JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE JANET

Dualité dans certaines questions de calcul des variations

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 177-191.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__177_0>

Dualité dans certaines questions de calcul des variations;

PAR MAURICE JANET.

Un problème de la nature de ceux que suggère la Physique mathématique peut souvent être rattaché de plusieurs manières distinctes et simples à quelque question d'extremum. Suivant l'objet que l'on aura en vue, on pourra préférer tel ou tel de ses aspects.

Je me propose de préciser ici la liaison entre deux d'entre eux pour une question classique de portée étendue : l'équation de Fredholm à noyau symétrique; puis, me limitant à un problème particulier, du type de ceux qui ont été traités (il y a juste cent ans, la première année du *Journal de Mathématiques*) par Sturm et Liouville, de montrer comment cette liaison suggère d'elle-même l'emploi d'une certaine transformation involutive dont l'importance pour les applications du Calcul des Variations a été récemment mise en évidence ([1]).

Qu'il me soit permis d'associer cette petite étude à l'hommage rendu à M. E. Goursat, le maître vénéré dont on connaît les importantes contributions tant à la théorie des équations intégrales qu'à de si nombreux domaines des Mathématiques.

1. Désignons par $K(x, \xi)$ une fonction symétrique, continue, non identiquement nulle, des variables (x, ξ) $x_0 \leq x$, $\xi \leq x_1$; et supposons

([1]) FRIEDRICHS, *Nachrichten der Ges. der Wiss. zu Göttingen*, 1929, p. 13-20; COURANT et HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, 2e édition, 1931, p. 202.

que les fonctions fondamentales de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0 \tag{1}$$

forment un système *complet*. Considérons alors les deux rapports (¹)

$$R = \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} u(x)\, v(x)\, dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} v^2(x)\, dx}, \qquad H = \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} u^2(x)\, dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} u(x)\, v(x)\, dx},$$

où u désigne une fonction continue arbitrairement choisie non identiquement nulle et où l'on a posé

$$v(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Les extrema de ces rapports sont obtenus en même temps, et sont les mêmes : ils sont obtenus pour les fonctions fondamentales $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ *de l'équation* (1) *et ce sont les valeurs singulières correspondantes* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

Soit, suivant le cas, une fonction u donnant à R une valeur extrémale ρ, ou une fonction u donnant à H une valeur extrémale η.

Pour H, on doit avoir, quel que soit δu,

$$\int_{x_0}^{x_1} [2 u\, \delta u - \eta(u\, \delta v + v\, \delta u)]\, dx = 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} u(x)\, \delta v(x)\, dx &= \int_{x_0}^{x_1} u(x)\, dx \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\, \delta u(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \delta u(\xi)\, d\xi \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\, u(x)\, dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} v(\xi)\, \delta u(\xi)\, d\xi.
\end{aligned}$$

(¹) *Cf.* HILBERT, *Grundzüge einer Allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, p. 56; LORD RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, sec. éd., 1929, p. 110; Hilbert associe au rapport R le nom de Dirichlet, au rapport H le nom de Gauss.

La condition

$$\int_{x_0}^{x_1} [2u(x) - 2\eta v(x)]\,\delta u(x)\,dx = 0,$$

quelle que soit δu, conduit à

$$u(x) - \eta v(x) = 0,$$

ce qui montre que η est une valeur singulière de (1) et u une des solutions correspondantes.

En faisant un calcul analogue pour R, on trouve

$$v(x) - \rho \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\,v(\xi)\,d\xi = 0, \tag{3}$$

mais v satisfaisant à cette équation, l'équation (2) en u admet évidemment la solution continue

$$u(x) = \rho\,v(x).$$

Elle n'en admet pas d'autre : $\int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\,w(\xi)\,d\xi$, où w est continue, est développable en série uniformément convergente de fonctions singulières $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ et ne peut être identique à zéro, d'après l'expression même des coefficients du développement que si tous les nombres $\int_{x_0}^{x_1} \varphi_n(x)\,w(x)\,dx$ sont nuls, et par suite, puisque le système des φ_n est *complet*, si w est identiquement nulle. Le seul moyen de satisfaire à (3) est donc de prendre pour u une fonction égale au produit de $v(x)$ par une constante, et par suite satisfaisant elle-même à

$$u(x) - \rho \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\,u(\xi)\,d\xi = 0.$$

Les fonctions u qui rendent stationnaire l'un ou l'autre des rapports R, H sont les mêmes, à savoir les fonctions fondamentales $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Les valeurs [1] extrémales correspondantes sont les mêmes, à savoir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

---

(1) Nous convenons de répéter une valeur singulière p fois s'il lui correspond p solutions linéairement indépendantes, et de prendre pour $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ une suite orthogonale et normale.

On peut remarquer (inégalité dite de Schwarz) que R ne peut être égal à H que précisément si $\frac{u}{v}$ est une constante, autrement dit si u est une fonction fondamentale, la valeur de la constante étant précisément la valeur commune (extrémale) correspondante.

2. Il n'a été question jusqu'ici que de « variation première ». Pour donner des énoncés plus précis, supposons maintenant le noyau K *défini positif*, c'est-à-dire tel que pour toute fonction continue ω (sauf pour $\omega = 0$) on ait

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}(x, \xi)\,\omega(x)\,\omega(\xi)\,dx\,d\xi > 0.$$

On aura alors

$$0 < \mathrm{R} \leqq \mathrm{H}.$$

La méthode même d'Hilbert pour prouver l'existence des valeurs singulières (toutes positives ici) $0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$ montre précisément que λ_1 est le minimum absolu de H; que λ_n devient le *minimum absolu de* H si l'on restreint le champ de u en assujettissant cette fonction à être orthogonale aux $n-1$ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ correspondant à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Et un raisonnement connu (¹) permet d'ailleurs de donner de λ_n une signification ne faisant pas intervenir les valeurs précédentes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$:

Assujettissons u à être orthogonale à $n-1$ fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ données comme on voudra, il existe évidemment des fonctions u, de cette espèce, de la forme

$$\bar{u} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n,$$

où les c sont des constantes non toutes nulles; la fonction $\bar{v}$ correspondante s'écrit évidemment

$$\bar{v} = \frac{c_1}{\lambda_1}\varphi_1 + \frac{c_2}{\lambda_2}\varphi_2 + \ldots + \frac{c_n}{\lambda_n}\varphi_n.$$

Le calcul des valeurs correspondantes $\overline{\mathrm{R}}$, $\overline{\mathrm{H}}$ est immédiat : et l'on voit que ces valeurs sont au plus égales à λ_n; la borne inférieure de R

(¹) *Cf.* COURANT et HILBERT, *Meth. der Mat. Physik*, 2ᵉ éd., p. 112.

et H dans le champ des u orthogonales à $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ est donc, *a fortiori*, au plus égale à λ_n. Montrons pour R, par exemple, qu'elle est exactement λ_n lorsque les ψ se réduisent aux φ. Posons

$$\int_a^b u(x)\,\varphi_p(x)\,dx = \gamma_p;$$

un calcul aisé montre que

$$\int_a^b v(x)\,\varphi_p(x)\,dx = \frac{\gamma_p}{\lambda_p}.$$

Le système des φ étant complet, on obtient alors les égalités

$$\int_a^b uv\,dx = \sum_{p=1}^{p=+\infty} \frac{\gamma_p^2}{\lambda_p},$$

$$\int_a^b v^2\,dx = \sum_{p=1}^{p=+\infty} \frac{\gamma_p^2}{\lambda_p^2};$$

l'expression de R, qui en résulte quand on y fait $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n-1} = 0$ et les inégalités $\lambda_n \leqq \lambda_{n+1} \leqq \ldots$ conduisent alors immédiatement à la conclusion annoncée.

Ainsi les bornes inférieures de R et de H, dans le champ des fonctions u orthogonales à $n-1$ fonctions données $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$, ont, quand on fait varier les ψ de toutes les manières possibles, le même maximum, à savoir la $n^{\text{ième}}$ valeur singulière λ_n.

Remarque. — C'est u que nous avons assujettie à être orthogonale à $n-1$ fonctions arbitraires données. Nous pourrions tout aussi bien assujettir v à une telle condition.

D'abord dire que v est orthogonal à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ (fonctions fondamentales), c'est, d'après un résultat qui vient d'être rappelé, assujettir u lui-même à être orthogonal à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$. D'autre part, étant données d'une manière quelconque les $n-1$ fonctions $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{n-1}$, il y a parmi les fonctions v qui leur sont orthogonales, des fonctions de la forme suivante, où les c ne sont pas tous nuls,

$$\bar{v} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n,$$

obtenues pour la fonction

$$\bar{u} = \lambda_1 c_1 \varphi_1 + \lambda_2 c_2 \varphi_2 + \ldots \lambda_n c_n \varphi_n.$$

Or la valeur $\overline{R}$ de R, ou $\overline{H}$ de H, calculée pour une telle fonction, est au plus égale à λ_n; la borne inférieure de chacun des rapports R ou H lorsque v est assujettie à être orthogonale à $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{n-1}$, est donc *a fortiori*, au plus égale à λ_n. La valeur λ_n étant atteinte (d'après ce qu'on a vu) quand les χ sont égaux aux φ, on peut dire encore que les bornes inférieures de R et de H dans les nouvelles conditions considérées ont même maximum λ_n.

3. La source algébrique des résultats précédents est essentiellement un fait que nous allons énoncer, sous forme géométrique, et pour un cas particulier. $\Sigma k_{ij} u_i u_j$ étant une forme quadratique définie positive donnée, à trois variables indépendantes u_1, u_2, u_3, posons

$$v_i = k_{i1} u_1 + k_{i2} u_2 + k_{i3} u_3$$

et considérons les rapports

$$R = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \qquad H = \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

(rapports qui ne changent pas quand on multiplie tous les u, et par suite les v, par une même constante). Soit P le point de coordonnées cartésiennes u_1, u_2, u_3 sur l'ellipsoïde E :

$$\Sigma k_{ij} u_i u_j = 1,$$

H est le carré de la distance de P à l'origine, R est le carré de la distance à l'origine du plan tangent en P. C'est en même temps que ces deux nombres sont minima; *leur minimum est le même :* le carré du demi-*petit axe*. Assujettissons P à se trouver dans un plan donné π passant par l'origine; le petit axe de l'ellipse section (E, π) et le petit axe du cylindre circonscrit à E suivant cette ellipse ont même maximum quand π varie, à savoir l'*axe moyen* de l'ellipsoïde.

4. Les problèmes du type de Sturm-Liouville ont donné les premiers exemples des faits essentiels que présente la théorie des équations de Fredholm à noyau symétrique. Nous allons nous borner à un de ces problèmes, où la corrélation précédente prendra une forme particulièrement simple.

α, β étant deux fonctions données, continues et positives, dans l'intervalle $x_0 \leqq x \leqq x_1$, m une constante réelle donnée (différente de 1), considérons les valeurs de la constante λ pour lesquelles l'équation différentielle

$$\left(\frac{y'}{\alpha}\right)' + \lambda\beta y = 0 \tag{4}$$

admet quelque solution non identiquement nulle satisfaisant au système de conditions aux limites

$$y_0 - m y_1 = 0,$$
$$\left(\frac{y'}{\alpha}\right)_1 - m\left(\frac{y'}{\alpha}\right)_0 = 0.$$

Étant donnée une fonction continue $f(x)$, il existe une fonction (continue pourvue de dérivées première et seconde continues) w, et une seule telle que

$$\left(\frac{w'}{\alpha}\right)' = f(x), \qquad w_0 - m w_1 = 0, \qquad \left(\frac{w'}{\alpha}\right)_1 - m\left(\frac{w'}{\alpha}\right)_0 = 0, \tag{5}$$

à savoir

$$w(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

où $G(x, \xi)$ représente une certaine fonction symétrique de x, ξ : en posant

$$\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\, dt = A(x),$$

$$G(x, \xi) = \frac{m A(\xi) + A(x)}{m - 1} - \left(\frac{m}{m - 1}\right)^2 A(x_1) \qquad \text{si} \quad x < \xi,$$

$$G(x, \xi) = \frac{m A(x) + A(\xi)}{m - 1} - \left(\frac{m}{m - 1}\right)^2 A(x_1) \qquad \text{si} \quad x > \xi.$$

Nous sommes donc amenés à l'équation intégrale

$$y(x) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi)\,\beta(\xi)\,y(\xi)\,d\xi,$$

c'est-à-dire en posant

$$y(x)\sqrt{\beta(x)} = \varphi(x),$$
$$-G(x, \xi)\sqrt{\beta(x)\beta(\xi)} = K(x, \xi),$$

l'équation (1).

Le système des fonctions fondamentales est complet : d'abord toute fonction continue à dérivées première et seconde continues, satisfaisant au système de conditions aux limites (5), peut, d'après la manière même dont nous avons introduit G, s'écrire sous la forme $\int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi) g(\xi) d\xi$, où g est continue, et par suite se développer en série uniformément convergente de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$; d'autre part, toute fonction continue peut être approchée en moyenne par des fonctions (à dérivées première et seconde continues) satisfaisant aux conditions (5).

Les valeurs singulières λ ne peuvent être que positives : on le voit aisément en multipliant les deux membres (4) par y et intégrant de x_0 à x_1. Toutes les conditions supposées au n° **2** sont donc réalisées (¹).

$u(x)$ étant une fonction continue quelconque, définissons w par l'équation

$$\sqrt{\beta(x)}\,w(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\,u(\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

on en déduit immédiatement

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{w'}{\alpha}\right)' = -\sqrt{\beta}\,u, \\ &w_0 - m w_1 = 0, \qquad \left(\frac{w'}{\alpha}\right)_1 - m\left(\frac{w'}{\alpha}\right)_0 = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Inversement le système (7) entraîne l'équation (6).

(¹) Deux valeurs singulières λ peuvent être égales; $\alpha \equiv \beta \equiv 1$, $m = -1$ donne un exemple où $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, ..., $\lambda_{2p-1} = \lambda_{2p}$, ...

Les rapports R et H s'écrivent ici

$$R = \frac{-\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{w'}{\alpha}\right)' w\, dx}{\int_{x_0}^{x_1} \beta w^2\, dx} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} \frac{w'^2}{\alpha}\, dx}{\int_{x_0}^{x_1} \beta w^2\, dx},$$

$$H = \frac{\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{w'}{\alpha}\right)'\right]^2 dx}{\int_{x_0}^{x_1} \frac{w'^2}{\alpha}\, dx}.$$

Soit donc w une fonction arbitraire à dérivées première et seconde continues satisfaisant à

$$\left|\begin{array}{l} w_0 - m w_1 = 0, \\ \left(\frac{w'}{\alpha}\right)_1 - m\left(\frac{w'}{\alpha}\right)_0 = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on astreint $\left(\frac{w'}{\alpha}\right)'$ à être orthogonale à $n-1$ fonctions arbitrairement données, la borne inférieure de R et celle de H ont, quand on fait varier maintenant ce système de $n-1$ fonctions, le même maximum λ_n.

Si l'on astreint w à être orthogonale à $n-1$ fonctions arbitrairement données, la borne inférieure de R et celle de H ont, quand on fait varier ce système de $n-1$ fonctions, le même maximum : encore λ_n (et si, par exemple, les $n-1$ fonctions sont $\sqrt{\beta}\varphi_1, \sqrt{\beta}\varphi_2, \ldots, \sqrt{\beta}\varphi_{n-1}$, cette borne inférieure est précisément égale à λ_n).

Remarquons d'ailleurs que l'on obtient encore le même résultat si c'est w' que l'on astreint à être orthogonale à $n-1$ fonctions. Supposons d'abord que ces $n-1$ fonctions soient les Φ_i définies par les conditions

$$\Phi'_i = \sqrt{\beta}\varphi_i, \qquad (\Phi_i)_1 - m(\Phi_i)_0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Comme

$$\int_{x_0}^{x_1} w'\Phi_i\, dx = (w\Phi_i)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} w\sqrt{\beta}\varphi_i\, dx = -\int_{x_0}^{x_1} w\sqrt{\beta}\varphi_i\, dx,$$

cela revient à supposer w orthogonale aux $\sqrt{\beta}\varphi_i$, et par suite la borne inférieure de R comme de H est ici λ_n. D'autre part, un système de $n-1$ fonctions étant donné à l'avance comme on le voudra, on peut toujours choisir les n constantes c non toutes nulles pour que

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\beta}}(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\ldots+c_n\varphi_n)\right]$$

leur soit orthogonale; pour la fonction

$$w=\frac{1}{\sqrt{\beta}}(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\ldots+c_n\varphi_n);$$

les rapports R et H sont visiblement au plus égaux à λ_n, il en est *a fortiori* de même pour leur borne inférieure.

Mais H ne fait intervenir w que par l'intermédiaire de sa dérivée w'; si l'on pose $\frac{w'}{\alpha}=r$, H s'écrit

$$\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\frac{r'^2}{\beta}\,dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\alpha r^2\,dx},$$

r satisfait à $r_1-mr_0=0$. Inversement d'ailleurs, si l'on part d'une fonction r (que nous supposerons pourvue de dérivée première continue) telle que $r_1-mr_0=0$, on pourra toujours trouver une fonction w et une seule telle que $\frac{w'}{\alpha}=r$ et que $w_0-mw_1=0$.

Le résultat obtenu en dernier lieu s'énonce :

Si la fonction r continue à dérivée continue, satisfaisant à la seule condition aux limites $r_1-mr_0=0$, est astreinte à être orthogonale à $n-1$ fonctions, la borne inférieure du rapport

$$\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\frac{r'^2}{\beta}\,dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\alpha r^2\,dx}$$

a, quand le système de ces $n-1$ fonctions varie, un maximum qui est λ_n.

Revenons au système de conditions qui a conduit aux nombres

$$o < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n \leqq \ldots,$$

à savoir

$$(8) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{w'}{\alpha}\right)' + \lambda\beta w = o, \\ w_0 - m w_1 = o, \qquad \left(\dfrac{w'}{\alpha}\right)_1 - m\left(\dfrac{w'}{\alpha}\right)_0 = o. \end{cases}$$

Si l'on pose $\dfrac{w'}{\alpha} = r$, on en tire

$$r' + \lambda\beta w = o;$$

substituons la valeur $w = -\dfrac{r'}{\lambda\beta}$ dans $\left(\dfrac{w'}{\alpha}\right) = r$: nous obtenons

$$\left(\frac{r'}{\beta}\right)' + \lambda\alpha r = o,$$

et les conditions initiales deviennent

$$\left(\frac{r'}{\beta}\right)_0 - m\left(\frac{r'}{\beta}\right)_1 = o, \qquad r_1 - m r_0 = o.$$

Les valeurs λ pour lesquelles (8) a quelque solution non identiquement nulle sont précisément celles pour lesquelles

$$(9) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{r'}{\beta}\right)' + \lambda\alpha r = o, \\ r_0 - \dfrac{1}{m} r_1 = o, \qquad \left(\dfrac{r'}{\beta}\right)_1 - \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{r'}{\beta}\right)_0 = o \end{cases}$$

a lui-même quelque solution non identiquement nulle; et réciproquement.

Par suite :

Si la fonction w, continue à dérivée continue, telle que $w_0 - m w_1 = o$, est astreinte à être orthogonale à $n-1$ fonctions données, la borne inférieure de

$$\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{w'^2}{\alpha}\,dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \beta r^2\,dx}$$

a pour maximum, quand le système des $n-1$ fonctions varie, *le nombre λ_n même qui intervient dans la question analogue où $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont échangées, et m changé en $\frac{1}{m}$.*

On pourrait donner à l'énoncé obtenu une forme concrète applicable par exemple au problème des cordes vibrantes; α serait pour l'une des deux cordes (de même longueur) envisagées, la densité, β l'inverse du produit de la section par le module d'élasticité.

L'échange de ces fonctions, avec le changement indiqué des conditions aux limites correspondantes [1], conduirait, pour les deux cordes envisagées, à *la même suite de fréquences fondamentales.*

5. Il vient tout naturellement à l'esprit d'employer la « transformation involutive » de Friedrichs [2] pour montrer directement le lien entre les deux problèmes de calcul des variations envisagés.

Supposons que les deux constantes a, b soient telles que l'intégrale

$$I = a\int_{x_0}^{x_1} \frac{W^2}{\alpha} + b\int_{x_0}^{x_1} \beta w^2\, dx$$

soit *stationnaire* dans le champ des fonctions continues w, W satisfaisant aux conditions

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{dw}{dx} - W \equiv 0, \\ w_0 - m w_1 = 0. \end{cases}$$

La considération des multiplicateurs de Lagrange montre que, s'il en est ainsi, l'intégrale

$$I_1 = a\int_{x_0}^{x_1} \frac{W^2}{\alpha}\, dx + b\int_{x_0}^{x_1} \beta w^2\, dx + \int_{x_0}^{x_1} \sigma\left(\frac{dw}{dx} - W\right) dx + \mu(w_0 - m w_1)$$

est stationnaire *quand on laisse entièrement variables les trois fonctions*

---

(1) Si, par exemple, $m = 0$, la première corde sera fixée à l'extrémité x_0, libre à l'extrémité x_1; et ce sera l'inverse pour la seconde.

(2) Voir note (1) au début du présent travail, et note (2) à la fin.

(*continues*) w, W, σ *et la constante* μ. Or

$$\delta \mathrm{I}_1 = \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{2a\mathrm{W}}{\alpha} - \sigma\right)\delta\mathrm{W} + \left(2b\beta w - \frac{d\sigma}{dx}\right)\delta w + \left(\frac{dw}{dx} - \mathrm{W}\right)\delta\sigma\right] dx$$
$$+ (-\sigma_0 + \mu)\,\delta w_0 + (\sigma_1 - \mu m)\,\delta w_1 + (w_0 - m w_1)\,\delta\mu.$$

D'où les six conditions

$$\frac{dw}{dx} - \mathrm{W} \equiv 0, \qquad w_0 - m w_1 = 0, \qquad \frac{2a\mathrm{W}}{\alpha} - \sigma \equiv 0,$$
$$2b\beta w - \frac{d\sigma}{dx} \equiv 0, \qquad -\sigma_0 + \mu = 0, \qquad \sigma_1 - \mu m = 0$$

$\Big[$dont une des conséquences est d'ailleurs $\left(\frac{w'}{\alpha}\right)_1 - m\left(\frac{w'}{\alpha}\right)_0 = 0$ et une autre $\left(\frac{w'}{\alpha}\right)' - \frac{b}{a}\beta w \equiv 0\Big]$.

Si maintenant on restreint le champ *en imposant a priori certaines de ces six conditions, le caractère stationnaire persiste.*

Dans le champ défini par les deux premières égalités de la première ligne, I_1 est stationnaire ; et ce fait n'est autre chose que l'expression de l'hypothèse (relative à I) d'où nous sommes partis tout d'abord.

Considérons maintenant I_1 *dans le champ défini par les quatre autres égalités*, et voyons comment se présente le caractère stationnaire lorsqu'on exprime I_1 à l'aide des dérivées de l'expression

$$a\frac{\mathrm{W}^2}{\alpha} + b\beta w^2,$$

à savoir

$$2a\frac{\mathrm{W}}{\alpha} = s,$$
$$2b\beta w = \mathrm{S},$$

$$\mathrm{I}_1 \equiv -\frac{1}{4b}\int \frac{\mathrm{S}^2}{\beta}dx - \frac{1}{4a}\int \alpha s^2\,dx - \int\left(\frac{d\sigma}{dx} - \mathrm{S}\right)\frac{\mathrm{S}}{2b\beta}dx - \int(\sigma - s)\frac{\alpha s}{2a}dx$$
$$+ \left(\frac{\mathrm{S}}{2b\beta}\right)_0(-\sigma_0 + \mu) + \left(\frac{\mathrm{S}}{2b\beta}\right)_1(\sigma_1 - \mu m),$$

se réduit, dans le champ

$$(11) \qquad s - \sigma \equiv 0, \qquad \mathrm{S} - \frac{d\sigma}{dx} \equiv 0, \qquad -\sigma_0 + \mu = 0, \qquad \sigma_1 - \mu m = 0,$$

à

$$\mathrm{J} = -\frac{1}{4b}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{S}^2}{\beta}dx - \frac{1}{4a}\int_{x_0}^{x_1}\alpha s^2\,dx,$$

σ et μ ont disparu; s, S sont liées simplement par les relations obtenues en éliminant $\sigma(x)$ et μ entre les quatre équations (11), autrement dit

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{ds}{dx} - S \equiv 0, \\ s_1 - ms_0 = 0. \end{array}\right.$$

Nous sommes donc amenés à une question de la forme même de celle d'où nous sommes partis, mais où $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ ont été échangés, en même temps que m a été changé en $\frac{1}{m}\cdot$

D'ailleurs $\dfrac{-\frac{1}{4b}}{-\frac{1}{4a}} = \frac{a}{b}\cdot$ Et d'autre part les valeurs stationnaires de I, comme celles de J, sont nulles, pour une raison d'homogénéité évidente [1].

On pourra dire :

Les *valeurs stationnaires* de

$$\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\alpha}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \beta w^2\, dx}, \qquad \text{où} \quad \frac{w_0}{w_1} = m,$$

sont *les mêmes* que celles du rapport

$$\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\beta}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \alpha s^2\, dx}, \qquad \text{où} \quad \frac{s_0}{s_1} = \frac{1}{m},$$

à savoir les valeurs possibles du rapport $-\frac{b}{a}\cdot$

---

(1) Quand on multiplie par une même constante C des fonctions w, W satisfaisant aux conditions (10), on obtient encore des fonctions satisfaisant à ces conditions, et la valeur de I_1 est multipliée par C.

On peut remarquer que si dans δI_1 on remplace $\delta W, \ldots, \delta\mu$ respectivement par $W_1, \ldots, \mu$ on obtient identiquement $2 I_1$. Ce fait correspond à celui qu'exprime, pour les fonctions homogènes, l' « identité d'Euler ».

C'est, démontré directement à l'aide de la transformation de Friedrichs [1], un des résultats auxquels nous avait conduit l'étude comparée des rapports de Dirichlet-Rayleigh et de Gauss-Hilbert, R et H.

---

[1] On vérifie aisément que les formules employées dans la transformation de Friedrichs définissent une de ces transformations, bien connues en Mécanique, qui *conservent* la forme canonique des équations du calcul des variations. Utilisons les notations de Caratheodory (qui, dans ces dernières années, a élégamment appliqué de telles transformations à l'optique géométrique). Passons d'une intégrale $\int L(t, x, \dot{x})\,dt$ à une autre $\int L'(t, x', \dot{x}')\,dt$ par les équations $L_x = \dot{x}'$, $L_{\dot{x}} = x'$, $L'(t, x', \dot{x}') = L - x'\dot{x} - \dot{x}'x$. La différence

$$(L - \dot{x}L_{\dot{x}})\,dt + L_{\dot{x}}\,dx - \{(L' - \dot{x}'L'_{\dot{x}'})\,dt + L'_{\dot{x}'}\,dx'\}$$

est une différentielle totale exacte $d(xx')$.