JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULES HAAG

Sur certains problèmes de la théorie des fonctions harmoniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 163-170.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__163_0>

Sur certains problèmes de la théorie des fonctions harmoniques;

PAR J. HAAG.

En étudiant une question d'élasticité (1), j'ai été conduit à quelques problèmes concernant la théorie des fonctions harmoniques. Ces problèmes sont analogues à certaines généralisations du problème de Neumann, récemment étudiées par divers auteurs, en particulier MM. G. Giraud et G. Bouligand (2). Il me paraît intéressant d'exposer rapidement les résultats que j'ai obtenus dans cette voie.

1. PROBLÈME I. — *Étant donné un contour fermé* Γ, *ne rencontrant pas* Oy, *et une fonction* F, *continue sur* Γ, *déterminer une fonction harmonique* P, *continue dans* Γ *et satisfaisant, sur* Γ, *à la relation*

$$x\frac{\partial P}{\partial x}+tP=F \qquad (t=\text{const.}). \tag{1}$$

De même que P, la fonction $\frac{\partial P}{\partial x}$ est harmonique et continue dans et sur Γ. On peut donc la représenter par un potentiel de double couche

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\int_\Gamma \frac{\cos\varphi}{r}\,\mu(s)\,ds. \tag{2}$$

(1) *Cf.* J. HAAG, *Sur l'hypothèse des fibres* (*Comptes rendus*, 198, 1934, p. 1468, et *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. LII, fasc. 4).

(2) *Cf.* G. BOULIGAND, G. GIRAUD et P. DELENS, *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel.*

On en déduit, en intégrant sous le signe $\int$,

$$(3) \qquad P = -\int_\Gamma (\log r.\sin\alpha + \beta\cos\alpha)\,\mu(s)\,ds + Ay + B.$$

Dans ces formules, A et B sont des constantes arbitraires; α est l'angle polaire de la demi-tangente positive au point P de Γ, qui a pour abscisse curviligne s; r et β sont la longueur et l'angle polaire du vecteur qui a pour extrémité P et pour origine le point $M(x, y)$ arbitrairement choisi à l'intérieur de Γ; enfin, φ est l'angle de PM avec la demi-normale positive, soit

$$\varphi = \alpha - \beta - \frac{\pi}{2}.$$

Si le point M tend vers le point M_s de Γ, on sait (¹) que $\frac{\partial P}{\partial x}$ a pour limite

$$\pi\mu(s) + \int_\Gamma \frac{\cos\varphi}{r}\,\mu(s')\,ds'.$$

Quant à l'intégrale de la formule (3), elle est continue (²). On a donc, sur Γ,

$$\pi\mu(s) + \int_\Gamma \frac{\cos\varphi}{r}\,\mu(s')\,ds' - \frac{l}{x}\int_\Gamma (\log r.\sin\alpha + \beta\cos\alpha)\,\mu(s')\,ds' + l\,\frac{Ay + B}{x} = \frac{F}{x},$$

soit

$$(4) \qquad \pi\mu(s) = \int_0^L \left[\frac{l}{x}(\log r.\sin\alpha + \beta\cos\alpha) - \frac{\cos\varphi}{r}\right]\mu(s')\,ds' + \frac{F}{x} - l\,\frac{Ay + B}{x},$$

en appelant L la longueur de Γ.

Posons

$$K(s, s') = \frac{1}{\pi}\left[\frac{l}{x}(\log r.\sin\alpha + \beta\cos\alpha) - \frac{\cos\varphi}{r}\right]$$

et considérons l'équation de Fredholm

$$(5) \qquad \mu(s) = \int_0^L K(s, s')\,\mu(s')\,ds' + \frac{f(s)}{\pi}.$$

(¹) *Cf.* Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. III, p. 178, 2ᵉ édition.
(²) Cf. *loc. cit.*, p. 176.

Admettons que cette équation ait une solution unique et posons

$$(6) \qquad G(f) = -\int_0^L (\log r.\sin\alpha + \beta\cos\alpha)\,\mu(s)\,ds.$$

En comparant (4) et (5), on voit que la formule (3) nous donne la *solution générale du problème I* sous la forme

$$(7) \qquad P = G\left(\frac{F}{x}\right) + A\left[y - tG\left(\frac{y}{x}\right)\right] + B\left[1 - tG\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

où A et B désignent *deux constantes arbitraires*.

2. Revenons à l'équation (5). Le noyau $K(s, s')$ est de la forme $K_1 + K_2$, en posant

$$K_1 = -\frac{\cos\varphi}{\pi r}, \qquad K_2 = \frac{t}{\pi x}(\log r.\sin\alpha + \beta\cos\alpha).$$

J'ai montré (¹) que la résolution de l'équation (5) se ramène à la résolution de l'équation

$$(8) \qquad \mu(s) = t\int_0^L K'(s, s')\,\mu(s')\,ds' + f_1(s),$$

en appelant $f_1(s)$ et $K'(s, s')$ les solutions de l'équation

$$(9) \qquad \varphi(s) = -\frac{1}{\pi}\int_0^L \frac{\cos\varphi}{r}\varphi(s')\,ds' + \frac{\lambda(s)}{\pi},$$

qui correspondent respectivement à

$$\lambda(s) = f(s)$$

et

$$\lambda(s) = \frac{\log r.\sin\alpha + \beta\cos\alpha}{x}.$$

L'équation (9) est l'équation de Fredholm qui détermine la fonction harmonique prenant la valeur $\lambda(s)$ sur Γ, quand on applique la *méthode de Neumann*; on sait dans quelles conditions elle admet une solution.

(¹) *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 520; *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. LVIII, juillet 1934.

Le noyau auxiliaire $K'(s, s')$ est entièrement déterminé par la seule connaissance du contour Γ. Ce noyau étant obtenu, on sait que l'équation (8) admet une solution unique si le déterminant de Fredholm n'est pas nul, ce qui a certainement lieu *lorsque t est suffisamment petit.*

3. On peut obtenir une limite supérieure des valeurs de t remplissant cette condition, en procédant de la manière suivante.

Posons

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n t^n. \tag{10}$$

En portant dans (5) et identifiant, on a

$$\pi \mu_0(s) = -\int_0^L \frac{\cos\varphi}{r} \mu_0(s') \, ds' + f(s),$$

$$\pi \mu_{n+1}(s) = -\int_0^L \frac{\cos\varphi}{r} \mu_{n+1}(s') \, ds' + f_n(s),$$

en posant

$$f_n(s) = \frac{1}{x} \int_0^L (\log r . \sin\alpha + \beta \cos\alpha) \mu_n(s') \, ds'.$$

Les fonctions μ_n s'obtiennent donc par des résolutions successives du problème de Dirichlet au moyen de la méthode de Neumann. On sait ([1]) que si, dans l'équation (9), on suppose $|\lambda(s)| < M$, on a

$$|\varphi(s)| < kM,$$

k désignant un facteur constant positif, dépendant uniquement du contour Γ ([2]). Appelons M_n une limite supérieure du module de $\mu_n(s)$, A une limite supérieure de l'intégrale

$$\int_0^L |\log r . \sin\alpha + \beta \cos\alpha| \, ds'$$

et a le minimum de $|x|$. On a

$$|f_n(s)| < M_n \frac{A}{a};$$

([1]) *Cf.* Goursat, *loc. cit.*, p. 203.

([2]) Avec les notations de M. Goursat, on a $k = \dfrac{2-\rho}{2\pi(1-\rho)}$.

d'où

$$M_{n+1} < k\frac{A}{a}M_n.$$

Il s'ensuit que *la série* (10) *est certainement convergente pour*

$$|t| < \frac{a}{kA}.$$

4. Revenons maintenant à la formule (6). Soit $\Gamma(s, s')$ le noyau résolvant de l'équation (5). On a

$$\pi\mu(s) = f(s) + \int_0^L \Gamma(s, s') f(s')\,ds'.$$

Portons dans (6); il vient, en intervertissant s et s' dans l'intégrale double,

$$(11) \qquad -G(f) = \int_0^L \Delta(x, y, s) f(s)\,ds,$$

où l'on a posé

$$(12) \quad \pi\Delta(x, y, s) = \log r.\sin\alpha + \beta\cos\alpha + \int_0^L \Gamma(s', s)\,(\log r'.\sin\alpha' + \beta'\cos\alpha')\,ds'.$$

La fonction Δ est la solution de l'équation de Fredholm associée à l'équation (5), quand on y remplace $f(s)$ par $\log r.\sin\alpha + \beta\cos\alpha$. C'est une *fonction harmonique et continue dans* Γ, *parfaitement déterminée quand on se donne le contour* Γ.

Cette fonction étant obtenue, *la fonction* $G(f)$ *est donnée*, d'après (11), *par une simple quadrature*.

5. Il existe des *solutions particulières très simples du problème I*.

Par exemple, on peut supposer que Γ *est une ellipse et* P *un polynome harmonique du second degré*. La fonction F est alors un polynome du second degré, contenant une constante arbitraire et dont la formation est évidente.

Voici une *autre solution*, pour laquelle *nous allons supposer* $F = 0$.

Supposons t positif. Puis, choisissons trois nombres x_1, x_2, x_3, simplement assujettis à vérifier les inégalités suivantes :

$$x_3 > 0,\ x_3 > x_2 > x_3\frac{t(t+3)}{t^2+3t+6},\ x_2 > x_1 > (x_2 + x_3)\frac{t(t+3)}{2(t^2+3t+3)}.$$

Prenons ensuite

$$P = \frac{x^3 - 3xy^2}{t+3} + \frac{s_1}{t+2}(y^2 - x^2) + \frac{s_2}{t+1}x - \frac{s_3}{t},$$

où s_1, s_2, s_3 représentent les fonctions symétriques élémentaires de x_1, x_2, x_3.

L'équation (1) devient

$$y^2 = \frac{t+3}{3(t+1)} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{x-z}, \tag{13}$$

en posant

$$z = \frac{t(t+3)}{3(t+1)(t+2)} s_1.$$

En vertu des inégalités ci-dessus, on a

$$z < x_1 < x_2 < x_3.$$

On en conclut que la cubique représentée par l'équation (13) possède une boucle fermée, comprise entre les droites $x = x_1$ et $x = x_2$. *C'est cette boucle que l'on prendra pour contour* Γ.

6. Problème II. — *Étant données deux fonctions continues* $F_1(x, y)$ *et* $F_2(x, y)$, *déterminer un contour* Γ *n'entourant pas l'origine et deux fonctions harmoniques conjuguées* P *et* Q, *continues dans* Γ *et satisfaisant, sur* Γ, *aux deux équations*

$$kx\frac{\partial P}{\partial x} + P = F_1, \qquad ky\frac{\partial P}{\partial x} + Q = F_2 \qquad (k \text{ const.}). \tag{14}$$

Considérons les fonctions

$$G = \frac{yP - xQ}{x^2 + y^2}, \qquad H = \frac{xP + yQ}{x^2 + y^2}. \tag{15}$$

On a

$$G + iH = i\frac{Z}{z},$$

en posant

$$z = x + iy, \qquad Z = P + iQ.$$

Donc, G et H sont deux fonctions harmoniques conjuguées. Or, sur Γ, on a

$$G = \frac{yF_1 - xF_2}{x^2+y^2}. \tag{16}$$

Si le contour Γ *est donné, la fonction* G *est parfaitement déterminée,* d'après le principe de Dirichlet. Connaissant G, *on en déduit* H, *à une constante additive près.* Ayant G et H, les formules (15) donnent

$$P = yG + xH, \qquad Q = -xG + yH. \tag{17}$$

D'autre part, on doit avoir, sur Γ,

$$H + k\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{xF_1 + yF_2}{x^2+y^2},$$

soit

$$H(1+k) + k\left(x\frac{\partial H}{\partial x} + y\frac{\partial H}{\partial y}\right) = \frac{xF_1 + yF_2}{x^2+y^2}. \tag{18}$$

Si l'on tient compte de la constante additive implicitement contenue dans H, on voit que *la condition nécessaire et suffisante pour que le problème II soit possible, pour un contour* Γ *donné, est que les deux membres de* (18) *diffèrent d'une constante sur ce contour.*

Cette condition n'est évidemment pas remplie si le contour Γ et les fonctions F_1 et F_2 sont choisis au hasard.

Dans le *cas particulier où les fonctions* F_1 *et* F_2 *sont nulles,* on a $G = H = 0$; donc, *les fonctions* P *et* Q *sont nulles.*

Si les fonctions F_1 *et* F_2 *sont harmoniques conjuguées,* il en est de même des seconds membres de (16) et (18). Dans ce cas, en vertu du principe de Dirichlet, les égalités (16) et (18) deviennent des identités dans tout le plan, quel que soit le contour Γ. On en conclut que l'expression $x\frac{\partial H}{\partial x} + y\frac{\partial H}{\partial y} + H$ doit se réduire à une constante. Un calcul facile montre ensuite que l'on doit avoir

$$H = \frac{Ax + By}{x^2+y^2} + C \qquad (A, B, C = \text{const.});$$

d'où

$$G = \frac{Ay - Bx}{x^2+y^2} + C' \qquad (C' = \text{const.}).$$

Les formules (17) montrent alors que P *et* Q *sont des fonctions* *linéaires*. Les égalités (14) étant maintenant des identités, F_1 *et* F_2 *sont aussi des fonctions linéaires.*

7. Problème III. — *Étant donnés trois polynomes du second degré* F_1, F_2, F_3, *déterminer un contour* Γ *et deux fonctions harmoniques conjuguées* P *et* Q *tels que l'on ait, sur* Γ,

$$kx\frac{\partial P}{\partial x}+P=F_1,\qquad ky\frac{\partial P}{\partial x}+Q=F_2,\qquad \frac{\partial P}{\partial x}=F_3. \tag{19}$$

Si le contour Γ est donné, ces trois relations déterminent séparément P, Q et $\frac{\partial P}{\partial x}$; mais, les deux premières fonctions ne sont pas en général conjuguées et la troisième n'est pas la dérivée partielle de la première par rapport à x.

On peut trouver des solutions particulières, en prenant pour Γ une *ellipse* et pour P et Q des polynomes du second degré. Il est facile d'écrire l'expression générale correspondante des polynomes F_1, F_2, F_3.

8. Problème IV. — *Étant donnés deux polynomes du second degré* F_1 *et* F_2, *déterminer* Γ, P *et* Q *de telle manière que l'on ait, sur* Γ,

$$kx\frac{\partial P}{\partial x}+P=F_1,\qquad \frac{\partial P}{\partial x}=F_2. \tag{20}$$

Comme précédemment, si l'on se donne Γ, ces deux relations déterminent séparément P et $\frac{\partial P}{\partial x}$; mais la deuxième fonction n'est pas, en général, la dérivée de la première par rapport à x.

On peut évidemment trouver une infinité de solutions pour lesquelles Γ est une *ellipse* et P un polynome harmonique du second degré. On pourrait aussi prendre, pour Γ, la boucle de la cubique du n° 5, avec $F_1 = 0$.