JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE COTTON

Sur les singularités de certaines intégrales

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 207-224.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__207_0>

Sur les singularités de certaines intégrales;

PAR M. ÉMILE COTTON,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Les intégrales considérées ici portent sur une fonction φ des variables d'intégration et des paramètres qui devient infinie ou indéterminée en un point O du domaine d'intégration, lorsque les paramètres sont tous nuls. On veut étudier une telle intégrale considérée comme fonction des paramètres, ceux-ci étant voisins de zéro.

De tels paramètres se posent dans la théorie du potentiel, et les résultats indiqués ici généralisent quelques-uns de ceux donnés par Poincaré dans les paragraphes 4 et 5 de son Mémoire *Sur les propriétés du potentiel...* (*Acta mathematica*, t. 22, 1898). La fonction φ est de la forme $\frac{G}{F^\alpha}$, α est une constante positive F et G sont fonctions holomorphes des diverses variables; F est positive et a un minimum nul en O quand les paramètres sont tous nuls; ce minimum est reconnaissable aux termes du second ordre du développement de Taylor.

En utilisant le théorème de factorisation et un lemme de M. Goursat, on obtient tout d'abord diverses propositions importantes pour la suite : transformation de φ (n° **1**), équivalence de certains infiniment petits (n^{os} **2** et **3**).

Considérant ensuite une intégrale simple, on montre (n° **4**) qu'elle est la somme d'une partie critique dont l'expression en fonction des paramètres est de même nature $\frac{G_1}{F_1^\beta}$ que φ, et d'une partie continue K_1; dans certains cas elle peut contenir aussi un terme logarithmique. Mais on peut de plus obtenir que K_1 soit comme F_1 et G_1 fonction holomorphe des paramètres (n° 5).

En remplaçant une intégration multiple par plusieurs quadratures successives, on étend (n° **6**) le résultat précédent au cas général; alors $\beta = \alpha - \frac{i}{2}$, i étant le nombre de quadratures.

Vient enfin (n° **7**) une application à certains potentiels de simple ou de double couche, où les hypothèses (surface et densité analytiques) sont assurément restrictives, mais conduisent à des résultats simples permettant de rattacher à ce qui précède plusieurs propositions classiques et de les généraliser [1].

1. Soit $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ une fonction représentable par une série entière à rayons de convergence non nuls, (nous dirons plus brièvement, holomorphe), telle que la série entière $F(x, 0, \ldots, 0)$ obtenue en annulant toutes les variables y commence par un terme Ax^p, $A \neq 0$, $p > 0$, on a

$$F(x_1, y_1, \ldots, y_n) = P(x, y_1, \ldots, y_n)[A + H(x, y_1, \ldots, y_n)],$$
$$P(x, y_1, \ldots, y_n) = x^p + a_1 x^{p-1} + a_2 x^{p-2} + \ldots a_p$$

est un polynome entier en x dont les coefficients sont holomorphes en $y_1, \ldots, y_n$ et s'annulent quand ces variables sont toutes nulles; H holomorphe s'annule pour $x = y_1 = \ldots = y_n = 0$.

Cette importante proposition, trouvée successivement par Cauchy, Weierstrass et Poincaré, est classique; nous l'appellerons, avec M. Hadamard, théorème de factorisation.

M. Goursat en a donné une démonstration élémentaire (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 36, 1908, p. 209); elle repose sur le lemme préliminaire suivant qui nous sera utile : Soit $g(x, y_1, \ldots, y_n)$ une autre série entière; il existe un polynome en x

$$r_0(x, y_1, \ldots, y_n) = b_0 x^{p-1} + \ldots + b_p,$$

dont les coefficients sont holomorphes en $y_1, \ldots, y_n$, tel que la diffé-

[1] Plusieurs résultats de ce Mémoire ont été énoncés dans une Note aux *Comptes rendus* (t. **200**, p. 1502).

rence

$$\delta(x, y_1, \ldots, y_n) = g(x, y_1, \ldots, y_n) - r_0(x, y_1, \ldots, y_n)$$

s'annule identiquement quand on y remplace x par les fonctions algébroïdes, solutions de $F = 0$ (ou $P = 0$).

Ce polynome r_0 peut être appelé le *reste* de la division de la série g par le polynome de factorisation P; *il existe aussi une série analogue au quotient.* Supposons d'abord $\delta(x, 0, \ldots, 0)$ non identiquement nul, le théorème de factorisation donne

$$\delta(x, y_1, \ldots, y_n) = Q(x, y_1, \ldots, y_n)[B + K(x, y_1, \ldots, y_n)$$

$Q = x^q + c_1 x^{q-1} + \ldots + c_q$ et K sont analogues à P et H; B est une constante, non nulle. Les p fonctions algébroïdes solutions de $P = 0$ annulent Q; admettons que ces fonctions soient distinctes pour $y_1, \ldots, y_n$ quelconques, Q est le produit de P par un polynome en x, S, de degré $q - p$ dont les coefficients sont fonctions holomorphes des y, et l'on a $\delta = Pg_1$, $g_1 = S(B + K)$ et par suite la décomposition

$$g = Pg_1 + r_0, \tag{1}$$

analogue à celle de la division algébrique des polynomes, mais ici g et le quotient g_1 sont des séries entières en $x, y_1, \ldots, y_n$, r_0 et P sont des polynomes en x dont les coefficients sont fonctions holomorphes des y.

Si $\delta(x, 0, \ldots, 0)$ est identiquement nul, on considère $g' = g + P$ qui donne lieu au même reste r_0 que g; la différence $\delta' = g' - r_0$ devient x^p lorsqu'on annule tous les y; il existe donc une série entière $g'_1(x, y_1, \ldots, y_n)$ telle que $\delta' = g' - r_0 = g'_1 P$ et, par suite,

$$g = g' - P = Pg_1 + r_0$$

en prenant $g_1 = g'_1 - 1$; la formule (1) est encore valable.

A g_1 correspond un reste r_1 et un quotient g_2; on définit de même r_2 et g_3, ..., tels que

$$g = Pg_1 + r_0, \qquad g_1 = Pg_2 + r_1, \qquad \ldots, \qquad g_s = Pg_{s+1} + r_s,$$

d'où l'on déduit, en éliminant $g_1, g_2, \ldots, g_s$,

$$g = P^{s+1} g_{s+1} + P^s r_s + P^{s-1} r_{s-1} + \ldots + r_0. \tag{2}$$

Une fraction de la forme $\varphi = \frac{G}{F^\alpha}$, où F est la fonction considérée plus haut, G une fonction holomorphe, α un exposant positif, se transforme, d'abord en $\varphi = \frac{g}{P^\alpha}$, où $g = G(A+H)^{-\alpha}$ est encore holomorphe et, ensuite, en

$$(3)\qquad \varphi = \frac{G}{F^\alpha} = \frac{g}{P^\alpha} = \frac{r_0}{P^\alpha} + \frac{r_1}{P^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{r_s}{P^{\alpha-s}} + P^{s-\alpha+1} g_{s+1}.$$

Si $s < \alpha \leqq s+1$, le dernier terme reste continu quand les variables $x, y_1, \ldots, y_n$ tendent vers zéro; cette formule interviendra plus loin.

Nous supposerons réels les coefficients des séries F, G, *nous admettrons de plus que la fonction* F *est positive ou nulle lorsque toutes les variables dont elle dépend sont réelles et voisines de zéro.* Dans ces conditions *les séries entières* a_h *coefficients du polynome* P, *sont, elles aussi, à coefficients réels; il en est de même des coefficients de* H (on le voit facilement en utilisant la démonstration de M. Goursat du théorème de factorisation); la partie principale Ax^p de la fonction $F(x, 0, \ldots, 0)$ infiniment petite avec x doit être positive, A *est donc positif, le degré p est pair.* Nous prendrons la détermination de $(A+H)^{-\alpha}$ réelle et positive pour H infiniment petit, *les coefficients de* $g, r_0, Q, g_1, r_1, g_2, \ldots,$ *seront aussi réels.*

Enfin les p fonctions algébroïdes, solutions de $P = 0$, sont deux à deux imaginaires conjuguées pour les valeurs réelles des variables y.

2. Considérons une fonction F holomorphe des variables $x_1, \ldots x_n$ dont le développement en série entière commence par des termes du second ordre; supposons différent de zéro le coefficient A_1 de x_1^2; le théorème de factorisation nous donne d'abord

$$(4)\qquad F(x_1, \ldots, x_n) = [(x_1 - \xi_1)^2 + F_1](A_1 + H_1),$$

ξ_1, F_1 sont fonctions holomorphes de $x_2, \ldots, x_n$ infiniment petites avec ces variables, H_1 est fonction analogue des variables $x_1, \ldots, x_n$. $F_1(x_2, \ldots, x_n)$ commence par des termes du second ordre au moins, supposons qu'il contienne un terme en x_2^2, nous aurons par le même théorème

$$F_1 = [(x_2 - \xi_2)^2 + F_2](A_2 + H_2)$$

et, par suite,

$$F = (A_1 + H_1)(x_1 - \xi_1)^2 + (A_1 + H_1)(A_2 + H_2)(x_2 - \xi_2)^2 + (A_1 + H_1)(A_2 + H_2)F_2.$$

Si l'on peut continuer ainsi en considérant successivement les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$, on a

$$(5) \quad \begin{aligned} F = {} & (A_1 + H_1)(x_1 - \xi_1)^2 + (A_1 + H_1)(A_2 + H_2)(x_2 - \xi_2)^2 + \ldots \\ & + (A_1 + H_1)(A_2 + H_2)\ldots(A_p + H_p)(x_p - \xi_p)^2 \\ & + (A_1 + H_1)(A_2 + H_2)\ldots(A_p + H_p)F_p; \end{aligned}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont des constantes non nulles, et pour chacune des valeurs $1, 2, \ldots, p$ de k, les fonctions holomorphes H_k et ξ_k dépendent, la première des variables $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$, la seconde des variables $x_{k+1}, \ldots, x_n$; F_p est fonction holomorphe de $x_{p+1}, \ldots, x_n$; toutes ces fonctions sont infiniment petites en même temps que les variables correspondantes.

Remplaçons $x_{p+1}, \ldots, x_n$ par zéro et considérons les termes du second ordre $\Phi(x_1, \ldots, x_p)$ de la série entière $F(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$ ainsi obtenue; on a, d'après (5),

$$\Phi(x_1, \ldots, x_p) = A_1(x_1 - \bar{\xi}_1)^2 + A_1 A_2(x_2 - \bar{\xi}_2)^2 + \ldots + A_1 A_2 \ldots A_p x_p^2,$$

en désignant par $\bar{\xi}_k$ ce que devient l'ensemble des termes du premier ordre de ξ_k quand on annule $x_{p+1}, \ldots, x_n$, $(\bar{\xi}_p = 0)$; Φ est ainsi décomposée en carrés.

Quand la série $F(x_1, \ldots, x_n)$ *est à coefficients réels, il en est de même pour les séries* ξ_k, H_k, F_p; *de plus, si la forme* Φ *est définie positive,* $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *sont positifs et réciproquement.* On a d'ailleurs [1]

$$A_1 = \Delta_1, \qquad A_1 A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \qquad A_1 A_2 A_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \qquad \ldots, \qquad A_1 A_2 \ldots A_p = \frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}},$$

Δ_h étant le discriminant de la forme quadratique

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_h, 0, 0, \ldots, 0) = \Phi_h;$$

par suite $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ sont positifs si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ le sont et réciproquement.

---

[1] *Voir*, par exemple, WEBER, *Algèbre supérieure*, traduction Griess, p. 305.

Considérons alors la forme quadratique des variables $X_1, X_2, \ldots, X_h$

$$\psi_h = \sum_{l=1}^{h} \sum_{m=1}^{h} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial x_m} X_l X_m.$$

Son discriminant D_h est fonction holomorphe des variables $x_1, \ldots, x_n$ et se réduit à Δ_h quand ces variables s'annulent. Donc $D_1, \ldots, D_p$ sont positifs quand $x_1, \ldots, x_n$ sont voisins de zéro; on en déduit facilement la proposition suivante :

Si la fonction $F(x_1, \ldots, x_p; 0, \ldots, 0)$ *présente pour* $x_1 = \ldots = x_p = 0$ *un minimum nul reconnaissable aux termes du second ordre du développement de Taylor, la fonction de* $x_1, \ldots, x_p$, *déduite de*

$$F(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

en donnant aux paramètres $x_{p+1}, \ldots, x_n$ *des valeurs constantes voisines de zéro, admet aussi un minimum* μ *de même nature pour*

$$x_1 = x_{1m}, \ \ldots, \ x_p = x_{pm}.$$

Ces valeurs $x_{1m}, \ldots, x_{pm}$ *et* μ *sont fonctions holomorphes des paramètres* $x_{p+1}, \ldots, x_n$; *et toutes ces fonctions s'annulent en même temps que les paramètres.*

Cette proposition a évidemment une interprétation en Mécanique.

Ajoutons que μ *est le produit de la fonction* $F_p(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ *rencontrée plus haut par une fonction holomorphe des paramètres* $x_{p+1} \ldots, x_n$, *dont le terme constant est différent de zéro.*

Pour le voir écrivons l'identité (5) sous une forme plus condensée

$$(6) \qquad F(x_1, \ldots, x_n) = B_1(x_1 - \xi_1)^2 + \ldots + B_p(x_p - \xi_p)^2 + B_p F_p$$

Les B sont fonctions de $x_1, \ldots, x_n$; aux équations que doivent vérifier $x_{1m}, \ldots, x_{pm}$, on peut donner la forme

$$(7) \quad \frac{\partial F}{\partial x_h} = C_{h1}(x_1 - \xi_1) + C_{h2}(x_2 - \xi_2) + \ldots + C_{hp}(x_p - \xi_p) + \frac{\partial B_p}{\partial x_h} F_p = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

les différences $x - \xi$ figurant encore dans les C à cause des termes en $(x - \xi)^2$.

En observant que $\frac{\partial \xi_k}{\partial x_h} = 0$ pour $k \geqq h$, on voit facilement que le déterminant ϖ des C se réduit pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$ à $2^p A_1^p A_2^{p-1} \ldots A_p$; $\frac{1}{\varpi}$ est donc fonction holomorphe des x et le système (7) peut s'écrire

$$(8) \qquad x_h - \xi_h = Q_h F_p \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

les Q_h sont holomorphes en $x_1, \ldots, x_n$. Donnons à $x_1, \ldots, x_p$ les valeurs $x_{1m}, \ldots, x_{pm}$, qui correspondent au minimum, $\xi_1, \ldots, \xi_p$ prennent des valeurs $\xi_{1m}, \ldots, \xi_{pm}$, les différences $x_{1m} - \xi_{1m}, \ldots, x_{pm} - \xi_{pm}$ sont donc les produits de F_p par des facteurs holomorphes en $x_{p+1}, \ldots x_n$.

L'expression (5) montre alors que μ ou $F(x_{1m}, \ldots, x_{pm}, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ *est le produit de* F_p *par un facteur holomorphe en* $x_{p+1}, \ldots, x_n$ qui se réduit à la constante positive $A_1, A_2, \ldots, A_p$ lorsque les $n - p$ paramètres $x_{p+1}, \ldots, x_n$ sont nuls.

3. Une fonction remplissant les conditions précédentes est donnée par le carré de la distance d'un point M (a, b, c) à un point $P[x, y, \psi(x, y)]$ variable sur une surface analytique Σ d'équation $z = \psi(x, y)$. L'origine des axes rectangulaires est un point O de Σ Oz est normal à Σ; la série $\psi(x, y)$ commence par des termes du second ordre au moins.

On a

$$F(x, y, a, b, c) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + [\psi(x, y) - c]^2,$$

x, y jouent le rôle de $x_1, \ldots, x_p$ et a, b, c celui de $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Si M est en O ou voisin de O il y a bien minimum véritable.

Le système

$$(9) \qquad (x - a) + (\psi - c)\psi'_x = 0, \qquad (y - b) + (\psi - c)\psi'_y = 0,$$

détermine x_m, y_m et $z_m = \psi(x_m, y_m)$ coordonnnées du pied de la normale abaissée de M sur Σ; ce sont des fonctions holomorphes de a, b, c; $x_m = a + \ldots, y_m = b + \ldots$ les termes non écrits sont d'un ordre plus grand que un, et le minimum peut s'écrire

$$\mu = F(x_m, y_m; a, b, c) = [c - \psi(x_m, y_m)]^2 [1 + \psi'^2_x(x_m, y_m) + \psi'^2_y(x_m, y_m)]$$

Le second facteur est une fonction holomorphe de a, b, c dont le terme constant est l'unité; μ est donc, pour a, b, c infiniment petits, équivalent à $[c-\psi(x_m, y_m)]^2$; il ne peut ainsi s'annuler que si $c-\psi(x_m, y_m)=0$, mais alors $x_m=a, y_m=b$ en vertu de (9) et $c-\psi(a, b)=0$.

Les deux fonctions holomorphes de a, b, c

$$\theta=c-\psi(x_m, y_m), \qquad \tau=c-\psi(a, b)$$

ont toutes deux un seul terme du premier degré c; si la première s'annule, il en est de même de la seconde, donc

$$\theta=\tau[1+h(a, b, c)],$$

h fonction holomorphe s'annulant pour $a=b=c=0$; autrement dit θ et τ sont équivalents pour a, b, c infiniment petits et de même μ et $[c-\psi(a, b)]^2$.

$$\mu=[c-\psi(a, b)]^2[1+\eta(a, b, c)], \tag{10}$$

η holomorphe s'annule pour $a=b=c=0$.

4. Dans les intégrales que nous allons étudier la fonction φ sous le signe $\int$ est de la forme $\frac{G}{F^\alpha}$, F et G sont fonctions réelles holomorphes des variables réelles $x_1, \ldots, x_n$ (dont les unes sont variables d'intégration, les autres des paramètres); F vérifie les hypothèses du n° 2 la formule (5) étant valable quand on prend pour $x_1, \ldots, x_p$ les variables d'intégration; on suppose $F_p \geqq 0$ et par suite le minimum $\mu \geqq 0$, mais non identiquement nul. On prend la détermination réelle et positive de F^α. Le domaine d'intégration et sa frontière sont indépendants des paramètres; le point O pour lequel les variables d'intégration sont nulles est intérieur à ce domaine. Si les paramètres sont nuls, $\mu=0$ la fonction φ devient infinie ou indéterminée en O, on a une intégrale singulière; mais l'intégrale a un sens pour des valeurs des paramètres voisines de zéro n'annulant pas F_p et μ; nous cherchons alors la nature de cette intégrale considérée comme fonction des paramètres ([1]).

([1]) *Voir* le mémoire cité de Poincaré et l'ouvrage de M. Hadamard, *Le Problème de Cauchy*, p. 167 et suivantes.

Soit d'abord une intégrale simple; désignons par x la variable d'intégration, par $y_1, \ldots, y_n$ les paramètres, par x_0, x_1 les limites de l'intégrale; nous supposons les y et ces limites voisins de zéro (pour la convergence des séries utilisées) et ces limites de signes contraires $x_0 < 0 < x_1$. Posons

$$\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{F}^{\alpha}}\,dx, \tag{11}$$

la formule (3) ramène la question à l'étude d'intégrales analogues portant sur les divers termes du second membre.

Celle qui porte sur $\mathrm{P}^{s-\alpha+1} g_{s+1}$ est continue dans les conditions indiquées, les autres sont de la forme suivante, puisque le polynome de factorisation est du second degré $[\mathrm{P} = (x-\xi)^2 + \mathrm{F}_1]$,

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{b_0 x + b_1}{\mathrm{P}^{\beta}}\,dx = \frac{b_0}{2}\mathrm{I}_\beta + (b_0\xi + b_1)\mathrm{J}_\beta, \\ \displaystyle\mathrm{I}_\beta = \int_{x_0}^{x_1} \frac{2(x-\xi)}{\mathrm{P}^{\beta}}\,dx = \frac{1}{1-\beta}[\mathrm{P}(x_1)^{1-\beta} - \mathrm{P}(x_0)^{1-\beta}] \quad \text{si} \quad \beta \neq 1 \\ \displaystyle\text{et, pour} \quad \beta = 1 \quad \mathrm{I}_1 = \log\frac{\mathrm{P}(x_1)}{\mathrm{P}(x_0)}, \\ \displaystyle\mathrm{J}_\beta = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\mathrm{P}^{\beta}}. \end{array} \right.$$

Dans ces formules $\beta = \alpha - \nu$, ν prenant les valeurs 0, 1, 2 inférieures à α, β, est donc positif.

Comme $\frac{\mathrm{P}(x_0)}{x_0^2}$ et $\frac{\mathrm{P}(x_1)}{x_1^2}$ sont fonctions holomorphes de $y_1, \ldots, y_n$ prenant la valeur 1 pour $y_1 = \ldots = y_n = 0$, les intégrales I_β et I_1 sont holomorphes en $y_1, \ldots, y_n$ (quel que soit β).

Pour les intégrales J_β divers cas sont à distinguer

1° $2\beta > 1$. — L'intégrale

$$\mathrm{J}'_\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\mathrm{P}^{\beta}}$$

a un sens, et se calcule en posant

$$x = \xi + \mathrm{F}_1^{\frac{1}{2}} \operatorname{tang}\varphi$$

ce qui donne

$$J'_\beta = \frac{1}{F_1^{\beta-\frac{1}{2}}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\beta-2}\varphi\, d\varphi = \frac{B\left(\beta-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{F_1^{\beta-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)}\,\frac{1}{F_1^{\beta-\frac{1}{2}}},$$

$B(p, q)$ désigne l'intégrale eulérienne de première espèce (Goursat, *Cours d'Analyse*, t. 1, Chap. VI).

D'autre part,

$$P^{-\beta} = x^{-2\beta}\left[\left(1-\frac{\xi}{x}\right)^2 + \frac{F_1}{x^2}\right]^{-\beta}$$

le second facteur est une série entière en $\frac{\xi}{x}, \frac{F_1}{x^2}$ (convergente pour x extérieur à l'intervalle (x_0, x_1) si les y sont assez voisins de zéro) et, comme $2\beta > 1$, *les intégrales*

$$\int_{x_0}^{-\infty} P^{-\beta}\, dx, \qquad \int_{+\infty}^{x_1} P^{-\beta}\, dx,$$

qu'il faut ajouter à J'_β *pour obtenir* J_β, *sont fonctions holomorphes des* y.

2° $2\beta < 1$. — En posant

$$x - \xi = t, \qquad x_0 - \xi = t_0, \qquad x_1 - \xi = t_1,$$

on a

$$J_\beta = \int_{t_0}^{t_1} (t^2 + F_1)^{-\beta}\, dt;$$

comme $F_1 > 0$,

$$(t^2 + F_1)^{-\beta} < t^{-2\beta},$$

l'intégrale J_β est uniformément convergente (Hadamard, *Cours d'Analyse*, t. 1, p. 225) et fonction continue de F_1 et ξ et, par suite, des y [1].

On voit de même que

$$\int_{x_0}^{x_1} \log\frac{1}{P}\, dx$$

est une fonction continue des y.

---

[1] D'ailleurs l'identité facile à établir

$$(1-2\beta)J_\beta + 2\beta F_1 J_{\beta+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{P'_x(x_1)}{P^\beta(x_1)} - \frac{P'_x(x_0)}{P^\beta(x_0)}\right],$$

qui ramène le calcul de J_β à celui de $J_{\beta+1}$, et la relation $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$

3° $2\beta=1$. — Ce cas ne peut se rencontrer que si $\alpha=\frac{1}{2}+p$, p entier, positif ou nul. On a facilement

$$J_{\frac{1}{2}}=\log\frac{-x_0x_1}{F_1}+\log\left[1-\frac{\xi}{x_1}+\sqrt{\left(1-\frac{\xi}{x_1}\right)^2+\frac{F_1}{x_1^2}}\right]$$
$$+\log\left[1-\frac{\xi}{x_0}+\sqrt{\left(1-\frac{\xi}{x_0}\right)^2+\frac{F_1}{x_0^2}}\right];$$

$J_{\frac{1}{2}}$ est donc la somme de $\log\frac{1}{F_1}$ et d'une série entière en ξ et F_1 et, par suite, en $y_1, \ldots, y_n$.

En définitive, l'intégrale $I=\int_{x_0}^{x_1}\frac{G}{F^\alpha}dx$ *est la somme d'une fonction continue* K_1 *des paramètres variables* $y_1, \ldots, y_n$ *et d'une partie critique de la forme* $\frac{G_1}{F_1^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ *où* G_1 *et* F_1 *sont fonctions holomorphes des paramètres* (F_1 *s'annule quand* $y_1=\ldots=y_n=0$). *Toutefois, si* $\alpha-\frac{1}{2}$ *est un entier positif, il faut, en général, ajouter le produit* $L_1\log\frac{1}{F_1}$ *où* L_1 *est une série entière par rapport aux* y. *Ce dernier terme critique existe seul si* $\alpha=\frac{1}{2}$.

On peut changer la partie critique en changeant en même temps la fonction continue : on prend par exemple

$$G'_1=G_1+HF_p \qquad \text{et} \qquad K'_1=K_1-HF_1^{p-\alpha+\frac{1}{2}}$$

au lieu de G_1 et K_1 : H est une série entière en $y_1, \ldots, y_n$, p est un entier supérieur à $\alpha-\frac{1}{2}$.

---

montrent que la relation

$$J_\beta=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)}\,\frac{1}{F_1^{\beta-\frac{1}{2}}}\qquad\text{plus fonction holomorphe des } y,$$

reste valable pour des valeurs de β, ne satisfaisant plus à l'inégalité $2\beta>1$.

5. Indiquant seulement qu'on peut adapter cette démonstration et ce résultat à des hypothèses plus larges que les précédentes, nous établirons par contre qu'en nous tenant à ces hypothèses antérieures, on peut obtenir une proposition plus précise : *la décomposition indiquée pour l'intégrale* I *peut être faite de façon que la partie* K_1 *soit fonction holomorphe des paramètres* y.

Poincaré l'a montré dans le cas où I est le potentiel newtonien d'une courbe analytique (*loc. cit.*, § 4); nous allons étendre sa démonstration au cas général que nous étudions en simplifiant la partie concernant la convergence des séries.

On va donner la forme suivante à l'intégrale indéfinie correspondant à I :

$$\int \frac{g}{P^\alpha}\,dx = g_0 \int \frac{dx}{P^\alpha} + \frac{\varphi}{P^{\alpha-1}},$$

φ étant une fonction holomorphe de x et des y, g_0 une fonction holomorphe des y seuls. Cette relation revient à

$$g = g_0 + P^\alpha \frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi}{P^{\alpha-1}}\right) = g_0 + P\varphi'_x + (1-\alpha)\varphi P'_x,$$

que les changements de variable et de notation

$$x - \xi = t, \qquad 2(1-\alpha) = \nu, \qquad \alpha = 1 - \frac{\nu}{2}, \qquad F_1 = -\eta,$$

transforment en

$$g = g_0 + \nu t \varphi + (t^2 - \eta)\varphi'_t. \tag{13}$$

Avec Poincaré, regardons η comme un paramètre, g comme une série entière en t, cherchons g_0 série entière en η et φ série entière en t et η que nous ordonnons par rapport à η :

$$g_0 = u_0 + u_1\eta + u_2\eta^2 + \ldots, \qquad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1\eta + \ldots + \varphi_k\eta^k + \ldots.$$

L'équation (13) donne alors

$$g = u_0 + \nu t\varphi_0 + t^2\varphi'_0, \qquad \varphi'_0 = u_1 + \nu t\varphi_1 + t^2\varphi'_1, \qquad \ldots,$$
$$\varphi'_{k-1} = u_k + \nu t\varphi_k + t^2\varphi'_k, \quad \ldots,$$

équations qui permettent de trouver successivement les couples

$$(u_0, \varphi_0), \quad (u_1, \varphi_1), \quad \ldots, \quad (u_k, \varphi_k), \quad \ldots,$$

car si

$$\varphi'_{k-1} = \frac{d\varphi_{k-1}}{dt} = A_0 + A_1 t + \ldots + A_h t^h + \ldots,$$

on a

$$u_k = A_0, \qquad \varphi_k = \frac{A_1}{\nu} + \frac{A_2 t}{\nu + 1} + \ldots + \frac{A_h t^{h-1}}{\nu + h - 1} + \ldots,$$

u_0 et φ_0 se déterminent de même à partir de g (remplaçant φ'_{k-1}). Si $g(t) = t^m$, m entier, on obtient ainsi pour φ le polynome suivant homogène de degré $m-1$ en t et $\eta^{\frac{1}{2}}$:

$$\psi_m = \frac{t^{m-1}}{m+\nu-1} + \frac{m-1}{(m+\nu-1)(m+\nu-3)}\eta t^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m+\nu-1)(m+\nu-3)(m+\nu-5)}\eta^2 t^{m-5} + \ldots;$$

g_0 est alors nul si m est impair et a pour valeur, si m est pair,

$$\sigma_m = \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3.1}{(m+\nu-1)(m+\nu-3)\ldots(\nu+3)(\nu+1)}\eta^{\frac{m}{2}}.$$

De ce cas particulier, on passe au cas général où $g(t)$ est une série entière en $x, y_1, \ldots, y_n$; on l'ordonne par rapport à t; en y remplaçant t^m par ψ_m, on a $\varphi(t)$ comme série entière en t, η, $y_1, \ldots, y_n$ et, en remplaçant t^m par σ_m, on a $g_0(t)$. Ces deux séries sont-elles convergentes ?

La réponse est immédiate lorsque $\alpha < 1$ ou $\nu > 0$, car les coefficients des divers polynomes ψ_m et des monomes σ_m étant évidemment tous compris entre 0 et 1, il est possible d'appliquer un lemme que nous avons donné antérieurement (*Annales de l'École Normale*, 3[e] série, 49, p. 367, note).

Remplaçons ensuite dans ces séries t par $x - \xi(y_1, \ldots, y_n)$, η par $-F_1(y_1, \ldots, y_n)$, nous obtenons φ comme fonction holomorphe de $x, y_1, \ldots, y_n$; g_0 comme fonction holomorphe des y.

Passons à l'intégrale définie; nous avons

$$g_0 \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{P}^{-\alpha}\, dx + [\varphi \mathrm{P}^{1-\alpha}]_{x_0}^{x_1};$$

d'après ce qui a été dit plus haut pour les intégrales I_β, on voit que le second terme est fonction holomorphe des y; la nature de l'intégrale figurant dans le premier terme nous est connue (n° **4**); la proposition est donc démontrée lorsque $0 < \alpha < 1$.

Si $\alpha \geqq 1$, on décompose (n° **1**) $\frac{g}{\mathrm{P}^\alpha}$ en une somme de fractions $\frac{r}{\mathrm{P}^{\alpha-\nu}}$ et une fraction complémentaire $\frac{g_s}{\mathrm{P}^{\alpha'}}$, $0 < \alpha' = \alpha - s < 1$; les intégrales correspondant aux premières fractions ont été précédemment considérées (n° **4**); celle qui porte sur le terme complémentaire rentre dans le cas que nous venons d'étudier.

En définitive l'intégrale I a bien l'une des formes du n° **4**, K_1 étant fonction holomorphe des paramètres.

6. Passons à l'étude des *intégrales doubles;* soient x, y les variables d'intégration et $z_1, \ldots, z_n$ les paramètres; l'intégrale

$$I = \iint \frac{G(x, y, z_1, \ldots, z_n)}{F^\alpha(x, y, z_1, \ldots, z_n)}\, d\sigma$$

est étendue à une aire S du plan xOy à laquelle l'origine O est intérieure. Rappelons que F et G sont holomorphes pour $x, y, z_1, \ldots, z_n$ voisins de zéro; F s'annule lorsque toutes les variables sont nulles; on suppose que les termes du second ordre de la série $F(x, y; 0, \ldots, 0)$, constituent une forme définie positive; le minimum $\mu(z_1, \ldots, z_n)$ est positif et non identiquement nul.

Décomposons S en un rectangle R : $x_0 < x < x_1$, $y_0 < y < y_1$ auquel O est intérieur et une autre partie $S - R = T$; soient I_R, I_T les intégrales correspondantes $I = I_R + I_T$.

Si, comme nous l'admettrons, F ne s'annule pas lorsque x, y est intérieur à T et que les paramètres z sont voisins de zéro, I_T est fonction analytique des paramètres, il suffit de considérer I_R.

Intégrons d'abord par rapport à x entre les limites x_0 et x_1; le résultat est de la forme $K_1 + \frac{G_1}{F_1^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ ou, si $\alpha - \frac{1}{2}$ est un entier positif ou nul, $K_1 + \frac{G_1}{F_1^{\alpha-\frac{1}{2}}} + L_1 \log \frac{1}{F_1}$; F_1, G_1, K_1, L_1 sont fonctions de y et de $z_1, \ldots, z_n$. La seconde quadrature effectuée par rapport à y entre les limites y_0 et y_1 donne pour l'intégrale relative à K_1 une fonction continue (et même holomorphe) des variables z; et pour celle relative au second terme $\frac{G_1}{F_1^{\alpha-\frac{1}{2}}}$, la somme d'une fonction de même nature et d'une fraction de la forme $\frac{G_2}{F_2^{\alpha-1}}$ (ou $\frac{G_2}{F_2^{\alpha-1}} + L_2 \log \frac{1}{F_2}$ si $\alpha - 1$ est entier); F_2, G_2, L_2 désignent des fonctions de même nature que F_1, G_1, L_1 (mais ne dépendant plus de la variable y).

Enfin, si $\alpha - \frac{1}{2}$ est entier, on a encore une intégrale portant sur le terme $L_1 \log \frac{1}{F_1}$; l'intégration par parties donne, en appelant $\mathcal{L}$ une série entière en y, $z_1, \ldots, z_n$, telle que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = L_1$:

$$\int_{y_0}^{y_1} L_1 \log \frac{1}{F_1}\, dy = \left[\mathcal{L} \log \frac{1}{F_1}\right]_{y_0}^{y_1} + \int_{y_0}^{y_1} \mathcal{L} \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y}}{F_1}\, dy,$$

le premier terme du second membre est fonction holomorphe des z, le second est la somme d'une fonction analogue et d'une partie critique de même nature que $\frac{G_2}{F_2^{\frac{1}{2}}}$.

Des intégrales doubles, on passe de même aux intégrales triples et à celles d'ordre quelconque [1].

Pour une intégrale p^{uple} portant sur une fonction $\frac{G}{F^\alpha}$ satisfaisant aux

---

[1] Poincaré, dans le Mémoire cité, a montré (p. 131) que plusieurs de ses résultats s'obtenaient en utilisant la théorie des intégrales simples ou multiples dans des domaines complexes et les périodes de telles intégrales. Mais il se limite aux valeurs $\alpha = \frac{m}{2}$, m entier.

Une étude plus complète serait nécessaire pour α nombre positif quelconque; nous ne la ferons pas ici.

conditions énoncées (nº **4**), la partie critique est en général de la forme $\dfrac{G^p}{F_p^{\alpha-\frac{p}{2}}}$ ou, si $\alpha-\frac{p}{2}$ est entier, $\dfrac{G_p}{F_p^{\alpha-\frac{p}{2}}}+L_p\log\dfrac{1}{F_p}$; F_p a été définie plus haut, G_p, L_p sont aussi fonctions holomorphes des paramètres. A cette partie critique s'ajoute une partie continue et même holomorphe.

On a vu (nº **2**) que le minimum μ et F_p ne diffèrent que par un facteur qui est série entière par rapport aux paramètres, dont le terme constant est différent de zéro; on peut donc substituer dans les formes précédentes μ à F_p (en modifiant convenablement G_p, L_p); au lieu de μ on peut encore prendre un infiniment petit holomorphe équivalent.

7. Considérons par exemple *le potentiel newtonien* U *d'une simple couche répartie sur une surface analytique* Σ, *à densité* ρ *analytique*. Il est donné par une intégrale $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{\rho\, d\sigma}{r}$, $d\sigma$ est l'élément de surface, r la distance MP du point attiré $M(a, b, c)$ à un point $P(x, y, z)$ de la surface. On veut étudier U quand M est voisin d'un point O de la surface; on prend les mêmes axes que plus haut (nº **3**), $d\sigma=\dfrac{dx\,dy}{\gamma}$, γ est le cosinus de l'angle de la normale à Σ avec Oz; au voisinage de O, $\dfrac{1}{\gamma}$ est une série entière en x, y dont le terme constant est l'unité.

Ici,

$$G=\frac{\gamma}{\rho},\qquad F=(x-a)^2+(y-b)^2+[\psi(x,y)-c]^2;\qquad \alpha=\frac{1}{2}.$$

On a vu que, dans ce cas, le minimum μ est équivalent à $[c-\psi(a,b)]^2$. De plus, $\alpha-1=-\frac{1}{2}$, le potentiel U est de la forme

$$\mathcal{G}(a,b,c)\,|c-\psi(a,b)|+\mathcal{K}(a,b,c).$$

$\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ sont holomorphes; le module $|c-\psi|$ est égal à $c-\psi$ où à $\psi-c$; *on a deux expressions holomorphes*

$$U_1=(c-\psi)\mathcal{G}+\mathcal{K},\qquad U_2=(\psi-c)\mathcal{G}+\mathcal{K}$$

pour le potentiel; la première convient au côté de Σ *où* $c>\psi(a,b)$ *et la* *seconde au côté où* $c < \psi(a, b)$; *ces deux expressions sont égales pour* $c = \psi(a, b)$; *le potentiel de simple couche reste continu.*

Les composantes de la force ont donc, elles aussi, deux expressions holomorphes distinctes suivant le côté de Σ *où se trouve le point d'application* M : *il y a discontinuité pour les composantes normales,* car on a, pour $a = b = c = 0$,

$$\frac{\partial U_1}{\partial c} - \frac{\partial U_2}{\partial c} = 2\mathcal{G}(0, 0, 0);$$

mais les composantes tangentielles sont continues, car

$$\psi'_a(0, 0) = \psi'_b(0, 0) = 0.$$

L'étude directe de l'intégrale donnant la composante normale permet de compléter ce résultat; il suffit même de la faire pour

$$a = b = 0$$

(M tend vers O en suivant la normale). Tout revient à calculer les premiers termes des séries entières intervenant dans la théorie précédente; M. Goursat a montré la possibilité de ce calcul pour les coefficients des polynomes de factorisation et ceux des restes.

On peut abréger encore en remarquant que la composante normale s'écrit

$$\iint \rho \frac{\psi(x, y) - c}{r^3} d\sigma = \iint \frac{\rho\psi(x, y)}{r^3} d\sigma - c \iint \rho \frac{d\sigma}{r^3},$$

et que la première intégrale du second membre est uniformément convergente et fonction continue de c, pour $c = 0$ (M est en O) elle donne

$$I_0 = \iint \frac{\rho\psi}{r_0^3} d\sigma, \qquad r_0 = \mathrm{OP}.$$

Tout revient à étudier, au point de vue précédent, le second terme; il est facile de voir que la limite du produit est $2\pi\rho_0$ lorsque c tend vers zéro par valeurs positives, $-2\pi\rho_0$ pour les valeurs négatives, on retrouve ainsi les limites classiques.

Le potentiel newtonien d'une double couche étant la somme de trois composantes de forces correspondant à des simples couches (¹) a,

---

(¹) KELLOG, *Foundations of Potential Theory*, 1929, p. 167.

lui aussi, dans le cas des données analytiques, deux expressions holomorphes, distinctes, correspondant aux deux côtés de S, et sera représenté sur S par leur moyenne arithmétique [1].

Ce qui est essentiel dans ce qui précède, c'est la valeur $\left(\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{3}{2}\right)$ de l'exposant α. Ces résultats s'étendent donc aux potentiels et aux forces correspondant à une action élémentaire de la forme $\frac{d}{dr}\left(\frac{f(r)}{r}\right)$, $f(r)$ étant une fonction holomorphe de r telle que $f(0) \neq 0$ que certaines théories utilisent [2].

Par contre, ils sont à modifier quand la force élémentaire est inversement proportionnelle à une puissance de la distance dont l'exposant est autre que 2.

---

(1) Ces propriétés du potentiel pour des données analytiques ont été établies par Bruns, Stahl, Erhard Schmidt (*Mathematische Annalen*, t. 68, 1910, p. 107) par une méthode toute différente utilisant l'équation de Laplace et les théorèmes d'existence de Cauchy, Weierstrass, M^me de Kowalewski.

(2) E. Picard, *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*; collection Julia, fasc., V, p. 260.