JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Surfaces réglées osculatrices à une surface le long d'une courbe

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 151-162.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__151_0>

Surfaces réglées osculatrices à une surface le long d'une courbe;

Par Bertrand GAMBIER

(Lille).

---

1. M. Goursat a écrit une série de beaux Mémoires géométriques où l'intuition se substitue avantageusement au calcul. En reconnaissance pour l'influence que ses travaux ont eu sur les miens, je dédie ce Mémoire à mon professeur, M. Goursat.

Sur une surface quelconque S, traçons au hasard une courbe gauche Γ; en chaque point M de Γ, traçons les deux tangentes asymptotiques de S, MA et MA'; chacune engendre une surface R ou R', réglée; R *et* R' *sont osculatrices entre elles, ainsi qu'à* S, *tout le long de* Γ; je rappelle, pour éviter toute confusion sur le sens du mot « *osculatrice* », que deux surfaces S et S_1 sont osculatrices en un point M, si deux courbes Γ et Γ_1 *quelconques* tracées sur S et S_1 respectivement, ayant même tangente en M et même plan osculateur en M, ont le même centre de courbure; il est nécessaire et suffisant que S et S_1 soient, d'abord tangentes en M, puis qu'elles y aient même indicatrice; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 étant les coordonnées de M, puis les valeurs des dérivées partielles pour $x = x_0$, $y = y_0$ de la cote z d'un point pris sur S ou sur S_1, les valeurs de z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 sont les mêmes pour $x = x_0$, $x = y_0$ aussi bien sur S que sur S_1; le contact simple entraîne trois conditions, l'osculation en un point six conditions.

Quand deux surfaces sont tangentes en un point M, le contact étant simple, les deux indicatrices au point M se coupent en quatre points répartis sur deux sécantes, MT, MT', issues de M; MT et MT' sont les tangentes au point double M de l'intersection. Si les deux surfaces se raccordent (avec contact simple) le long d'une courbe gauche Γ, cette courbe compte dans l'intersection pour deux lignes confondues, de sorte qu'en chaque point M de Γ les deux indicatrices sont deux coniques concentriques bitangentes aux extrémités d'un diamètre commun.

Ces préliminaires rappelés, considérons notre surface S du début, la courbe Γ et la surface R, lieu de la tangente asymptotique MA suivie par continuité en faisant varier M sur Γ; en M, les indicatrices relatives à S et R sont bitangentes aux extrémités du diamètre porté par la tangente MT à Γ, et de plus elles ont une asymptote commune MA : *donc elles coïncident*, S *et* R *sont osculatrices tout le long de* Γ; pour la même raison S et R′ sont osculatrices, de sorte que, finalement, S, R, R′ *sont osculatrices tout du long de* Γ *et que* Γ *compte dans l'intersection de deux quelconques de ces trois surfaces pour trois lignes confondues*.

Nous montrerons bientôt qu'*il existe un faisceau de quadriques* Q *se raccordant tout le long de* MA *à* R, *et tout le long de* MA′ *à* R′.

Je n'insiste pas sur les cas particuliers tels que le suivant : si Γ est une asymptotique de S, MA′ étant la tangente à Γ, la surface R est encore osculatrice à S tout le long de Γ, mais R′ se réduit à la développable des tangentes asymptotiques.

Un autre cas particulier est celui où S est réglée : R coïncide avec S; si même Γ est une génératrice de S, R′ est la quadrique osculatrice à R tout le long de Γ; quant à R, elle se réduit à la génératrice Γ.

2. Voici maintenant un problème un peu moins simple qu'il ne le paraît à première vue. On donne, dans un plan P, deux droites G, G′ se coupant au point O, puis le long de G une correspondance homographique point-plan (c'est-à-dire qu'à chaque point M de G correspond homographiquement un plan passant par G), cette correspondance étant telle qu'à O correspond le plan P; on suppose, de même, donnée sur G′, une correspondance homographique, O ayant encore pour homologue le plan P : *à quelle condition existe-t-il une quadrique* Q *admettant* G, G′ *pour génératrices*, *admettant en chaque point* M (*ou* M′) *de* G (*ou* G′) *comme plan tangent celui qui a été attaché à* M (*ou* M′) *dans la correspondance homographique en jeu?*

Une quadrique inconnue dépend de neuf cofficients non homogènes; les conditions imposées s'expriment par neuf relations linéaires (soit entre les coefficients de l'équation ponctuelle, soit entre ceux de l'équation tangentielle), comme on le voit en prenant sur G les points O, M, M_1; sur G′ les points M′, M'_1.

Si, *sans précaution* dans le choix des deux correspondances, il y avait une solution véritable, cette solution serait unique; or, si Q [1] est une quadrique effective répondant aux conditions, et $P = 0$ l'équation du plan G, G′, *toutes* les quadriques du faisceau $Q + \lambda P^2 = 0$ répondent aux conditions, et il n'existe que celles-là; *donc, dans le cas général, il n'y aura que la quadrique dégénérée* $P^2 = 0$; *pour obtenir une véritable quadrique, il faut donc une condition exactement, réduisant les neuf équations à huit seulement, et alors il existe un faisceau de quadriques (faisceau tangentiel aussi bien que ponctuel).* Il s'agit d'autre part de présenter cette condition sous forme *projective;* M. Vincensini m'a suggéré la méthode suivante :

Prenons dans le plan P un point μ *quelconque* (donc situé ni sur G ni sur G′) et menons par μ une sécante arbitraire α MM′ coupant G en M, G′ en M′; soit Q une quadrique effective, supposée existante, répondant aux conditions; les plans tangents en M et M′ à Q se coupent suivant une droite Om, qui est conjuguée de μ MM′ par rapport à Q; donc Om, décrit le plan Π polaire de μ vis-à-vis de Q; ce plan coupe P suivant la polaire Π de μ vis-à-vis des deux droites G, G′. *Nous savons* a priori *qu'il existe une condition et une seule, nécessaire et suffisante;* donc, peu importe le procédé par lequel on arrive à cette condition (sauf qualités de concision, précision, élégance, etc.). Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

On choisit dans le plan G, G′ *un point* μ *arbitraire; par la polaire* ε *de* μ *vis-à-vis du système* G, G′, *on fait passer un plan* Π *arbitraire; on*

(1) On sait *a priori* qu'il existe effectivement des cas où cette quadrique véritable existe; il suffit en effet de donner *a priori* une quadrique Q, de choisir sur elle deux génératrices G, G′ de système opposé, d'où résultent les correspondances homographiques (point-plan) sur G et G′.

donne arbitrairement la correspondance point-plan homographique le long de G, *en donnant par exemple le plan* G, G′, *qui correspond à* O, *puis les plans* P_1, P_2, *qui correspondent à deux points* M_1, M_2, *de* G; *la droite* μM_1 *perce* G′ *en* M'_1; *on fait correspondre à* M'_1 *le plan passant par* G′ *et la droite commune à* Π *et* P_1; *mêmes opérations pour* μM_2; *on a ainsi défini la correspondance homographique* (*point-plan*) *relative à* G′ *et associée à la correspondance analogue relative à* G.

Ce qui précède prouve que si la vérification, faite pour *un* point μ du plan (G, G′) réussit, elle réussit aussi pour *tous* les autres points du plan G, G′.

3. Nous sommes maintenant en mesure de répondre à la question soulevée en fin du paragraphe **1** :

Sur une surface S on a choisi une courbe gauche Γ arbitraire et de chaque point M de Γ on a mené les deux tangentes asymptotiques MA, MA′ qui engendrent deux surfaces réglées R, R′, osculatrices entre elles ainsi qu'à S, tout le long de Γ; *il s'agit de montrer qu'il existe une quadrique* Q *se raccordant à* R *le long de* MA *et à* R′ *le long de* MA′ (en réalité il existe même ∞^1 quadriques Q; nous en choisirons *une* pour chaque point M).

On remarquera que, la proposition établie, *l'enveloppe de la quadrique* Q *quand* M *décrit* Γ *est constituée : 1° par la surface réglée* R; *2° par la surface réglée* R′; *3° par une surface nouvelle* B *lieu de la conique* C *complétant la caractéristique de* Q. Nous pouvons même remarquer que la conique C coupe G en M_1, G′ en M'_1 (G est la droite MA et G′ la droite MA′); le lieu du point M_1, quand A décrit Γ, est une courbe Γ_1, tracée sur R et B simultanément; la quadrique Q a un contact *simple* avec R en tous les points de G, sauf en M et M_1 où elle est *osculatrice* à R et, de même, elle a un contact *simple* avec B tout le long de C, sauf aux points M_1 et M'_1 où elle est *osculatrice* à B; de la sorte on voit qu'il y a *osculation entre* B *et* R *tout le long de* Γ_1 et, pour la même raison, *osculation entre* B *et* R′ *tout le long de la courbe analogue* Γ'_1 *lieu de* M'_1.

Passons maintenant à la démonstration; nous n'avons pas besoin de la surface S, mais simplement de la courbe Γ et de la surface R; tout le long de Γ, la tangente asymptotique de R, autre que la génératrice, engendre R'. Nous prenons donc comme variable indépendante s l'arc de Γ; nous appelons (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') les cosinus directeurs de la tangente MT, de la normale principale MN, de la binormale MB en M à Γ, puis (u, v, w) un système de paramètres directeurs de la droite G issue de M, génératrice de R paramètres calculés dans le trièdre M (TNB). Un point de R a donc des coordonnées, fonctions de s et d'un nouveau paramètre ρ.

$$(1)\qquad \begin{cases} X = x + \rho(au + a'v + a''w), \\ Y = y + \rho(bu + b'v + b''w), \quad Z = z + \rho(\ldots). \end{cases}$$

On calcule les paramètres directeurs de la normale au point (X, Y, Z) à la surface R par les mineurs du tableau

$$(2)\qquad \left\| \begin{matrix} a + \rho\left[\dfrac{a'}{R}u - \left(\dfrac{a}{R} + \dfrac{a''}{T}\right)v + \dfrac{a'}{T}w + a\dfrac{du}{ds} + a'\dfrac{dv}{ds} + a''\dfrac{dw}{ds}\right], & \cdots \\ au + a'v + a''w, & \cdots \end{matrix} \right\|$$

dont les deux lignes donnent $\dfrac{\partial X}{\partial s}, \dfrac{\partial X}{\partial \rho}, \cdots$; pour $\rho = 0$ on trouve évidemment

$$(3)\qquad a''v - a'w, \qquad b''v - b'w, \qquad c''v - c'w.$$

Nous formons maintenant l'équation des directions asymptotiques en un point de R, en multipliant les mineurs du tableau (2) d'abord par $\dfrac{\partial^2 X}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 Y}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 Z}{\partial s^2}$, puis $\dfrac{\partial^2 X}{\partial s\,\partial \rho}, \dfrac{\partial^2 Y}{\partial s\,\partial \rho}, \dfrac{\partial^2 Z}{\partial s\,\partial \rho}$, et ajoutant à chaque fois; cela revient d'ailleurs à dériver les lignes de (2); nous nous bornons aux dérivées pour $\rho = 0$, de sorte que les dérivées $\dfrac{\partial^2 X}{\partial s^2}, \ldots, \dfrac{\partial^2 X}{\partial s\,\partial \rho}, \ldots$ deviennent simplement, pour $\dfrac{\partial^2 X}{\partial s^2}, \ldots,$

$$(4)\qquad \frac{a'}{R}, \quad \frac{b'}{R}, \quad \frac{c'}{R},$$

puis, pour $\dfrac{\partial^2 X}{\partial s\,\partial \rho}$,

$$(5)\qquad \frac{a'}{R}u - \left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right)v + \frac{a'}{T}w + a\frac{du}{ds} + a'\frac{dv}{ds} + a''\frac{dw}{ds}, \quad \ldots.$$

Nous avons donc pour équation, toujours en M pour $\rho = 0$, $D\,ds^2 + 2D'\,ds\,d\rho = 0$, où D et D' sont les produits de la ligne (3) par la ligne (4) ou la ligne (5); cela donne, en supprimant le facteur $ds = 0$ qui donne G, le résultat

$$-w\frac{ds}{R} + 2\left[v\left(\frac{dw}{ds} - \frac{v}{T}\right) - w\left(\frac{dv}{ds} + \frac{u}{R} + \frac{w}{T}\right)\right]d\rho = 0,$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad ds = \frac{2R}{w}\left[v\frac{dw}{ds} - w\frac{dv}{ds} - \frac{uw}{R} - \frac{v^2 + w^2}{T}\right]d\rho.$$

Comme paramètres directeurs de la tangente asympotique autre que MG, c'est-à-dire de la droite appelée précédemment MG′ qui doit engendrer R′, on trouve $\frac{\partial X}{\partial s}ds + \frac{\partial X}{\partial \rho}d\rho$, ..., nombres calculés pour $\rho = 0$, le quotient $ds : d\rho$ étant donné par (6); *nous n'avons besoin d'ailleurs que des paramètres directeurs relatifs au trièdre* M(TNB), de sorte qu'il suffit de prendre les coefficients de a, a', a'' dans

$$\frac{\partial X}{\partial s}\cdot\frac{ds}{d\rho} + \frac{\partial X}{\partial \rho};$$

on trouve ainsi

$$(7)\qquad \frac{2R}{w}\left(v\frac{dw}{ds} - w\frac{dv}{ds} - \frac{v^2 + w^2}{T}\right) - u,\ v,\ w.$$

Cette forme montre clairement l'avantage de supposer $v^2 + w^2 = 1$, chose toujours possible en raison de l'homogénéité, en excluant toutefois le cas où le plan MTG′ serait isotrope; je pose donc

$$(8)\qquad v = \cos\omega,\qquad w = \sin\omega,$$

où ω est une fonction de s et nous avons pour paramètres directeurs de MG et MG′

$$(9)\qquad \begin{cases} (\mathrm{MG}) & u & \cos\omega & \sin\omega; \\ (\mathrm{MG}') & \dfrac{2R}{\sin\omega}\left(\dfrac{d\omega}{ds} - \dfrac{1}{T}\right) - u & \cos\omega & \sin\omega. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(10)\qquad \begin{cases} u + u_1 = \dfrac{2R}{\sin\omega}\left(\dfrac{d\omega}{ds} - \dfrac{1}{T}\right), \\ u = \dfrac{R}{\sin\omega}\left(\dfrac{d\omega}{ds} - \dfrac{1}{T}\right) + h(s), \\ u_1 = \dfrac{R}{\sin\omega}\left(\dfrac{d\omega}{ds} - \dfrac{1}{T}\right) - h(s), \end{cases}$$

où ω, h sont deux fonctions arbitraires de s, on voit que la relation $u+u_1=\frac{2R}{\sin\omega}\left(\frac{d\omega}{ds}-\frac{1}{T}\right)$ est *symétrique* en u et u_1, de sorte que, *si la droite de paramètres relatifs* (u, $\cos\omega$ $\sin\omega$) *est la génératrice* MG *et* MG′(u_1, $\cos\omega$, $\sin\omega$) *la direction asymptotique de la surface* R *lieu de* MG, *inversement la droite* MG′ (u_1, $\cos\omega$, $\sin\omega$) *considérée comme génératrice d'une nouvelle surface* R′ *donne comme direction asymptotique précisément* MG : c'est la démonstration analytique de ce fait que R et R′ sont *osculatrices* entre elles le long de Γ. En particulier, si la projection de MG sur le plan normal MBN est choisie de façon à obtenir une surface développable, on a $\frac{d\omega}{ds}-\frac{1}{T}=0$ et par suite MG, MG′ sont symétriques par rapport au plan normal.

Cela posé, considérons la surface R et les plans tangents aux divers points de MG; on a l'équation du plan tangent au point ρ sur MG, *dans le système de référence* MTNB en égalant à zéro le déterminant

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}+\frac{du}{ds}-\frac{v}{R} & \frac{dv}{ds}+\frac{u}{R}+\frac{w}{T} & \frac{dw}{ds}-\frac{v}{T} \\ u & v & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}=0,$$

où la première ligne s'obtient en prenant le coefficient de a, a', a'' dans le terme explicité à la première ligne de (2) et en divisant par ρ, où la seconde ligne s'obtient de même en prenant les coefficients de a, a', a'' dans la seconde ligne (2); x_1, y_1, z_1 désigneraient les coordonnées courantes. Cette équation s'écrit

$$(11')\qquad \left(\frac{1}{\rho}-\frac{v}{R}\right)(vz_1-wy_1)+\begin{vmatrix} \frac{du}{ds} & \frac{dv}{ds}+\frac{u}{R}+\frac{w}{T} & \frac{dw}{ds}-\frac{v}{T} \\ u & v & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}=0.$$

On obtient l'équation du plan tangent au point, de même ρ sur MG [nous rappelons les formules

$$(\mathrm{MG})\qquad x+(au\ +a'\cos\omega+a''\cos\omega)\rho,\ \ldots.$$
$$(\mathrm{MG}')\qquad x+(au_1+a'\cos\omega+a''\cos\omega)\rho,\ \ldots]$$

en remplaçant u par u_1, de sorte que l'intersection des deux plans tangents a pour lieu, *quand* ρ *varie*, le plan défini par l'équation

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} \frac{du}{ds} & \frac{dv}{ds}+\frac{u}{R}+\frac{w}{T} & \frac{dw}{ds}-\frac{v}{T} \\ u & v & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{ds} & \frac{dv}{ds}+\frac{u_1}{R}+\frac{w}{T} & \frac{dw}{ds}-\frac{v}{T} \\ u_1 & v & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

Nous remarquons que, si ρ varie, les points de contact M_1 sur G, M'_1 sur G′ varient de sorte que la droite $M_1 M'_1$ reste parallèle à une direction fixe de paramètres directeurs *relatifs* $u - u_1$, o,o; *le point* μ *du paragraphe* **2** *est rejeté à l'infini dans cette direction.* Nous prenons maintenant la trace du plan (12) sur le plan MGG′ ou $vz_1 - wy_1 = 0$ et *nous n'avons qu'à vérifier qu'elle est la polaire du point* μ *par rapport au couple de droites* MG, MG′.

Nous développons donc l'équation (12) en supprimant le terme $\left(\frac{du}{ds}-\frac{du_1}{ds}\right)(vz_1 - wy_1)$; dans l'ensemble des termes restants nous supprimons le facteur $u_1 - u$ et il reste

$$(13)\qquad \left(\frac{dv}{ds}+\frac{w}{T}\right)z_1 - \frac{wx_1}{R} + \frac{z_1}{R}(u_1+u) - \left(\frac{dw}{ds}-\frac{v}{T}\right)y_1 = 0.$$

Pour obtenir la trace $M\pi$ de ce plan sur le plan MGG′, nous n'avons qu'à prendre $y_1 = v = \cos\omega$, $z_1 = w = \sin\omega$ et l'équation (13) nous donne la valeur de x_1; on a

$$(14)\qquad x_1 = \left(\frac{1}{T}-\frac{d\omega}{ds}\right)\frac{R}{\sin\omega} + u + u_1 = \frac{R}{\sin\omega}\left(\frac{d\omega}{ds}-\frac{1}{T}\right).$$

Les paramètres directeurs des droites MG, MG′, $M\mu$, $M\pi$ sont donc

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} u & \cos\omega & \sin\omega \\ u_1 & \cos\omega & \sin\omega \\ u-u_1 & 0 & 0 \\ \frac{R}{\sin\omega}\left(\frac{d\omega}{ds}-\frac{1}{T}\right) & \cos\omega & \sin\omega \end{array}\right.$$

La question revient alors à vérifier que le birapport

$$(16)\qquad \left[u, u_1, \infty, \frac{R}{\sin\omega}\left(\frac{d\omega}{ds}-\frac{1}{T}\right)\right]$$

est égal à -1; c'est évident, car le dernier nombre est la demi-somme des deux premiers.

Nous allons maintenant écrire l'équation ponctuelle des quadriques Q se raccordant aux surfaces réglées R, R′ le long de MG et MG′. Il est commode pour cela de prendre un nouveau système de référence obtenu en gardant MT pour axe des X, le plan MGG′ devenant le plan MXY; cela revient à poser

$$(17)\qquad x_1 = X, \qquad Y = y_1 \cos\omega + z_1 \sin\omega, \qquad Z = -y_1 \sin\omega + z_1 \cos\omega,$$

et l'équation du plan tangent à R au point ρ de MG se déduit de (11), dans le nouveau système, par des combinaisons évidentes sur les deux dernières colonnes; on a ainsi (on remplace v par $\cos\omega$, w par $\sin\omega$)

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} + \frac{du}{ds} - \frac{\cos\omega}{R} & \frac{u}{R}\cos\omega & -\frac{u}{R}\sin\omega + \frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} \\ u & 1 & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part, le quadrique a une équation de la forme

$$(19)\qquad (X - uY)(X - u_1 Y) + \lambda Z^2 + Z(\mu X + \nu Y + \sigma) = 0,$$

où λ, μ, ν, σ sont certaines constantes; le plan tangent au point $(\rho u, \rho, 0)$ pris sur MG a pour équation

$$(20)\qquad \rho(X - uY)(u - u_1) + Z(\mu\rho u + \nu\rho + \sigma) = 0.$$

Ce plan contient le vecteur $(u, 1, 0)$ porté par MG; il doit contenir le vecteur défini par la première ligne du déterminant (18); on a ainsi une relation, *identique par rapport à*, ρ

$$\rho\left[\frac{1}{\rho} + \frac{du}{ds} - \frac{\cos\omega}{R} - \frac{u^2}{R}\cos\omega\right](u - u_1)$$
$$+ \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} - \frac{u}{R}\sin\omega\right)(\mu\rho u + \nu\rho + \sigma) = 0,$$

ce qui donne les deux conditions

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} u - u_1 + \sigma\left(\dfrac{d\omega}{ds} - \dfrac{1}{T} - \dfrac{u}{R}\sin\omega\right) = 0, \\ \left[\dfrac{du}{ds} - \dfrac{\cos\omega}{R}(1 + u^2)\right](u - u_1) + \left(\dfrac{d\omega}{ds} - \dfrac{1}{T} - \dfrac{u}{R}\sin\omega\right)(\mu u + \nu) = 0, \end{array}\right.$$

La génératrice MG' fournit les équations analogues, obtenues en remplaçant u par u_1 et inversement; la première équation (21) confrontée avec celle qui en dérive ainsi conduit immédiatement à la condition de compatibilité qui est la première équation (10); ceci serait d'ailleurs la démonstration directe de l'existence des quadriques Q, mais il était intéressant de signaler le critérium de M. Vincensini. Comme on suppose $u - u_1 \neq 0$, c'est-à-dire R non développable et par suite distincte de R', on peut remplacer la seconde équation par

$$\mu u + \nu = \left[\frac{du}{ds} - \frac{\cos\omega}{R}(1 + u^2)\right]\sigma, \tag{22}$$

on a aussi

$$\mu u_1 + \nu = \left[\frac{du_1}{ds} - \frac{\cos\omega}{R}(1 + u_1^2)\right]. \tag{22'}$$

En tenant compte de (10), on a donc

$$\sigma = \frac{2R}{\sin\omega}, \qquad u - u_1 = 2h, \qquad \mu = \frac{2R}{\sin\omega}\left[\frac{1}{h}\frac{dh}{ds} - 2\cos\omega\left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T}\right)\right]. \tag{23}$$

Pour avoir ν, il y a avantage à additionner les équations (22) et (22'); on a ainsi

$$\begin{aligned}\nu\frac{\sin\omega}{R} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{2R}{\sin\omega}\left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T}\right)\right\} - \frac{2\cos\omega}{R} + \frac{2\cos\omega}{R}\left\{\frac{R^2}{\sin\omega}\left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T}\right)^2 - h^2\right\} \\ - \frac{2R}{\sin\omega}\left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T}\right)\frac{1}{h}\frac{dh}{ds}.\end{aligned} \tag{24}$$

Le coefficient λ est resté arbitraire; nous avons donc obtenu notre faisceau.

Nous avons donc obtenu, sans signes de quadratures, l'équation explicite de la quadrique Q à un paramètre dont la caractéristique se compose de deux droites sécantes et d'une conique; cette quadrique dépend de cinq fonctions d'un argument; la courbe Γ fait en effet intervenir les coordonnées y, z de M comme fonctions de x, puis les fonctions u, ω qui définissent MG, puis le coefficient λ (si c'était même nécessaire, on sait que x, y, z, s sur Γ peuvent s'exprimer explicitement, sans signes de quadratures en fonction d'un paramètre auxiliaire, l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 - ds^2 = 0$ étant de celles que l'on sait résoudre explicitement).

L'enveloppe de Q comprend les deux surfaces réglées non développables R, R', puis une surface B engendrée par la conique C, complément de la caractéristique. Cette surface B, ainsi obtenue explicitement par nous, au moyen de cinq fonctions d'un paramètre auxiliaire, est la surface *générale* définie par M. Blutel (*Annales de l'École Normale*, t. 7, 1890) comme lieu d'une conique mobile C avec cône du second degré circonscrit le long de chaque conique.

M. Blutel et moi étudions de nouveau ces surfaces B dans les *Annales de Toulouse* (t. 27, 1935).

Le fait que la surface B trouvée ici est bien la surface B *générale*, découle de deux raisons complémentaires :

a. La surface B générale dépend de cinq fonctions d'un argument servant de paramètre variable;

b. La surface B *générale* conduit effectivement à une quadrique de l'espèce étudiée ici.

Pour obtenir ce dernier résultat, il suffit de considérer le cône S circonscrit à B le long de C; la caractéristique de S se décompose en deux génératrices et la conique C; on peut donc écrire, l'équation $S = 0$ dépendant d'un paramètre μ,

$$\frac{dS}{d\mu} \equiv (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1), \tag{25}$$

où $P \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est l'équation du plan de C et $P_1 \equiv \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0$ celle du plan des deux génératrices [le résultat (25) est exact pourvu que le premier membre de S ait été, au préalable, remplacé par $S\varphi(\mu)$, où φ est une fonction convenable]. Si l'on considère la quadrique

$$Q \equiv S + \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2, \tag{26}$$

on a

$$\frac{dQ}{d\mu} \equiv P\left[P_1 + \frac{d\lambda}{d\mu}P + 2\lambda\frac{dP}{d\mu}\right]. \tag{27}$$

On peut déterminer λ de sorte que le plan

$$P_1 + \frac{d\lambda}{d\mu} P + 2\lambda \frac{dP}{d\mu} = 0 \tag{28}$$

soit tangent à Q ; on a une équation différentielle

$$\lambda^2 f(\mu) + \lambda \frac{d\lambda}{d\mu} f_1(\mu) + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2 f_2(\mu) + \lambda f_3(\mu) + \frac{d\lambda}{d\mu} f_4(\mu) = 0, \tag{29}$$

qui a des solutions autres que $\lambda = 0$; chacune d'elles détermine une quadrique Q de l'espèce étudiée ici, on voit même que chaque surface B détermine ∞^1 familles de quadriques de l'espèce étudiée ici.