurs $\pm(\gamma + \delta i)$ avec γ non nul, car γ et δ sont déterminés par les relatious

$$\gamma^2 - \delta^2 = \alpha, \qquad 2\gamma\delta = \beta.$$

Si γ était nul, la seconde relation donnerait $\beta = 0$ et la première montre que α, égal à $-\delta^2$, serait négatif. La quantité $\alpha+\beta i$ serait donc réelle et négative, contrairement à l'hypothèse. Donc γ ne peut être nul. Ainsi les deux racines de $\varphi(x^2)$, égales à $+(\gamma+\delta i)$ et à $-(\gamma+\delta i)$, sont l'une pseudo-négative et l'autre pseudo-positive. Il en est de même, par continuité, des racines de $f_1(x)$ voisines de $\pm(\gamma+\delta i)$ à condition de prendre ε suffisamment petit. Les racines en question comptant l'une dans le nombre N et l'autre dans le nombre N′ n'interviendront pas dans la valeur de la différence N — N′.

Soit maintenant une racine négative de $\varphi(x)$ de valeur $-s^2$. $\varphi(x^2)$ admettra les racines $\pm si$ et $f_1(x)$ admettra des racines

$$si+\varepsilon(\gamma+\delta i), \qquad -si+\varepsilon(\gamma'+\delta' i)$$

dont les valeurs sont voisines des premières. Substituons ces valeurs dans $f_1(x)=0$ et développons en ne conservant que les termes du premier ordre en ε. Nous supposerons en outre que $-s^2$ est racine simple de $\varphi(x)$, restriction dont nous nous débarrasserons au paragraphe **6**. Le résultat de la substitution pour la première racine est

$$\begin{aligned} 0=f_1[si+\varepsilon(\gamma+\delta i)] &= \varphi[-s^2+2\varepsilon si(\gamma+\delta i)] \\ &+\varepsilon[si+\varepsilon(\gamma+\delta i)]\,\psi[-s^2+2\varepsilon si(\gamma+\delta i)] \\ &=\varphi(-s^2)+2\varepsilon si(\gamma+\delta i)\,\varphi'(-s^2)+\varepsilon si\,\psi(-s^2). \end{aligned}$$

$\varphi(-s^2)$ est nul mais $\varphi'(-s^2)$ est essentiellement différent de zéro en vertu de l'hypothèse faite sur la racine $-s^2$. Le facteur εsi, commun aux deux termes non nuls est différent de zéro et peut être supprimé. Remarquant en outre que $\varphi'(-s^2)$ et $\psi(-s^2)$ sont essentiellement réels, il vient finalement

$$\gamma=-\frac{1}{2}\,\frac{\psi(-s^2)}{\varphi'(-s^2)}, \qquad \delta=0.$$

Le calcul donne pour γ' exactement la même valeur. Donc, contrairement à ce qui avait lieu pour les autres racines de $\varphi(x)$, à une racine négative de $\varphi(x)$ correspondent pour $f_1(x)$ deux racines qui sont l'une et l'autre pseudo-négatives si

$$\frac{\psi(-s^2)}{\varphi'(-s^2)}>0 \qquad \text{ou} \qquad \psi\varphi'>0$$

(d'où pour N — N′ un terme de valeur $+2$) et qui sont au contraire pseudo-positives si

$$\psi(-s^2)\,\varphi'(-s^2) < 0$$

(d'où pour N — N' un terme de valeur — 2).

Il suffit donc pour connaître N — N' de déterminer le signe de $\psi(x)\varphi'(x)$ pour toutes les racines réelles négatives de $\varphi(x)$.

Si l'on désigne par $u(z)$ une quantité égale à $\frac{z}{|z|}$ (z réel), c'est-à-dire une quantité égale soit à $+1$ pour z positif, soit à -1 pour z négatif, on pourra écrire d'une manière générale dans le cas qui nous occupe (n pair)

$$(3) \qquad \mathrm{N} - \mathrm{N}' = 2\sum_i u[\psi(x_i)\,\varphi'(x_i)],$$

la somme étant étendue à toutes les racines x_i de $\varphi(x)$ qui sont réelles et négatives, et à celles-là seulement.

5. Recommençons l'étude des racines de $f(x)$ pour n pair en nous servant de l'équation

$$(2) \qquad f_2(x) \equiv \eta\varphi(x^2) + x\psi(x^2) = 0.$$

Après ce que nous avons dit pour f_1, nous pourrons abréger beaucoup les explications et les calculs pour f_2 en n'insistant que sur les différences se présentant dans les raisonnements ou dans la forme des résultats.

Avec un coefficient η positif mais très petit, l'équation $f_2 = 0$ présentera les racines suivantes, en supposant jusqu'à nouvel ordre a_1 différent de zéro ainsi que a_{n-1} :

1° Une racine de très grande valeur absolue voisine de $-\frac{a_1}{\eta a_0}\cdot$ A cette racine correspond pour N — N' un terme $u(a_0 a_1)$.

2° Une racine très petite en valeur absolue et voisine de $-\eta\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot$ A cette racine correspond pour N — N' un terme $u(a_{n-1}a_n)$.

3° Un groupe de racines voisines des racines de $\psi(x^2) = 0$, c'est-à-dire voisines des racines carrées des racines de $\psi(x)$. Des raisonnements calqués sur ceux du paragraphe **4** montrent qu'aux racines imaginaires ou positives de $\psi(x)$ ne correspondent que des termes nuls pour $N - N'$ tandis qu'à chaque racine négative ξ_p de $\psi(x)$ correspond pour $N - N'$ un terme $-2u[\varphi(\xi_p)\,\psi'(\xi_p)]$. Ce terme est de forme analogue au terme $+2u[\psi(x_i)\,\varphi'(x_i)]$, sauf permutation du rôle de φ et de ψ et changement de signe.

Réunissant les termes obtenus aux 1°, 2° et 3°, nous obtenons, à la place de (3), la nouvelle expression

$$(3') \qquad N - N' = u(a_0 a_1) + u(a_{n-1} a_n) - 2\sum_p u[\varphi(\xi_p)\psi'(\xi_p)],$$

la somme étant étendue à toutes les racines ξ_p de $\psi(x)$ qui sont réelles et négatives et à celles-là seulement.

Le cas de n impair se traite absolument de la même façon. Suivant que l'on comparera f au polynome f_1 avec ε positif très petit ou au polynome f_2 avec η positif et très petit, on arrivera à l'une ou l'autre des deux formules

$$(4) \qquad N - N' = u(a_0 a_1) + 2\sum_i u[\psi(x_i)\varphi'(x_i)]$$

$$(4') \qquad N - N' = u(a_{n-1} a_n) - 2\sum_p u[\varphi(\xi_p)\psi'(\xi_p)].$$

6. Au lieu de déterminer séparément la valeur $+1$ ou -1 de chacun des termes qui figurent sous les signes de sommation des formules (3) à (4'), il est plus commode de recourir à un procédé donnant d'un seul coup les valeurs des sommes $\Sigma u(\psi\varphi')$ et $-\Sigma u(\varphi\psi')$. L'existence d'un tel procédé résulte des considérations suivantes :

Occupons-nous d'abord de $\Sigma u(\psi\varphi')$.

Soient $x_1, x_2, \ldots$, par ordre de grandeur croissante de $-\infty$ à zéro,

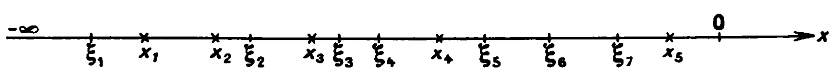

Fig. 1.

les racines négatives de $\varphi(x)$. Soient de même $\xi_1, \xi_2, \ldots$ les quantités correspondantes pour $\psi(x)$. Traçons le schéma des points d'abscisses x_i et ξ_p, points que nous distinguerons par des signes différents. Nous obtiendrons, par exemple, le schéma représenté figure 1.

Le nombre des points d'abscisses x_i est au plus égal à $\frac{n}{2}$ ou à $\frac{n-1}{2}$, suivant la parité de n, et celui des points ξ_p est au plus égal à $\frac{n}{2}-1$ ou à $\frac{n-1}{2}$, sans que l'on puisse préciser davantage la grandeur ou la parité de ces nombres en raison des racines positives ou imaginaires que peuvent présenter φ et ψ.

Le schéma ci-dessus peut être simplifié, sans modification du domaine D de l'équation $f=0$, c'est-à-dire sans modification de $N-N'$.

1° Les deux racines voisines x_1 et x_2, qui ne comprennent entre elles aucune racine ξ, donnent pour les produits $\psi(x_1)\varphi'(x_1)$, et $\psi(x_2)\varphi'(x_2)$ des valeurs de signe contraire. En effet, $\psi(x_1)$ et $\psi(x_2)$ sont de même signe, puisqu'il n'y a entre x_1 et x_2 aucune racine ξ, tandis que $\varphi'(x_1)$ et $\varphi'(x_2)$ sont de signe contraire, car si, par exemple, en x_1, $\varphi(x)$ passe du négatif au positif $[\varphi'(x_1)>0]$, en x_2, φ repassera du positif au négatif et $\varphi'(x_2)$ sera négatif, ou vice versa.

Raisonnons autrement, en utilisant les considérations du paragraphe **2** : modifions les cœfficients a de manière à ne changer, parmi les racines de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$, que les deux seules racines x_1 et x_2. Ces racines n'étant pas séparées par une racine ξ nous pouvons, sans sortir du domaine D primitif, rendre les racines x_1 et x_2 égales, puis imaginaires conjuguées. A partir du moment où les racines sont imaginaires conjuguées, nous savons qu'il leur correspond pour $f(x)$ un nombre égal de racines pseudo-positives et de racines pseudo-négatives. Comme ce résultat a été obtenu sans sortir du domaine D, cela montre qu'aux racines réelles x_1 et x_2 de $\varphi(x)$ correspondaient déjà pour $f(x)$ quatre racines dont deux pseudo-positives et deux pseudo-négatives.

L'avantage du second mode de démonstration est qu'il donne la solution du cas laissé de côté au paragraphe **4** d'une racine négative de $\varphi(x)$ qui soit racine double. A une telle racine double correspondent pour $f(x)$ un nombre égal de racines pseudo-positives et pseudo-négatives. Autrement dit ces racines n'interviennent pas dans la valeur de la différence $N-N'$.

Nous voyons déjà que nous pouvons simplifier le schéma en supprimant les deux racines voisines x_1 et x_2 non séparées par une racine ξ.

2° Nous pouvons de même supprimer les deux racines voisines ξ_3 et ξ_4 ne comprenant entre elles aucune racine x. En effet, qu'il y ait zéro ou deux racines ξ entre x_3 et x_4, les deux quantités $\psi(x_3)$ et $\psi(x_4)$ seront toujours de même signe. Et si l'on modifie les coefficients a de manière à laisser invariables toutes les racines x_i et ξ_p autres que ξ_3 et ξ_4 qu'on fera tendre l'une vers l'autre pour les rendre d'abord égales, puis imaginaires conjuguées, le point figuratif restera toujours dans le même domaine. Le raisonnement est calqué sur celui fait pour x_1 et x_2.

3° Les mêmes opérations peuvent être répétées s'il y a lieu. Cela permettra de faire disparaître dans le cas supposé par la figure 1 :

a. Deux des trois racines contiguës ξ_5, ξ_6 et ξ_7 qui ne sont séparées par aucune racine x.

b. Les racines ξ_1 et ξ_2 qui étaient séparées par les racines x_1 et x_2 mais qui n'ont plus entre elles aucune racine x à la suite de la première réduction effectuée sur le schéma.

c. Les racines x_3 et x_4 qui étaient séparées par les racines ξ_3 et ξ_4 mais qui ne comprennent plus entre elles aucune racine ξ après la réduction 2°.

Finalement le schéma réduit ne comprend plus que les points ξ_7 et x_5.

Il ne subsiste plus qu'une racine négative provenant de $\varphi(x)$.

On aura donc

$$\Sigma u(\psi\varphi') = \pm 1.$$

D'une façon générale, après réduction poussée aussi loin que possible, toutes les racines négatives x_i restantes seront séparées par une racine ξ_p et une seule et inversement. Le schéma réduit le plus général est tel que les points d'abscisses x_i alternent avec des points abscisses ξ_p, les points extrêmes (dans l'intervalle de $-\infty$ à o) pouvant suivant les cas correspondre à une racine x_i ou une racine ξ_p.

Toutes les racines x subsistant dans le schéma réduit donnent des produits $\psi(x)\varphi'(x)$ de même signe, l'alternance des racines x_i et ξ_p dans le schéma réduit faisant que, lorsque l'on passe d'une racine x_i à la racine x voisine, $\psi(x)$ et $\varphi'(x)$ changent de signe l'un et l'autre et leur produit ne change pas. Grâce à cette propriété, on voit que l'on peut écrire

$$\sum_i u\,[\psi(x_i)\,\varphi'(x_i)] = \pm k,$$

k étant le nombre de racines de $\varphi(x)$ subsistant dans le schéma réduit.

Il ne reste plus qu'à déterminer le signe. Je dis qu'on a les formules ci-dessous :

$$\Sigma u(\psi\varphi') = \pm k u(a_0 a_1) \tag{5}$$

avec le signe $+$ si la plus petite racine du schéma réduit appartient à celui des deux polynomes φ et ψ qui contient le coefficient a_0 (c'est-à-dire appartient à φ pour n pair et à ψ pour n impair). Signe $-$ dans le cas contraire.

De même

$$\Sigma u(\psi\varphi') = \pm k u(a_{n-1} a_n). \tag{5'}$$

avec le signe $+$ si la plus grande racine du schéma réduit (c'est-à-dire la plus voisine de zéro) appartient à celui des polynomes φ et ψ qui contient le coefficient a_n (c'est-à-dire appartient au polynome φ). Signe $-$ dans le cas contraire.

Justifions par exemple la première formule qui suppose le coefficient a_1 différent de zéro. Nous devrons considérer successivement le cas de n pair et celui de n impair. Commençons par n pair. Soient comme précédemment $x_1, x_2, \ldots$ les racines négatives de $\varphi(x)$ numérotées par ordre de grandeur à partir de la plus petite x_1. La plus petite racine x_i conservée dans le schéma réduit sera de rang impair, puisque la réduction s'effectue en supprimant en même temps deux racines voisines. Donc $\varphi'(x_i)$ sera du signe de $\varphi'(x_1)$, c'est-à-dire du signe de $-\varphi(-\infty)$.

Quant à $\psi(x_i)$, il est du signe de $\psi(-\infty)$ ou de signe contraire suivant que le schéma réduit ne contient plus aucune racine ξ_p à gauche de x_i, ou en contient une. Dans la première hypothèse, le signe de $\varphi'(x_i)\psi(x_i)$ est celui de $-\varphi(x)\psi(x)$ pour x très grand négatif. Or

$$\varphi(x) = a_0 x^m + a_2 x^{m-1} + \ldots,$$
$$\psi(x) = a_1 x^{m-1} + \ldots$$

et

$$-\varphi(x)\psi(x) = -a_0 a_1 x^{2m-1} + \ldots,$$

quantité qui est, pour x très grand négatif, du signe de $a_0 a_1$. S'il y avait au contraire une racine ξ à gauche de la plus petite racine x_i du schéma réduit, le signe serait contraire à celui de $a_0 a_1$. La règle de signe de la formule (5) est ainsi justifiée pour n pair. Le cas de n impair se traite de même. Quant à la formule (5′) elle se justifie d'une manière analogue, mais plus simple, en considérant le signe de $\psi\varphi'$ pour la plus grande racine négative de $\varphi(x)$ (racine la plus voisine de zéro).

Enfin on justifierait d'une façon analogue les deux formules suivantes :

$$(6) \qquad -\sum_p u[\varphi(\xi_p)\,\psi'(\xi_p)] = \pm k' u(a_0 a_1),$$

même règle de signe que pour (5);

$$(6') \qquad -\sum_p u[\varphi(\xi_p)\,\psi'(\xi_p)[= \pm k' u(a_{n-1} a_n),$$

même règle de signe que pour (5′) ;

k' représente le nombre de racines négatives de ψ subsistant dans le schéma réduit, lequel schéma est exactement le même qu'il s'agisse de l'évaluation de $\Sigma u(\psi\varphi')$ ou de celle de $-\Sigma u(\varphi\psi')$.

7. En combinant les formules (5) à (6′) avec les relations (3) à (4′) on obtient le tableau suivant de diverses expressions de $N - N'$, excès du nombre de racines pseudo-négatives sur celui des racines pseudo-positives :

	n pair.	n impair.
(I)	$\pm 2ku(a_0 a_1)$,	$(1 \pm 2k)u(a_0 a_1)$,
	$u(a_{n-1}a_n) + (1 \pm 2k')u(a_0 a_1)$,	$u(a_{n-1}a_n) \pm 2k' u(a_0 a_1)$;
(II)	$\pm 2k\,u(a_{n-1}a_n)$,	$(1 \pm 2k')u(a_{n-1}a_n)$,
	$u(a_0 a_1) + (1 \pm 2k')u(a_{n-1}a_n)$,	$u(a_0 a_1) \pm 2ku(a_{n-1}a_n)$.

(I) Signe + si la plus petite racine du schéma réduit appartient à celui des polynomes φ ou ψ qui contient a_0 (polynome φ pour n pair; polynome ψ pour n impair). Signe − dans le cas contraire.

(II) Signe + si la plus grande racine (la plus voisine de zéro) du schéma réduit appartient au polynome φ qui contient le coefficient a_n. Signe $-$ dans le cas contraire.

Les expressions les plus intéressantes sont celles des lignes 1 et 3 parce qu'il n'y figure que l'une des quantités $u(a_0 a_1)$ ou $(a_{n-1} a_n)$. Il résulte de là que la valeur absolue de $N - N'$ peut se déduire du seul examen du schéma réduit, comme il avait été annoncé au paragraphe **1**.

Les quatre expressions ci-dessus valables pour n pair ont été établies indépendamment les unes des autres. De même pour n impair. Il est possible de vérifier les équivalences par des calculs directs. Nous laisserons au lecteur le soin de le faire en nous bornant aux quelques indications suivantes.

Les nombres k et k' diffèrent au plus d'une unité. Lorsque $k = k'$, les produits $a_0 a_1$ et $a_{n-1} a_n$ sont de même signe pour n impair et de signe contraire pour n pair. L'inverse à lieu si $k - k' = \pm 1$.

L'équation aux inverses de $f(x)$ appartient au même domaine que f $\left(\text{car l'inverse } \frac{1}{\alpha + \beta i} \text{ d'une racine a pour expression } \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2}\right)$.

Or le passage d'une équation $f = 0$ à l'équation aux inverses ne fait que renverser l'ordre des coefficients a_0, a_1, ..., ainsi que l'ordre des points du schéma réduit. Il en résulte une correspondance entre les expressions des deux premières lignes du tableau et celles des deux dernières lignes [1].

8. Les expressions obtenues pour $N - N'$ supposent que les coeffi-

---

[1] Ajoutons quelques mots sur le cas où le point figuratif d'une équation $f = 0$ serait sur la frontière de deux domaines D au lieu d'être à l'intérieur de l'un d'eux. Si l'équation admet un groupe de deux racines purement imaginaires (le cas de racines nulles est sans intérêt), le polynome φ admettra une racine négative x_i égale à une racine ξ_p de ψ. A cette racine commune ne correspond aucun terme pour $N - N'$. Il suffit donc d'exclure x_i et ξ_p des sommes $\Sigma\, u(\psi\varphi')$ et $-\Sigma\, u(\varphi\psi')$ et faire la réduction du schéma comme si ces racines n'existaient pas. Les formules du paragraphe **7** sont applicables au schéma réduit ainsi obtenu. Mais pour obtenir séparément N et N' il ne faut pas oublier que $N + N'$ n'est plus égal à n mais à $n - 2$ (ou plus généralement à $n - 2t$ pour t racines négatives communes à φ et à ψ).

cients a_1 et a_{n-1} sont différents de zéro. S'il n'en est pas ainsi, les résultats subsistent à la condition de remplacer a_1 par $(-1)^r a_{2r+1}$, si a_{2r+1} est le premier coefficient d'indice impair qui ne soit pas nul, et de même a_{n-1} par $(-1)^s a_{n-1-2s}$ si a_{n-1-2s} est le dernier coefficient non nul, parmi ceux dont l'indice est de même parité que $n-1$.

Il suffit de démontrer la règle pour a_1; celle pour a_{n-1} s'établirait d'une façon analogue.

Si le coefficient a_1 de $f(x)$ est nul, nous ramènerons au cas $a_1 \neq 0$, en considérant l'équation

$$f'(x) \equiv f(x) + (-1)^r \varepsilon' a_{2r+1} x^{n-1} = 0.$$

Je dis que, pour ε' positif et suffisamment petit, le point figuratif du polynome f' appartient au même domaine que pour f et en outre que le schéma réduit a même disposition pour f' que pour f.

Le premier point est évident. Pour établir le second point supposons, pour fixer les idées, que n soit pair. Le passage de f à f' ne modifie pas $\varphi(x)$ mais ajoute à $\psi(x)$ un terme

$$\text{(A)} \qquad (-1)^r \varepsilon' a_{2r+1} x^{m-1}.$$

Le premier terme de $\psi(x)$ étant primitivement $a_{2r+1} x^{m-1-r}$, l'adjonction du terme (A) introduit r racines très grandes (valeur absolue ou module), racines de

$$\varepsilon'(-x)^r + 1 = 0.$$

Grâce à la forme donnée au terme (A), l'équation ci-dessus n'admet, quel que soit r, aucune racine réelle négative mais seulement des racines imaginaires et (pour n impair) une racine positive. Les autres racines de $\psi(x)$ ne sont que très peu modifiées et celles de $\varphi(x)$ ne le sont pas du tout. Il résulte de là que le schéma complet et le schéma réduit sont exactement les mêmes pour l'équation primitive et pour l'équation modifiée $f' = 0$. Il suffit alors d'appliquer à f' les résultats obtenus dans le cas de $a_1 \neq 0$ pour justifier la règle énoncée.

Même résultat pour n impair, sauf que le terme supplémentaire s'ajoute à φ au lieu de ψ.

9. Les résultats obtenus paraissent d'une utilisation difficile pour les équations littérales. Pour celles-ci les méthodes exposées par

M. Chipart et par moi dans notre Mémoire de 1914 conservent tous leurs avantages. Mais pour des équations numériques il peut être plus simple de déterminer la position relative des racines négatives des polynomes φ et ψ. Il peut y avoir avantage même par rapport à la méthode de Routh.

Si, par exemple, on réussit à déterminer le nombre des racines négatives d'un des polynomes, φ par exemple, et leurs valeurs approximatives, il n'y aura qu'à déterminer les signes des produits φ', ψ pour ces diverses racines pour en conclure immédiatement la valeur $N - N'$.

10. Terminons en revenant sur les conditions pour que les racines soient toutes pseudo-négatives ou toutes pseudo-positives.

Il faut et il suffit pour cela que la valeur absolue de $N - N'$ soit égale à n. Nous distinguerons deux cas.

1° n pair. D'après le tableau du paragraphe **7**, on devra avoir $2k = n = 2m$, c'est-à-dire $k = m$. $\varphi(x)$ ayant un nombre de racines égal à m, k ne sera lui-même égal à m que si toutes les racines de φ sont négatives. En outre, pour qu'il n'y ait pas de réduction, il faut que toutes les racines de φ soient séparées par des racines de ψ. Le polynome ψ admettra donc $m - 1$ racines négatives, c'est-à-dire que toutes ses racines seront négatives, et alterneront avec celles de φ. C'est bien le résultat constaté par M. Jouguet pour le quatrième degré. La réciproque est immédiate.

Puisque toutes les racines, soit de φ, soit de ψ, sont négatives, les polynomes φ et ψ ont chacun tous leurs coefficients de même signe. Si en outre les coefficients de φ et de ψ sont de même signe, toutes les racines de f seront pseudo-négatives. Si au contraire les coefficients a ont des signes contraires pour φ et ψ, toutes les racines de f sont pseudo-positives.

2° n impair, égal à $2m + 1$. Le tableau (§ **7**), montre que $|N - N'|$ sera égal à n si

$$|1 \pm 2k| = |1 \pm 2k'| = 2m + 1.$$

Comme k et k' sont au plus égaux à m, la double égalité ne peut être satisfaite que si

$$k = k' = m,$$

et à condition qu'il faille prendre le signe $+$ aussi bien devant k que devant k'. Cela implique que φ et ψ aient toutes leurs racines réelles et négatives, alternées entre elles, la plus grande appartenant à φ et la plus petite appartenant à ψ.

Inversement, si ces conditions sont satisfaites $|N - N'|$ sera égal à n. La distinction des cas où toutes les racines seraient pseudo-négatives ou pseudo-positives se fait commes pour n pair.