# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE


GASTON JULIA

**Sur un problème de géométrie des nombres posé par la construction de certaines surfaces de Riemann**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 15 (1936), p. 229-233.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__229_0>

# *Sur un problème de géométrie des nombres posé par la construction de certaines surfaces de Riemann;*

PAR GASTON JULIA.

---

**1.** Au cours de recherches sur la représentation conforme des aires multiplement connexes, (voir *C. R. Acad. des Sc.*, 15 juin 1931; janvier, février, mars 1932; *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa* 1932; *Commentarii Matematici Helvetici*, 1932), j'ai été conduit à des dissections et des reconstructions de surfaces de Riemann posant un problème, dont je donne un énoncé schématique et une solution dans ce qui suit. Cette solution est basée sur un *principe de réduction* dont on trouverait facilement bien d'autres applications en Arithmétique.

**2.** Sur une courbe C (on peut supposer que c'est un cercle) dont la longueur est un entier $\mu$, on donne $p$ arcs distincts, désignés par $\widehat{a_1 b_1}$, $\widehat{a_2 b_2}$, ..., $\widehat{a_p b_p}$, lorsqu'on parcourt C dans le sens positif. Les extrémités $a_i$, $b_k$, forment $2p$ distincts. Sont donnés, en outre, $p$ nombres entiers positifs $\mu_1$, $\mu_2$, ..., $\mu_p$, respectivement attachés aux arcs précédents, de manière que :

1° La longueur de $\widehat{a_m b_m}$ soit $< \mu_m$, $(m = 1, 2, \ldots, p)$;
2° $\mu = 1 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p$.

Nous appelons *arcs de passage ou de transition* les $p$ arcs $\widehat{a_m b_m}$; les $p$ arcs $\widehat{b_1 a_2}$, $\widehat{b_2 a_3}$, ..., $\widehat{b_p a_1}$, sont appelés *arcs directs de* C.

Le problème est d'*isoler les uns des autres les arcs de passage*, par des arcs, appelés *intervalles d'isolement*, ayant les propriétés suivantes :

L'intervalle d'isolement attaché à $\widehat{a_m b_m}$ peut être fractionné ou non.

S'il n'est pas fractionné, c'est un arc de C, de longueur $\mu_m$, contenant $\widehat{a_m b_m}$ au sens strict, et dont les extrémités se trouvent respectivement sur les arcs directs $\widehat{b_{m-1} a_m}$, $\widehat{b_m a_{m+1}}$ qui encadrent $\widehat{a_m b_m}$.

S'il est fractionné, il se compose d'arcs de C, en nombre fini, dont la longueur totale est $\mu_m$. L'un de ces arcs (*arc principal*) contient $\widehat{a_m b_m}$ au sens strict, ses extrémités appartenant respectivement au sens strict à $\widehat{b_{m-1} a_m}$ et à $\widehat{b_m a_{m+1}}$; les autres arcs (*arcs complémentaires*) sont intérieurs au sens strict à des arcs directs de C. Lorsqu'on parcourt C dans le sens positif, la distance curviligne entre l'extrémité d'un de ces arcs (principal ou complémentaire) et l'origine du suivant *est toujours un nombre entier*. Cela signifie que mis bout à bout (suivant le module 1, c'est-à-dire en identifiant l'extrémité d'un de ces arcs et l'origine du suivant) les arcs composant un intervalle d'isolement formeraient un arc de longueur $\mu_m$.

On désignera par origine et extrémité d'un intervalle d'isolement fractionné, l'origine de l'arc principal et l'extrémité du dernier arc complémentaire.

Les intervalles d'isolement de deux arcs de passage distincts $\widehat{a_m b_m}$, $\widehat{a_n b_n}$ n'ont aucun point intérieur commun. On peut exiger en outre qu'ils n'aient aucun point frontière commun, et que les origines et extrémités de tous les intervalles d'isolement soient distinctes des $a_m$, des $b_n$ et soient étrangers à un certain ensemble E de points exceptionnels en nombre fini (quelconque d'ailleurs) appartenant aux arcs directs de C.

On va montrer que l'on peut construire, et avec un large arbitraire, un système de $p$ intervalles d'isolement satisfaisant à toutes les conditions précédentes. Abstraction faite de ces intervalles d'isolement, il restera sur C un intervalle fractionné dont la longueur totale est l'unité.

**3.** On procède de proche en proche par une méthode uniforme de réduction. Appelons *arc complet de* C l'ensemble d'un arc de passage $\widehat{a_m b_m}$ et de l'arc direct $\widehat{b_m a_{m+1}}$ qui le suit sur C.

Il y a $p$ arcs complets $\widehat{a_1 a_2}$, $\widehat{a_2 a_3}$, ..., $\widehat{a_p a_1}$.

L'arc complet $a_m a_{m+1}$, correspondant à l'arc de passage $a_m b_m$, est dit *normal* si sa longueur est précisément $\mu_m$, *hypernormal* si sa longueur est $> \mu_m$, *hyponormal* si elle est $< \mu_m$.

*Il y a au moins un arc complet hypernormal.*

Car, dans le cas contraire, la somme des longueurs des arcs complets serait $\leqq \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p = \mu - 1$. Or elle est égale à $\mu$, puisque c'est la longueur de C.

Considérons les arcs hypernormaux. Pour l'arc de passage $\widehat{a_m b_m}$ d'un tel arc, l'intervalle allant de $a_m$ à $b'_m$, et de longueur $\mu_m$, possède les propriétés requises pour les intervalles d'isolement, à cela près que son origine est un $a_m$; on peut ensuite déplacer légèrement les origines de ces intervalles depuis les $a_m$ vers les $b_{m-1}$ sans que l'ensemble de ces intervalles cesse de posséder les propriétés requises. On a ainsi des intervalles d'isolement non fractionnés. Le même procédé peut être employé pour un arc normal; et si plusieurs arcs normaux se suivent, le déplacement final des origines se fera d'ensemble.

**4.** Supprimons sur C les intervalles d'isolement non fractionnés ainsi constitués, puis rajustons ensemble les extrémités de chaque intervalle supprimé. Nous aurons une nouvelle courbe C′, *la première réduite de* C, sur laquelle nous aurons $p'(<p)$ arcs de passage (à savoir ceux que la première opération n'a pas enlevés) avec les mêmes entiers respectivement attachés que sur C, et de manière que *la longueur de* C′ *surpasse d'une unité la somme de ces entiers*. Sur les $p'$ arcs directs de C′, qui proviennent des *arcs directs résiduels de* C, sont marqués $p - p'$ points intérieurs distingués provenant de l'union des extrémités des $p - p'$ intervalles d'isolement supprimés dans la première opération. Nous les appelons *points de sectionnement* des arcs directs de C′.

**5.** Nous recommençons sur C′ l'opération faite sur C, car il apparaît que C′ présente les mêmes propriétés que C. Nous considérons les *arcs complets de* C′. Il y a *au moins un tel arc hypernormal.* Nous isolons sur C′ les arcs de passage intérieurs à des arcs hypernormaux ou normaux, comme nous l'avons fait sur C au n° **3**, en déplaçant les extrémités des intervalles d'isolement sur C′ de manière à éviter :

1° Les points de E exclus par le n° **2** qui snbsistent sur C′;
2° Les points de sectionnement du n° **4**.

*Considérons un de ces nouveaux intervalles d'isolement sur* C′.

*a*. S'il ne contient aucun point de sectionnement du n° **4**, nous le reportons sur C congrûment, c'est-à-dire de manière qu'il y occupe, par rapport à son arc de passage, la même position relative que sur C′. Il fournira sur C un intervalle d'isolement non fractionné.

*b*. S'il contient un point de sectionnement du n° **4**, on le sectionnera par ce point, et l'on reportera sur C les deux morceaux congrûment, c'est-à-dire de manière à les ajuster aux deux extrémités de l'intervalle d'isolement du n° **3**, qui ont donné naissance au point de sectionnement envisagé sur C′. Il est clair que le point de sectionnement tombant sur un arc direct de C′, on obtiendra sur C un *intervalle d'isolement fractionné*, composé d'un arc principal isolant l'arc de passage de C homologue de celui de C′, et d'un arc complémentaire intérieur à un arc direct de C, de façon que la distance curviligne entre l'extrémité de l'arc principal et l'origine de l'arc complémentaire soit précisément l'entier attaché à l'intervalle d'isolement du n° **3** qui a fourni le point de sectionnement considéré ici.

*c*. Si l'*intervalle d'isolement sur* C′ considéré ici contient $k$ points de sectionnement du n° **4** $(k > 1)$, on le sectionnera par eux en $(k+1)$ arcs partiels qu'on reportera congrûment sur C suivant les mêmes règles que précédemment en *b*, et l'on obtiendra sur C un intervalle d'isolement, fractionné en un arc principal et $k$ arcs complémentaires, satisfaisant à toutes les conditions requises.

**6**. Le processus se continue. On supprime sur C′ les *intervalles d'isolement sur* C′ introduits au n° **5**, et l'on rajuste ensemble les extrémités de chaque intervalle supprimé. Il vient une deuxième réduite C″, sur laquelle subsistent $p''(p'' < p' < p)$ arcs de passage (ceux que n'ont enlevés ni la première ni la seconde opération), avec les mêmes entiers respectivement attachés que sur C, et de manière que *la longueur de* C″ *surpasse d'une unité la somme de ces entiers*. Sur les $p''$ arcs directs de C″, provenant des arcs directs résiduels de C′, sont marqués des *points de sectionnement des arcs directs de* C″, provenant des points de sectionnement introduits par la deuxième opération, et de nouveaux points de sectionnement introduits par la deuxième opération en réunissant les extrémités de chacun des intervalles d'isolement sur C′ introduits par cette deuxième opération. On traitera C″ comme on a traité C et C′, en envisageant sur elle les arcs complets hypernormaux et normaux, et en *isolant sur* C″ les arcs de passage correspondants, de manière à éviter tous les points de sectionnement et les points de E.

**7.** Le processus se continue et *à chaque opération le nombre des arcs de passage diminue d'une unité au moins*. Par conséquent, après $p - 1$ opérations au plus, on tombera sur une courbe réduite pour laquelle tous les arcs complets seront hypernormaux ou normaux et fourniront aussitôt des intervalles d'isolement, qu'on reportera congrûment, fractionnés ou non, sur C.

**8.** Après $p$ opérations au plus, il restera une dernière réduite de C, *sans arc de passage*, et par conséquent de *longueur un*, sur laquelle seront éventuellement marqués des points de sectionnement, résidus des opérations précédentes. On reportera congrûment sur C les arcs de la dernière réduite obtenus en la sectionnant par ces points de sectionnement résiduels et le problème posé sera entièrement résolu.

**9.** On voit que le choix des intervalles d'isolement sur C dépend de paramètres, arbitraires entre certaines limites, à savoir l'origine de ces intervalles. Les précautions prises, relativement aux points à éviter, ont pour but essentiel de simplifier le problème de construction de surfaces de Riemann, qui a donné naissance au problème ici résolu, en n'introduisant que des lignes de croisement simples. Nous reviendrons ultérieurement sur ce problème de construction, pour en préciser les détails, et notamment pour faire le décompte exact des lignes de croisement introduites dans la construction.