JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. DELSARTE

Les fonctions « moyenne-périodiques »

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 14, nº 1-4 (1935), p. 403-453.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1935_9_14_1-4_403_0>

Les fonctions « moyenne-périodiques »;

Par J. DELSARTE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy,
Chargé de recherches de la Caisse Nationale des Sciences.

INTRODUCTION.

Nous commençons l'étude, dans ce Mémoire, d'une extension nouvelle de la théorie des fonctions périodiques.

Lorsqu'on veut généraliser la théorie des fonctions périodiques, on peut tout d'abord, comme l'ont fait Bohr et ses continuateurs, essayer de définir des fonctions qui seraient « approximativement périodiques », c'est-à-dire qui vérifieraient à ε près, la condition de périodicité

$$f(x+\mathrm{T})-f(x)=0.$$

En précisant cette idée, on aboutit à la théorie des fonctions presque-périodiques, qui est maintenant classique.

Mais les fonctions périodiques sommables ont une autre propriété importante, qui peut aussi leur servir de définition. Soit $f(x)$ une telle fonction de la variable réelle x; de période a. L'intégrale

$$\int_x^{x+a} f(y)\,dy$$

est évidemment indépendante de x; si l'on retranche de $f(x)$ une constante convenable, cette intégrale devient nulle pour toute valeur de x. On peut donc dire : *les fonctions périodiques sommables, de période a, sont celles qu'on obtient en ajoutant une constante arbitraire à toute* *fonction de moyenne nulle dans un intervalle quelconque de longueur a.*

La réciproque est évidente.

La généralisation de cette définition ne présente aucune difficulté. Voici ce que nous proposons :

Considérons, dans l'espace euclidien à n dimensions, un point O et un domaine borné quelconque D_0, nous désignerons par D_M le domaine déduit de D_0 par la translation qui amène O en M. Soit ensuite un noyau borné $K(M, P)$ ne dépendant que de la position relative des points M et P; nous supposons ce noyau sommable par rapport à P, décrivant D_0, M étant en O. Remarquons que le domaine D_0 peut très bien être de dimension inférieure à n; on désignera par $d\omega_P$ l'élément d'extension de ce domaine autour d'un de ses points P. *Une fonction $f(M)$ définie et bornée dans tout l'espace, sommable dans tout domaine fini, sera une fonction « moyenne-périodique » de n variables, par rapport au noyau $K(M, P)$ et au domaine D_0 si la quantité*

$$\delta_M[f] \equiv \int_{D_M} K(M, P) f(P)\, d\omega_P$$

est identiquement nulle quelle que soit la position du point M.

Dans ce Mémoire nous étudions les propriétés principales des fonctions moyenne-périodiques d'une variable.

Avant de résumer les résultats obtenus, nous voudrions montrer que la généralisation précédente n'est pas seulement naturelle au point de vue mathématique, mais qu'elle se présente d'une manière presque immédiate lorsqu'on examine le concept même de mesure en physique expérimentale.

Supposons qu'on se propose de déterminer, en ses différents points, la densité d'un corps hétérogène. La méthode suivante se présente à l'esprit : on découpera le corps en petits cubes de côté ε, suivant trois directions de plans rectangulaires deux à deux, et l'on adoptera comme valeur de la densité au centre de chacun des cubes obtenus, la densité moyenne de chacun de ces cubes; puis on déduira, par interpolation, une valeur approchée de la densité, $\varphi_1(M)$, aux différents points du corps. Quelle relation y a-t-il entre cette densité approchée et la densité réelle, si tant est que cette dernière, $\varphi(M)$ existe? Il est clair qu'on aura

$$\varphi_1(M) = \frac{1}{\varepsilon^3}\int_{D_M} \varphi(P)\, d\omega_P,$$

où D_M désigne le cube de centre M, de côté ε, dont les faces sont parallèles aux plans coordonnés. Cette équation a d'ailleurs une infinité de solutions qu'on obtient en ajoutant à l'une d'entre elles, une fonction moyenne-périodique par rapport au noyau constant $\frac{1}{\varepsilon^3}$ et au domaine D_0 constitué par un cube de centre origine, d'arête ε, et dont les faces sont parallèles aux plans coordonnés.

Plus généralement, on peut énoncer le principe suivant : la détermination expérimentale de la fonction qui représente les variations d'une propriété particulière d'un corps en ses différents points; ou encore, d'une façon plus étendue, la détermination expérimentale d'une loi de répartition quelconque, ne donne pas, d'une manière directe, la valeur de la fonction qui représente cette loi, pour les différentes configuration du système, mais bien, une certaine moyenne pondérée de cette fonction, moyenne calculée dans un domaine de l'espace d'extension, formé de configurations voisines de celle pour laquelle la mesure est faite.

Dans la définition des fonctions moyenne-périodiques, on suppose, et c'est le cas général, que la manière dont est effectuée la mesure ne dépend pas de la configuration pour laquelle on l'effectue; c'est-à-dire, en langage mathématique, que le domaine d'extension dans lequel est calculée la moyenne, domaine appelé D_M, est indépendant, en forme et orientation, du point M, et que la loi de pondération, K(M, P), ne dépend que de la position relative de la configuration M, pour laquelle on fait la mesure, et de la configuration voisine P, du domaine D_M.

On voit par suite que les résultats expérimentaux seront également expliqués par une infinité de lois de répartition, obtenues, à partir de l'une d'entre elles, par addition d'une fonction moyenne-périodique arbitraire.

Si l'on veut bien nous permettre un langage plus philosophique, nous dirons que les fonctions moyenne-périodiques représentent la part d'arbitraire qu'il nous est loisible d'introduire dans les explications que nous imaginons, du monde extérieur.

C'est pourquoi il nous a paru utile de les étudier.

Dans un premier chapitre, nous traitons des équations intégrales de la forme

$$\delta_M[f] \equiv \int_{D_M} K(M, P) f(P) \, d\omega_P = g(M),$$

où $f(M)$ est la fonction inconnue; ces équations admettant une infinité de solutions, la différence de deux quelconques d'entre elles étant une fonction moyenne périodique, il était bien naturel de les examiner en détail.

Ces équations ont des propriétés très voisines de celles des équations aux différences finies; à cause de cela nous proposons de les appeler équations de Fredolhm-Noerlund; des polynomes bernoulliens jouent un rôle essentiel, et une formule sommatoire, généralisation étendue de la formule d'Euler, Mac-Laurin est d'un usage très fructueux.

Dans le second chapitre, nous nous bornons à considérer les fonctions d'une seule variable, le résultat fondamental consiste en ce que toute fonction moyenne-périodique est développable en une série *convergente* d'exponentielles moyenne-périodiques. Contrairement à ce qui se passe dans la théorie de Bohr, les séries obtenues convergent, comme les séries de Fourier ordinaires, tout au moins quand on se borne aux fonctions moyenne-périodiques à variation bornée; d'autre part, les coefficients de la variable dans les exposants des exponentielles, ne sont pas nécessairement purement imaginaires; il y a donc des termes d'amortissement.

Un problème qui se pose naturellement est celui du prolongement d'une fonction donnée dans un intervalle égal à une période, en fonction moyenne-périodique de $-\infty$ à $+\infty$; il s'agit de déterminer pour quels noyaux K, ce prolongement est possible, quelle que soit la fonction donnée. Nous ne pouvons donner que des réponses partielles à ces questions.

Un paragraphe terminal résume les principales difficultés qui se présentent quand on veut étendre les résultats précédents au cas de plusieurs variables.

Les conclusions essentielles de ce travail ont été publiées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* les 22 janvier et 5 février 1934.

CHAPITRE I.

L'ÉQUATION DE FREDHOLM-NOERLUND.

Reprenons les notations de l'introduction et plaçons-nous, par exemple, dans le cas de deux variables. Le domaine plan D_M peut toujours être supposé rectangulaire :

$$x \leqq \xi \leqq x + a, \qquad y \leqq \eta \leqq y + b;$$

le noyau K pouvant être nul dans certaines portions de ce domaine. Ce noyau ne dépend, par hypothèse, que des composantes du vecteur MP ; x et y d'une part, ξ et η de l'autre, étant les coordonnées de ces points, nous écrirons dorénavant ce noyau

$$K(\xi - x, \eta - y).$$

Nous avons donc à étudier l'équation

$$\delta_{xy}[f(\xi, \eta)] \equiv \iint K(\xi - x, \eta - y) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = g(x, y);$$

les variables d'intégration ξ et η variant entre les limites

$$x \leqq \xi \leqq x + a, \qquad y \leqq \eta \leqq y + b;$$

on peut l'écrire aussi bien

$$\delta_{xy}[f(\xi, \eta)] = \int_0^a \int_0^b K(\xi, \eta) f(x + \xi, y + \eta)\, d\xi\, d\eta = g(x, y).$$

1. Les polynomes bernoulliens. — Dans le cas de deux variables, ils forment une suite à deux indices; le polynome $B_{pq}(x, y)$ étant de degré p par rapport à x et de degré q par rapport à y. Les propriétés suivantes les définissent complètement :

$$(1) \qquad \frac{\partial B_{pq}}{\partial x} = B_{p-1,q}(x, y), \qquad \frac{\partial B_{pq}}{\partial y} = B_{p,q-1}(x, y).$$

$$(2) \qquad \delta_{00}[B_{00}(\xi, \eta)] = 1,$$

$$(3) \qquad \delta_{00}[B_{pq}(\xi, \eta)] = 0 \qquad (p, q \neq 0),$$

il est supposé essentiellement ici que $\delta_{00}[1]$ n'est pas nul, de sorte que la condition (2) détermine bien la constante B_{00}. Cherchons la fonction caractéristique de ces polynomes, définie par le développement de Mac-Laurin

$$\Phi(xy \mid uv) = \sum_{pq,0}^{\infty} B_{pq}(x, y)\, u^p v^q.$$

Un calcul facile, compte tenu des conditions (1), montre que l'on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u\Phi, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v\Phi;$$

d'où résulte que la fonction caractéristique cherchée est de la forme

$$\Phi(xy \mid uv) = \varphi(u, v)\, e^{ux+vy};$$

enfin les conditions (2) et (3) donnent immédiatement

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{\delta_{00}[e^{u\xi+v\eta}]}.$$

La fonction caractéristiqne est donc complètement déterminée. La fonction entière

$$A(u, v) = \delta_{00}[e^{u\xi+v\eta}]$$

jouera un rôle important dans la suite; elle ne s'annule pas, par hypothèse, à l'origine; la fonction caractéristique Φ est donc holomorphe au voisinage de $u = v = 0$, et le calcul précédent est parfaitement légitime.

2. Nombres bernoulliens. — Les conditions (1) sont vérifiées si l'on pose

$$B_{pq}(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{p} \sum_{\beta=0}^{q} B_{\alpha\beta} \frac{x^{p-\alpha} y^{q-\beta}}{(p-\alpha)!\,(q-\beta)!}.$$

Les nombres à deux indices

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}(0, 0)$$

vont jouer le rôle de nombres bernoulliens; leur fonction caractéristique est

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{A(u, v)} = \sum_{p,q=0}^{\infty} B_{pq} u^p v^q.$$

Calculons maintenant

$$\delta_{xy}[B_{pq}(\xi, \eta)] = \delta_{00}[B_{pq}(x + \xi, y + \eta)].$$

La formule de Mac-Laurin combinée avec les propriétés (1), donne

$$B_{pq}(x + \xi, y + \eta) = \sum_{\alpha=0}^{p} \sum_{\beta=0}^{q} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \frac{y^\beta}{\beta!} B_{p-\alpha, q-\beta}(\xi, \eta),$$

et à cause des conditions (2) et (3), il vient

$$\delta_{xy}[B_{pq}(\xi, \eta)] = \frac{x^p y^q}{p!q!}. \tag{4}$$

3. La formule sommatoire pour les polynomes. — Cette dernière propriété permet de former immédiatement une solution particulière de

$$\delta_{xy}[f(\xi, \eta)] = g(x, y);$$

quand le second membre $g(x, y)$ est un polynome

$$g(x, y) = \sum_{p,q} A_{pq} \frac{x^p}{p!} \frac{y^q}{q!};$$

c'est à savoir la solution polynomiale

$$f(x, y) = \sum_{p,q} A_{pq} B_{pq}(x, y).$$

Transformons cette expression; remarquons d'abord que l'on a

$$A_{pq} = \left[\frac{\partial^{p+q} g}{\partial x^p \partial y^q}\right]_{x=y=0},$$

puis que, bien évidemment

$$\frac{\partial^{p+q} g}{\partial x^p \partial y^q} = \delta_{xy}\left[\frac{\partial^{p+q} f}{\partial \xi^p \partial \eta^q}\right].$$

Cela nous permet d'écrire

$$f(x, y) = \sum_{p,q} B_{pq}(x, y)\, \delta_{00}\left[\frac{\partial^{p+q} f}{\partial \xi^p \partial \eta^q}\right].$$

On peut d'ailleurs mettre cette formule sous une forme en apparence plus générale; on a

$$f(x+\mathrm{X},\, y+\mathrm{Y})=\sum_{p,q} \mathrm{B}_{pq}(x+\mathrm{X},\, y+\mathrm{Y})\,\delta_{00}\left[\frac{\partial^{p+q} f}{\partial\xi^{p}\,\partial\eta^{q}}\right];$$

d'autre part

$$\mathrm{B}_{pq}(x+\mathrm{X},\, y+\mathrm{Y})=\sum_{\alpha=0}^{p}\sum_{\beta=0}^{q} \mathrm{B}_{\alpha\beta}(x, y)\,\frac{\mathrm{X}^{p-\alpha}}{(p-\alpha)!}\,\frac{\mathrm{Y}^{q-\beta}}{(q-\beta)!};$$

il vient donc

$$f(x+\mathrm{X},\, y+\mathrm{Y})=\sum_{\alpha\beta} \mathrm{B}_{\alpha\beta}(x, y)\left\{\sum_{p\geqq\alpha}\sum_{q\geqq\beta}\frac{\mathrm{X}^{p-\alpha}}{(p-\alpha)!}\,\frac{\mathrm{Y}^{q-\beta}}{(q-\beta)!}\,\delta_{00}\left[\frac{\partial^{p+q} f}{\partial\xi^{p}\,\partial\eta^{q}}\right]\right\}.$$

Mais puisque f est aussi un polynome, on peut écrire

$$\delta_{\mathrm{XY}}[f(\xi, \eta)]=\delta_{00}[f(\mathrm{X}+\xi,\, \mathrm{Y}+\eta)]=\sum_{r,s}\frac{\mathrm{X}^{r}}{r!}\,\frac{\mathrm{Y}^{s}}{s!}\,\delta_{00}\left[\frac{\partial^{r+s} f}{\partial\xi^{r}\,\partial\eta^{s}}\right];$$

d'où, finalement, la formule sommatoire

$$f(x+\mathrm{X},\, y+\mathrm{Y})=\sum_{p,q} \mathrm{B}_{pq}(x, y)\,\delta_{\mathrm{XY}}\left[\frac{\partial^{p+q} f}{\partial\xi^{p}\,\partial\eta^{q}}\right].$$

Les calculs précédents ne sont valables, répétons-le, que pour un polynome.

4. La formule sommatoire dans le cas général (fonctions d'une variable). — Que devient la formule précédente lorsque la fonction f est seulement supposée dérivable jusqu'à un certain ordre? Toute la question se ramène évidemment à donner une expression aussi simple que possible du reste de la formule, lorsqu'on arrête le développement à un certain ordre.

Nous commencerons par traiter le cas des fonctions d'une variable. Pour ces fonctions, le second membre, limité à l'ordre n, s'écrit

$$\sum_{p=0}^{n} \mathrm{B}_{p}(x)\,\delta_{\mathrm{X}}\left[\frac{d^{p} f}{d\xi^{p}}\right].$$

Nous allons d'abord faire un calcul purement formel, qui nous conduira à une formule simple, qu'on légitimera ensuite directement. On a d'abord

$$\delta_X\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right] = \int_0^a K(\xi) f^{(p)}(X+\xi)\,d\xi.$$

Appliquant la série de Taylor à $f^{(p)}(X+\xi)$ et posant

$$a_q = \delta_0[\xi^q],$$

il vient

$$\delta_X\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right] = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{q!} f^{(p+q)}(X);$$

comme d'ailleurs

$$B_p(x) = \sum_{\alpha=0}^{p} B_{p-\alpha}\frac{x^\alpha}{\alpha!},$$

on voit qu'on peut écrire

$$\sum_{p=0}^{n} B_p(x)\,\delta_X\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right] = \sum_{p=0}^{n}\sum_{\alpha=0}^{p}\sum_{q=0}^{\infty} B_{p-\alpha}a_q\frac{f^{(p+q)}(X)}{\alpha!\,q!}x^\alpha.$$

Dans la sommation triple du second membre, groupons d'abord les termes pour lesquels $p+q=N$; deux cas sont à distinguer :

a. $N \leqq n$; on a à évaluer

$$\sum_{q=0}^{N}\sum_{\alpha=0}^{N-q} B_{N-q-\alpha}\frac{a_q x^\alpha}{q!\,\alpha!} = \sum_{\alpha=0}^{N}\left[\sum_{q=0}^{N-\alpha} B_{N-q-\alpha}\frac{a_q}{q!}\right]\frac{x^\alpha}{\alpha!},$$

mais, par définition

$$\delta_0[B_p(\xi)] = \sum_{\alpha=0}^{p} B_\alpha\frac{a_{p-\alpha}}{(p-\alpha)!} = \begin{cases} 0 & (p>0), \\ 1 & (p=0); \end{cases}$$

donc

$$\sum_{q=0}^{N-\alpha} B_{N-q-\alpha}\frac{a_q}{q!} = \begin{cases} 0 & (N>\alpha), \\ 1 & (N=\alpha), \end{cases}$$

et la double somme précédente se réduit à $\frac{x^N}{N!}$; de sorte que, dans la somme triple envisagée, la contribution de l'ensemble des termes pour lesquels $p+q\leqq n$, a pour valeur

$$\sum_{N=0}^{n}\frac{f^{(N)}(X)}{N!}x^N.$$

b. $p+q=N\geqq n$. — Dans ces termes q varie de $N-n$ à N, et $p=N-q$, est au plus égal à n. Il faut donc calculer

$$\sum_{q=N-n}^{N}\sum_{\alpha=0}^{N-q}B_{N-q-\alpha}\frac{a_q x^\alpha}{q!\,\alpha!}=\sum_{\alpha=0}^{n}\left[\sum_{q=N-n}^{N-\alpha}B_{N-\alpha-q}\frac{a_q}{q!}\right]\frac{x^\alpha}{\alpha!},$$

or

$$B_{n-\alpha}(\xi)=\sum_{q=0}^{n-\alpha}B_q\frac{\xi^{n-\alpha-q}}{(n-\alpha-q)!}$$

et

$$\sum_{q=N-n}^{N-\alpha}B_{N-\alpha-q}\frac{a_q}{q!}=\delta_0\left[\sum_{q=0}^{n-\alpha}B_q\frac{\xi^{N-\alpha-q}}{(N-\alpha-q)!}\right];$$

mais on sait qu'on a, en général,

$$\frac{\xi^{N-\alpha-q}}{(N-\alpha-q)!}=\int_0^\xi\frac{(\xi-\eta)^{N-n-1}}{(N-n-1)!}\,\frac{\eta^{n-\alpha-q}}{(n-\alpha-q)!}\,d\eta;$$

de sorte qu'il est possible d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{n-\alpha}B_q\frac{\xi^{N-\alpha-q}}{(N-\alpha-q)!}&=\int_0^\xi\frac{(\xi-\eta)^{N-n-1}}{(N-n-1)!}\left[\sum_{q=0}^{n-\alpha}B_q\frac{\eta^{n-\alpha-q}}{(n-\alpha-q)!}\right]d\eta\\&=\int_0^\xi\frac{(\xi-\eta)^{N-n-1}}{(N-n-1)!}B_{n-\alpha}(\eta)\,d\eta,\end{aligned}$$

puis

$$\sum_{q=N-n}^{N-\alpha}B_{N-\alpha-q}\frac{a_q}{q!}=\int_0^a\int_0^\xi\frac{K(\xi)\,(\xi-\eta)^{N-n-1}}{(N-n-1)!}B_{n-\alpha}(\eta)\,d\eta\,d\xi.$$

Multipliant alors par $\frac{x^\alpha}{\alpha!}$, et sommant en α de o à n, on voit que le coefficient de $f^{(N)}(X)$ est

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^\xi\frac{K(\xi)\,(\xi-\eta)^{N-n-1}}{(N-n-1)!}\left[\sum_{\alpha=0}^{n}B_{n-\alpha}(\eta)\frac{x^\alpha}{\alpha!}\right]d\eta\,d\xi\\&=\int_0^a\int_0^\xi\frac{K(\xi)\,(\xi-\eta)^{N-n-1}}{(N-n-1)!}B_n(x+\eta)\,d\eta\,d\xi.\end{aligned}$$

Enfin, multipliant par $f^{(N)}(X)$, et sommant en N, de $n+1$ à l'infini, on trouve, pour le complément de la somme triple

$$\int_0^a \int_0^\xi K(\xi)\, B_n(x+\eta) \left[\sum_{N=n+1}^{\infty} f^{(N)}(X) \frac{(\xi-\eta)^{N-n-1}}{(N-n-1)!} \right] d\eta\, d\xi,$$

ce qui donne par application formelle de la série de Taylor

$$\int_0^a \int_0^\xi K(\xi)\, B_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(X+\xi-\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Nous avons donc établi formellement la relation

$$\sum_{p=0}^{n} B_p(x)\, \delta_X \left[\frac{d^p f}{d\xi^p} \right] = \sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(X) \frac{x^p}{p!} + \int_0^a K(\xi) \left[\int_0^\xi B_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(X+\xi-\eta)\, d\eta \right] d\xi,$$

qu'il est ensuite facile de justifier. Supposons que les dérivées successives de la fonction f, existent jusqu'à l'ordre $n+1$; des intégrations par partie faciles donnent successivement

$$\begin{aligned} &\int_0^\xi B_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(X+\xi-\eta)\, d\eta \\ &\quad = B_n(x)\, f^{(n)}(X+\xi) - B_n(x+\xi)\, f^{(n)}(X) + \int_0^\xi B_{n-1}(x+\eta)\, f^{(n)}(X+\xi-\eta)\, d\eta \\ &\quad = \sum_{p=0}^{n} B_p(x)\, f^{(p)}(X+\xi) - \sum_{p=0}^{n} B_p(x+\xi)\, f^{(p)}(X), \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\delta_0 \left[\int_0^\xi B_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(X+\xi-\eta)\, d\eta \right] = \sum_{p=0}^{n} B_p(x)\, \delta_X \left[\frac{d^p f}{d\xi^p} \right] - \sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(X) \frac{x^p}{p!},$$

qui est précisément la formule que nous avions en vue. Si l'on tient compte maintenant de

$$\sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(X) \frac{x^p}{p!} = f(X+x) - \int_0^x f^{(n+1)}(X+x-\eta) \frac{\eta^n}{n!}\, d\eta$$

et de

$$\frac{\eta^n}{n!} = \delta_\eta[B_n(\xi)] = \int_0^a K(\xi)\, B_n(\xi+\eta)\, d\xi.$$

on voit que

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} B_p(x)\,\delta_X\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right] &= f(x+X) + \int_0^a K(\xi)\left[\int_0^\xi B_n(x+\eta) f^{(n+1)}(X+\xi-\eta)\,d\eta\right.\\ &\qquad \left. - \int_0^x B_n(\xi+\eta) f^{(n+1)}(X+x-\eta)\,d\eta\right] d\xi.\end{aligned}$$

Changeons η en $x+\eta-\xi$ dans la seconde intégrale qui figure à l'intérieur du crochet, au second membre; elle devient

$$\int_{\xi-x}^{\xi} B_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(X+\xi-\eta)\,d\eta$$

et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}f(x+X) = \sum_{p=0}^{n} B_p(x)\,\delta_X\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right] \\ - \int_0^a K(\xi)\left[\int_0^{\xi-x} B_n(x+\eta) f^{(n+1)}(X+\xi-\eta)\,d\eta\right] d\xi.\end{aligned}$$

ou par une transformation simple

$$(5)\quad f(x+X) = \sum_{p=0}^{n} B_p(x)\,\delta_X\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right] - \delta_X\left[\int_0^{\xi-x-X} B_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)\,d\eta\right],$$

qui sera notre formule définitive, dans le cas des fonctions d'une variable. On remarquera que le reste, exprimé par une intégrale double, est d'aspect différent de celui du reste de la formule classique d'Euler, Mac-Laurin, qui s'exprime, comme on sait, par une intégrale simple. On retrouverait d'ailleurs cette dernière formule en faisant, dans (5), $K = 1$.

5. La formule sommatoire dans le cas général (fonctions de deux variables). — Il existe, quel que soit le nombre des variables, des formules sommatoires analogues, relatives à tout noyau de translation. Mais elles se compliquent de termes nouveaux, au fur et à mesure que le nombre des variables augmente; pour ne pas compliquer exagérément l'écriture, nous nous bornons, dans ce qui suit au cas de deux variables. Le lecteur n'aura plus, ensuite, de difficulté à construire, par analogie, la formule dans le cas général.

Nous introduirons, d'une part, les quantités

$$A = \int_0^\xi \int_0^\eta B_{PQ}(x+\xi', y+\eta')\, f^{(P+Q+2)}_{X^{P+1} Y^{Q+1}}(X+\xi-\xi', Y+\eta-\eta')\, d\xi'\, d\eta',$$

$$a = \sum_{p=0}^{P} \int_0^\eta B_{pQ}(x+\xi, y+\eta')\, f^{(p+Q+1)}_{X^p Y^{Q+1}}(X, Y+\eta-\eta')\, d\eta',$$

$$b = \sum_{q=0}^{Q} \int_0^\xi B_{Pq}(x+\xi', y+\eta)\, f^{(P+q+1)}_{X^{P+1} Y^q}(X+\xi-\xi', Y)\, d\xi',$$

$$\mathfrak{A} = \sum_{p=0}^{P} \sum_{q=0}^{Q} B_{pq}(x+\xi, y+\eta)\, f^{(p+q)}_{X^p Y^q}(X, Y),$$

et de l'autre, les expressions

$$U = \sum_{p=0}^{P} \sum_{q=0}^{Q} B_{pq}(x, y)\, f^{(p+q)}_{X^p Y^q}(X+\xi, Y+\eta),$$

$$u = \sum_{p=0}^{P} \sum_{q=0}^{Q} B_{pq}(x+\xi, y)\, f^{(p+q)}_{X^p Y^q}(X, Y+\eta),$$

$$v = \sum_{p=0}^{P} \sum_{q=0}^{Q} B_{pq}(x, y+\eta)\, f^{(p+q)}_{X^p Y^q}(X+\xi, Y);$$

u, v, U sont liés simplement à a, b, A et $\mathfrak{A}$; des intégrations par partie donnent en effet

$$a = u - \mathfrak{A}, \qquad b = v - \mathfrak{A}, \qquad A = U - u - v + \mathfrak{A},$$

puis

$$u = a + \mathfrak{A}, \qquad v = b + \mathfrak{A}, \qquad U = A + a + b + \mathfrak{A}.$$

Nous pouvons alors écrire, en appliquant l'opérateur δ_{XY} à la dernière de ces relations

$$(6)\quad \sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q} B_{pq}(x,y)\,\delta_{XY}\left[\frac{\partial^{p+q} f}{\partial\xi^p\,\partial\eta^q}\right]$$

$$= \delta_{XY}\left[\int_0^{\xi-X}\int_0^{\eta-Y} B_{PQ}(x+\xi', y+\eta')\, f^{(P+Q+2)}_{X^{P+1}Y^{Q+1}}(\xi-\xi', \eta-\eta')\, d\xi'\, d\eta'\right]$$

$$+\sum_{p=0}^{P} \delta_{xY}\left[\int_0^{\eta-Y} B_{pQ}(\xi, y+\eta')\, f^{(p+Q+1)}_{X^pY^{Q+1}}(X, \eta-\eta')\, d\eta'\right]$$

$$+\sum_{q=0}^{Q} \delta_{Xy}\left[\int_0^{\xi-X} B_{Pq}(x+\xi', \eta)\, f^{(P+q+1)}_{X^{P+1}Y^q}(\xi-\xi', Y)\, d\xi'\right]$$

$$+\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\frac{x^p}{p!}\,\frac{y^q}{q!}\, f^{(p+q)}_{X^pY^q}(X, Y).$$

Nous allons transformer le second membre. Posons d'abord

$$A_1 = \int_0^x\int_0^y f^{(P+Q+2)}_{X^{P+1}Y^{Q+1}}(X+x-\xi, Y+y-\eta)\,\frac{\xi^P}{P!}\,\frac{\eta^Q}{Q!}\, d\xi\, d\eta,$$

$$a_1 = \sum_{p=0}^{P}\int_0^y f^{(p+Q+1)}_{X^pY^{Q+1}}(X, Y+y-\eta)\,\frac{x^p}{p!}\,\frac{\eta^Q}{Q!}\, d\eta,$$

$$b_1 = \sum_{q=0}^{Q}\int_0^x f^{(P+q+1)}_{X^{P+1}Y^q}(X+x-\xi, Y)\,\frac{\xi^P}{P!}\,\frac{y^q}{q!}\, d\xi,$$

$$\mathfrak{A}_1 = \sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\frac{x^p}{p!}\,\frac{y^q}{q!}\, f^{(p+q)}_{X^pY^q}(X, Y).$$

On trouve, par des intégrations par parties convenables, les relations suivantes

$$\mathfrak{A}_1 = f(x+X, y+Y) - \int_0^x f^{(P+1)}_{X^{P+1}}(X+x-\xi, Y+y)\,\frac{\xi^P}{P!}\, d\xi$$
$$- \int_0^y f^{(Q+1)}_{Y^{Q+1}}(X+x, Y+y-\eta)\,\frac{\eta^Q}{Q!}\, d\eta + A_1.$$

$$a_1 = f(x+X, y+Y) - \int_0^x f^{(P+1)}_{X^{P+1}}(X+x-\xi, Y+y)\,\frac{\xi^P}{P!}\, d\xi - \mathfrak{A}_1,$$

$$b_1 = f(x+X, y+Y) - \int_0^y f^{(Q+1)}_{Y^{Q+1}}(X+x, Y+y-\eta)\,\frac{\eta^Q}{Q!}\, d\eta - \mathfrak{A}_1,$$

et conséquemment

$$\mathfrak{A}_1 = f(x+X, y+Y) - a_1 - b_1 - A_1;$$

dès lors, par substitution, le second membre de la relation (6) prend la forme

$$
\begin{aligned}
& f(x+X, y+Y) \\
& \quad + \int_0^a \int_0^b K(\xi, \eta) \left[\int_0^\xi \int_0^\eta B_{PQ}(x+\xi', y+\eta') f^{(P+Q+2)}_{X^{P+1} Y^{Q+1}}(X+\xi-\xi', Y+\eta-\eta')\, d\xi'\, d\eta' \right] d\xi\, d\eta \\
& \quad - \int_0^a \int_0^b K(\xi, \eta) \left[\int_0^x \int_0^y B_{PQ}(\xi+\xi', \eta+\eta') f^{(P+Q+2)}_{X^{P+1} Y^{Q+1}}(X+x-\xi', Y+y-\eta')\, d\xi'\, d\eta' \right] d\xi\, d\eta \qquad (a) \\
& \quad + \sum_{p=0}^{P} \int_0^a \int_0^b K(\xi, \eta) \left[\int_0^\eta B_{pQ}(x+\xi, y+\eta') f^{(p+Q+1)}_{X^p Y^{Q+1}}(X, Y+\eta-\eta')\, d\eta' \right] d\xi\, d\eta \\
& \quad - \sum_{p=0}^{P} \int_0^a \int_0^b K(\xi, \eta) \left[\int_0^y B_{pQ}(x+\xi, \eta+\eta') f^{(p+Q+1)}_{X^p Y^{Q+1}}(X, Y+y-\eta')\, d\eta' \right] d\xi\, d\eta \qquad (b) \\
& \quad + \sum_{q=0}^{Q} \int_0^a \int_0^b K(\xi, \eta) \left[\int_0^\xi B_{Pq}(x+\xi', y+\eta) f^{(P+q+1)}_{X^{P+1} Y^q}(X+\xi-\xi', Y)\, d\xi' \right] d\xi\, d\eta \\
& \quad - \sum_{q=0}^{Q} \int_0^a \int_0^b K(\xi, \eta) \left[\int_0^x B_{Pq}(\xi+\xi', y+\eta) f^{(P+q+1)}_{X^{P+1} Y^q}(X+x-\xi', Y)\, d\xi' \right] d\xi\, d\eta. \qquad (c)
\end{aligned}
$$

Dans les expressions qui figurent aux lignes marquées (a), (b), (c), faisons le changement de variables

$$\xi' = x + \xi'' - \xi, \qquad \eta' = y + \eta'' - \eta,$$

et écrivons ensuite ξ' et η' au lieu de ξ'' et η''. Des réductions se produisent, et l'on trouve

$$
\begin{aligned}
& \sum_{p=0}^{P} \sum_{q=0}^{Q} B_{pq}(x, y)\, \delta_{XY} \left[\frac{\partial^{p+q} f}{\partial \xi^p\, \partial \eta^q} \right] - f(x+X, y+Y) \\
& \quad = \int_0^a \int_0^b K(\xi, \eta) \Big\{ \int_0^\xi \int_0^\eta B_{PQ}(x+\xi', y+\eta') f^{(P+Q+2)}_{X^{P+1} Y^{Q+1}}(X+\xi-\xi', Y+\eta-\eta')\, d\xi'\, d\eta' \\
& \qquad\qquad - \int_{\xi-x}^{\xi} \int_{\eta-y}^{\eta} B_{PQ}(x+\xi', y+\eta') f^{(P+Q+2)}_{X^{P+1} Y^{Q+1}}(X+\xi-\xi', Y+\eta-\eta')\, d\xi'\, d\eta' \Big\} d\xi\, d\eta \\
& \quad + \sum_{p=0}^{P} \int_0^a \int_0^b K(\xi, \eta) \left[\int_0^{\eta-y} B_{pQ}(x+\xi, y+\eta') f^{(p+Q+1)}_{X^p Y^{Q+1}}(X, Y+\eta-\eta')\, d\eta' \right] d\xi\, d\eta \\
& \quad + \sum_{q=0}^{Q} \int_0^a \int_0^b K(\xi, \eta) \left[\int_0^{\xi-x} B_{Pq}(x+\xi', y+\eta) f^{(P+q+1)}_{X^{P+1} Y^q}(X+\xi-\xi', Y)\, d\xi' \right] d\xi\, d\eta.
\end{aligned}
$$

Dans la première ligne du second membre, l'accolade s'écrit encore

$$\int_0^{\xi-x}\int_0^{\eta-y}\ldots d\xi'\,d\eta'+\int_0^{\xi-x}\int_{\eta-y}^{\eta}\ldots d\xi'\,d\eta'+\int_{\xi-x}^{\xi}\int_0^{\eta-y}\ldots d\xi'\,d\eta'.$$

Or on a, par exemple,

$$\begin{aligned}\int_{\eta-y}^{\eta}&\mathrm{B}_{\mathrm{PQ}}(x+\xi', y+\eta')\,f^{(\mathrm{P+Q+2})}_{\mathrm{X^{P+1}Y^{Q+1}}}(\mathrm{X}+\xi-\xi', \mathrm{Y}+\eta-\eta')\,d\eta'\\ &=\sum_{q=0}^{\mathrm{Q}}\mathrm{B}_{\mathrm{P}q}(x+\xi', \eta)\,f^{(\mathrm{P}+q+1)}_{\mathrm{X^{P+1}Y}^q}(\mathrm{X}+\xi-\xi', \mathrm{Y}+y)\\ &\quad-\sum_{q=0}^{\mathrm{Q}}\mathrm{B}_{\mathrm{P}q}(x+\xi', y+\eta)\,f^{(\mathrm{P}+q+1)}_{\mathrm{X^{P+1}Y}^q}(\mathrm{X}+\xi-\xi', \mathrm{Y}+\eta);\end{aligned}$$

et de même pour $\int_{\xi-x}^{\xi}$; après quelques réductions, on trouve la formule sommatoire, pour deux variables, sous sa forme la plus simple (¹)

$$\begin{aligned}(7)\quad f(x+\mathrm{X}, y+\mathrm{Y})\\ =\sum_{p=0}^{\mathrm{P}}\sum_{q=0}^{\mathrm{Q}}&\mathrm{B}_{pq}(x, y)\,\delta_{\mathrm{XY}}\left[\frac{\partial^{p+q}f}{\partial\xi^p\,\partial\eta^q}\right]\\ &-\delta_{\mathrm{XY}}\left[\int_0^{\xi-\mathrm{Y}-x}\int_0^{\eta-\mathrm{X}-y}\mathrm{B}_{\mathrm{PQ}}(x+\xi, y+\eta')\,f^{(\mathrm{P+Q+2})}_{\mathrm{X^{P+1}Y^{Q+1}}}(\xi-\xi', \eta-\eta')\,d\xi\,d\eta'\right]\\ &-\sum_{p=0}^{\mathrm{P}}\delta_{0\mathrm{Y}}\left[\int_0^{\eta-\mathrm{Y}-y}\mathrm{B}_{p\mathrm{Q}}(\xi, y+\eta')\,f^{(p+\mathrm{Q}+1)}_{\mathrm{X}^p\mathrm{Y^{Q+1}}}(\mathrm{X}+x, \eta-\eta')\,d\eta'\right]\\ &-\sum_{q=0}^{\mathrm{Q}}\delta_{\mathrm{X}0}\left[\int_0^{\xi-\mathrm{X}-x}\mathrm{B}_{\mathrm{P}q}(x+\xi', \eta)\,f^{(\mathrm{P}+q+1)}_{\mathrm{X^{P+1}Y}^q}(\xi-\xi', \mathrm{Y}+y)\,d\xi'\right].\end{aligned}$$

Nous n'utiliserons pas cette formule dans la suite de ce travail; nous ne considérerons plus, en effet, à partir de maintenant que le cas des fonctions d'une variable. Nous avons tenu cependant à l'établir, car, par analogie avec ce qui va suivre, on peut présumer que la formule

(¹) Il est à peine besoin de faire remarquer que, comme dans le cas d'une variable, cette formule est établie en supposant seulement que la fonction $f(x, y)$ possède les dérivées qui y figurent.

sommatoire à deux variables doit être à la base de la résolution des équations de Fredholm-Noerlund à deux variables.

6. La solution principale de l'équation a une variable. — Reprenons la formule sommatoire, que nous écrirons

$$f(x+\mathrm{X}) = \delta_{\mathrm{X}}\left[\sum_{p=0}^{n} \mathrm{B}_p(x)\frac{d^p f}{d\xi^p} - \int_0^{\xi-x-\mathrm{X}} \mathrm{B}_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta\right].$$

Nous allons la transformer de manière à faire disparaître X du crochet. Remarquons d'abord que dans le calcul de δ_{X}, $\xi - \mathrm{X}$ reste compris entre o et a; de plus, quand η varie entre o et $\xi - x - \mathrm{X}$; $x+\eta$ varie entre x et $\xi-\mathrm{X}$; de sorte que, si nous supposons x compris entre o et a, les valeurs de B_n utilisées dans le calcul du second membre sont celles que ce polynome prend dans l'intervalle (o, a). Nous supposerons encore que l'indice n est au moins égal à l'unité. Nous allons définir des fonctions bernoulliennes, d'indice au moins égal à 1, de la variable réelle x variant de $-\infty$ à $+\infty$, par les conditions suivantes :

La fonction bernoullienne $\mathcal{B}_n(x)$ est égale à $\mathrm{B}_n(x)$ dans l'intervalle (o, a), de sorte que dans le crochet, l'intégrale complémentaire peut s'écrire aussi bien

$$\int_0^{\xi-x-\mathrm{X}} \mathcal{B}_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta.$$

Nous achèverons de déterminer ces fonctions pour toute valeur réelle finie de la variable en les assujettissant à la condition que, quel que soit X et quelle que soit $f(x)$, on ait

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{X}}&\left[\int_0^{\xi-x-\mathrm{X}} \mathcal{B}_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta\right]\\ &= \delta_{\mathrm{X}}\left[\int_0^{+\infty} \mathcal{B}_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta\right],\end{aligned}$$

(l'intégrale avec une limite infinie, qui figure au second membre, étant supposé avoir un sens). On aura alors

$$\delta_X\left[\int_{\xi-x-X}^{+\infty} \mathfrak{B}_n(x+\eta)\, f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta\right]=0,$$

ou, en écrivant η au lieu de $\xi-\eta$,

$$\delta_X\left[\int_{-\infty}^{x+X} \mathfrak{B}_n(\xi+x-\eta)\, f^{(n+1)}(\eta)\, d\eta\right]=0,$$

ou encore

$$\int_X^{X+a} K(\xi-X)\left[\int_{-\infty}^{x+X} \mathfrak{B}_n(\xi+x-\eta)\, f^{(n+1)}(\eta)\, d\eta\right] d\xi=0.$$

Une inversion de l'ordre des intégrations, supposée légitime, permet d'écrire cette condition sous la forme

$$\int_{-\infty}^{x+X} f^{(n+1)}(\eta)\left[\int_X^{X+a} K(\xi-X)\, \mathfrak{B}_n(\xi+x-\eta)\, d\xi\right] d\eta=0,$$

et le crochet n'est autre, comme il apparaît immédiatement, que

$$\delta_{X+x-\eta}[\mathfrak{B}_n(\xi)].$$

La condition en vue sera donc remplie si, quel que soit u, on a

$$\delta_u[\mathfrak{B}_n(\xi)]=0.$$

Il est à remarquer que, comme n est au moins égal à l'unité, on a bien

$$\delta_0[\mathfrak{B}_n(\xi)]=0.$$

La fonction bernoullienne $\mathfrak{B}_n(x)$, d'indice n, est donc une fonction moyenne-périodique relativement au noyau K *et à la moyenne-période a, égale au polynome bernoullien* $B_n(x)$ *dans l'intervalle* $(0, a)$.

La résolution des équations de Fredolhm-Noerlund conduit donc naturellement à la définition des fonctions moyenne-périodiques, et pose en même temps le problème du prolongement de ces fonctions pour toute valeur réelle de la variable, quand on les connaît sur une moyenne-période.

Supposons possible, pour le moment, ce prolongement, tout au moins en ce qui concerne les fonctions bernoulliennes, et supposons encore que la fonction $f(x)$, possédant des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$, soit de plus telle que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{B}_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta$$

converge uniformément dans tout intervalle fini de valeurs de ξ. Les calculs précédents sont alors légitimes, et l'on peut écrire la formule sommatoire de la manière suivante :

$$f(x+X) = \delta_X \left[\sum_{p=0}^{n} B_p(x) \frac{d^p f}{d\xi^p} - \int_0^{+\infty} \mathcal{B}_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta \right];$$

ce qui montre que, dans les conditions précitées, une solution de

$$f(x+X) = \delta_X[\varphi(\xi)]$$

est donnée par la formule

$$(8) \qquad \varphi(\xi) = \sum_{p=0}^{n} B_p(x) \frac{d^p f}{d\xi^p} - \int_0^{+\infty} \mathcal{B}_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)\, d\eta,$$

où, rappelons-le, x est supposé intérieur à l'intervalle $(0, a)$.

Nous nommerons « *solution principale* » cette solution particulière de l'équation de Fredholm-Noerlund. C'est une sorte de généralisation de la « *Somme* » d'une fonction qui a été considérée par Noerlund; et que ce géomètre a introduit dans la théorie des équations aux différences finies. Une étude plus complète de cette solution principale montre que son analogie avec la *Somme* d'une fonction se poursuit assez loin; on montre, par exemple, sous certaines hypothèses, qu'elle peut s'obtenir par un procédé d'approximations successives donnant une série en général divergente, conduisant cependant à la solution par un passage à la limite convenable. Ceci rappelle une des définitions données par Noerlund.

Nous n'entrerons pas dans tous ces détails, préférant passer, dans le chapitre suivant à l'étude des fonctions moyenne-périodiques dont les propriétés conditionnent l'existence de la solution principale.

Nous définirons auparavant une opération de composition qui nous sera utile.

7. L'opération de composition. — Reprenons une fois de plus la formule sommatoire

$$f(x+X)=\sum_{p=0}^{n} B_p(x)\,\delta_X\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right]-\delta_X\left[\int_0^{\xi-x-X} B_n(x+\eta)\,f^{(n+1)}(\xi-\eta)\,d\eta\right],$$

prenons $x=0$ et $f(X)=e^{\lambda X}$, on a, en utilisant une notation antérieure,

$$\delta_X\left[\frac{d^p f}{d\xi^p}\right]=\lambda^p e^{\lambda X} A(\lambda);$$

il vient, en substituant,

$$1=A(\lambda)\sum_{p=0}^{n}\lambda^p B_p(0)-\lambda^{n+1}e^{-\lambda X}\,\delta_X\left[\int_0^{\xi-X} e^{\lambda(\xi-\eta)}B_n(\eta)\,d\eta\right]$$

Désignons, d'autre part, par

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \ldots,\quad \lambda_i,\quad \ldots,$$

les zéros de la fonction entière $A(\lambda)$, et faisons $\lambda=\lambda_i$ dans la précédente formule; il reste

$$e^{\lambda_i X}=-(\lambda_i)^{n+1}\,\delta_X\left[\int_0^{\xi-X} e^{\lambda_i(\xi-\eta)}B_n(\eta)\,d\eta\right].$$

Quelques transformations simples donnent à ce résultat une forme plus symétrique; changeant η en $\xi-\eta$, on peut d'abord écrire

$$e^{\lambda_i X}=(\lambda_i)^{n+1}\,\delta_0\left[\int_{X+\xi}^{X} e^{\lambda_i\eta}B_n(X+\xi-\eta)\,d\eta\right];$$

enfin en posant $\eta=X+\eta'$, et écrivant ensuite η au lieu de η', une simplification se produit et l'on obtient

$$(9)\qquad 1=-(\lambda_i)^{n+1}\,\delta_0\left[\int_0^{\xi} B_n(\xi-\eta)\,e^{\lambda_i\eta}\,d\eta\right].$$

Cette formule a son intérêt en elle-même, mais elle fait apparaître surtout, en son second membre, une opération importante.

Considérons l'opérateur bilinéaire

$$K[f, g] = \delta_0 \left[\int_0^\xi f(\xi - \eta)\, g(\eta)\, d\eta \right].$$

Il est symétrique par rapport aux fonctions f et g, comme on le voit immédiatement en changeant η en $\xi - \eta$. Son calcul ne fait, de plus, intervenir que les valeurs des fonctions dans l'intervalle $(0, a)$. Quand on fait $K = 1$, on obtient un opérateur qu'on relie facilement au produit scalaire fonctionnel qui joue un rôle si important dans la théorie des systèmes orthogonaux et des séries de Fourier; dans le cas général, la forme quadratique fonctionnelle à quoi se réduit l'opérateur quand on y fait $f = g$, est indéfinie, ce qui enlève tout espoir de démontrer, pour les séries que nous allons rencontrer dans le chapitre suivant, des inégalités analogues à l'inégalité de Bessel.

CHAPITRE II.

LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DES FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES D'UNE VARIABLE.

1. Les exponentielles moyenne-périodiques et les zéros de la fonction $A(\lambda)$. — Il est clair que les exponentielles moyenne-périodiques de la forme $e^{\lambda x}$, s'obtiennent en donnant au coefficient exponentiel λ les valeurs des zéros

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_i, \quad \ldots$$

de la fonction entière

$$A(\lambda) = \delta_0[e^{\lambda\xi}]$$

déjà rencontrée plus haut. On montre bien facilement que cette fonction possède nécessairement une infinité de zéros. On constate d'abord sans peine que son ordre apparent est au plus égal à 1; son genre est donc égal à 0 ou 1, et il sera possible de trouver en tout cas, si l'on suppose que la fonction ne s'annule qu'un nombre fini de fois, une constante ξ_0 telle que

$$\delta_0[e^{\lambda(\xi - \xi_0)}]$$

se réduise à un polynome en λ, ce qui est manifestement impossible.

Nous aurons dans la suite, l'occasion de montrer une autre propriété de ces zéros, concernant leur répartition dans le plan; c'est à savoir que, tout secteur de sommet origine, limité par deux demi-droites ne comprenant pas entre elles l'axe imaginaire, ne contient qu'un nombre fini de ces points. On peut dire, brièvement, que ces zéros s'accumulent le long de l'axe imaginaire.

Appliquons maintenant l'opérateur bilinéaire $K[f, g]$, défini à la fin du chapitre précédent, aux deux exponentielles $e^{\lambda x}$ et $e^{\mu x}$, λ et μ étant différents. Il vient

$$\int_0^\xi e^{\lambda(\xi-\eta)} e^{\mu\eta}\, d\eta = \frac{e^{\lambda\xi} - e^{\mu\xi}}{\lambda - \mu};$$

puis

$$K[e^{\lambda\xi}, e^{\mu\xi}] = \frac{A(\lambda) - A(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

Si les fonctions $e^{\lambda x}$ et $e^{\mu x}$ sont supposées moyenne-périodiques,

$$\lambda = \lambda_i, \qquad \mu = \lambda_j \qquad (i \neq j);$$

on a

$$K[e^{\lambda_i\xi}, e^{\lambda_j\xi}] = 0.$$

Les fonctions moyenne-périodiques exponentielles forment donc un système orthogonal relativement à l'opérateur K; ce système n'est d'ailleurs pas normé, on a en effet

$$K[e^{\lambda_i\xi}, e^{\lambda_i\xi}] = A'(\lambda_i);$$

en particulier celles de ces fonctions qui correspondent à des zéros multiples de $A(\lambda)$, sont isotropes par rapport à l'opérateur K.

Considérons maintenant une fonction moyenne-périodique $f(x)$, obtenue en faisant la somme d'un nombre fini d'exponentielles moyenne-périodiques

$$f(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n x};$$

les racines λ_i de $A(\lambda)$ qui figurent au second membre étant supposées simples, il est clair que l'on a

$$\alpha_i = \frac{K[f(\xi), e^{\lambda_i\xi}]}{A'(\lambda_i)}.$$

Avant de passer, dans le paragraphe suivant, à l'extension de ce dernier résultat, extension qui forme la conclusion essentielle de ce Mémoire, nous examinerons encore comment se présente la question de savoir si le système des exponentielles moyenne-périodiques est complet, relativement à l'opérateur K.

Considérons l'ensemble E des fonctions sommables de la variable réelle x dans l'intervalle $(0, a)$, et le sous-ensemble $\mathcal{E}$ de E, des fonctions de moyenne nulle relativement au noyau K, c'est-à-dire telles que

$$\delta_0[f(\xi)] = 0.$$

Un ensemble dénombrable

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n, \quad \ldots$$

de fonctions de E sera dit complet dans E relativement à l'opérateur K, s'il n'existe aucune fonction de E, non presque partout nulle, telle que

$$K[f, \varphi_i] = 0$$

quel que soit i.

De même un ensemble dénombrable

$$\psi_i, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_n, \quad \ldots$$

de fonctions de $\mathcal{E}$ sera dit complet dans $\mathcal{E}$ relativement à l'opérateur K, s'il n'existe aucune fonction de $\mathcal{E}$, non presque partout nulle, telle que

$$K[f, \psi_i] = 0$$

quel que soit i. La distinction des deux ensembles E et $\mathcal{E}$ semble bien nécessaire *a priori*, car les exponentielles moyenne-périodiques appartiennent à $\mathcal{E}$, et nous nous proprosons d'examiner si ces fonctions forment un ensemble complet dans E, ou dans $\mathcal{E}$. La réponse sera donnée à la fin du paragraphe suivant; nous nous contenterons, pour le moment, de démontrer ce théorème :

Si le système (S) *des exponentielles moyenne-périodiques est incomplet dans* E, *il est aussi incomplet dans* $\mathcal{E}$.

Il existe alors une fonction f de E, non presque partout nulle, telle que

$$K[f(\xi), e^{\lambda_i \xi}] = 0$$

quel que soit i. Si $\delta_0[f] = 0$, le théorème est démontré. Sinon, désignons par $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ la suite des primitives de f, nulles pour $x = 0$

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi)\, d\xi$$

et posons

$$\mathfrak{A}(\lambda) = K[f(\xi), e^{\lambda\xi}], \qquad \mathfrak{A}_p(\lambda) = K[F_p(\xi), e^{\lambda\xi}].$$

Ces fonctions $\mathfrak{A}$ sont évidemment des fonctions entières de λ, et l'on trouve, en les développant,

$$\mathfrak{A}(\lambda) = \delta_0[F_1] + \lambda\,\delta_0[F_2] + \ldots + \lambda^n \delta_0[F_{n+1}] + \ldots,$$
$$\mathfrak{A}_p(\lambda) = \delta_0[F_{p+1}] + \lambda\,\delta_0[F_{p+2}] + \ldots + \lambda^n \delta_0[F_{p+n+1}] + \ldots$$

ou

$$\mathfrak{A}_p(\lambda) = \frac{\mathfrak{A}(\lambda)}{\lambda^p} - \sum_{q=1}^{p} \frac{\delta_0[F_q]}{\lambda^{p-q+1}}.$$

Mais, par hypothèse,

$$\mathfrak{A}(\lambda_i) = 0;$$

donc

$$\mathfrak{A}_p(\lambda_i) = -\sum_{q=1}^{p} \frac{\delta_0[F_q]}{(\lambda_i)^{p-q+1}}.$$

Or, nous avons vu dans le précédent chapitre, à propos de la définition de l'opérateur K, que l'on avait

$$K[B_n(\xi), e^{\lambda_i\xi}] = \frac{-1}{(\lambda_i)^{n+1}},$$

ce qui permet d'écrire

$$K[F_p(\xi), e^{\lambda_i\xi}] = \sum_{q=1}^{p} \delta_0[F_q]\, K[B_{p-q}(\xi), e^{\lambda_i\xi}].$$

Si donc on pose

$$\Phi_p(x) = F_p(x) - \sum_{q=1}^{p} \delta_0[F_q]\, B_{p-q}(x),$$

on voit que

$$K[\Phi_p(\xi), e^{\lambda_i\xi}] = 0;$$

de plus, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de Φ_p se réduit à f, car Φ_p et F_p ne diffèrent que par un polynome de degré $p-1$. Enfin on a

$$\delta_0[\Phi_p] = \delta_0[F_p] - \delta_0[F_p] = 0$$

à cause des propriétés fondamentales des polynomes bernoulliens

$$\begin{aligned} &\delta_0[B_n] = 0 \qquad (n \neq 0), \\ &\delta_0[B_0] = 1. \end{aligned}$$

On voit donc que, sous les hypothèses faites, on peut toujours former une suite indéfinie de primitives de f, appartenant à $\mathcal{E}$, et telles que

$$K[\Phi_p(\xi), e^{\lambda_i \xi}] = 0$$

quel que soit i, ce qui prouve que le système des exponentielles moyenne-périodiques est aussi incomplet dans $\mathcal{E}$.

Comme il est bien clair, inversement, que si (S) est complet dans $\mathcal{E}$ il le sera aussi dans E, nous voyons que la distinction que nous avions cru utile de faire entre les ensembles E et $\mathcal{E}$, reste sans objet; la propriété pour (S) d'être complet, ou incomplet, dans $\mathcal{E}$, équivaut à celle d'être complet, ou incomplet, dans E. Nous verrons dans la suite ce qu'il en est exactement.

Notons, en terminant, que les primitives Φ_p de la fonction f, utilisées dans la précédente démonstration, sont susceptibles d'une expression simple; une application immédiate de la formule sommatoire donne en effet

$$\Phi_p(x) = -\delta_0\left[\int_0^{\xi-x} B_{p-1}(x+\eta)\, f(\xi-\eta)\, d\eta\right].$$

2. Les développements de Fourier en exponentielles moyenne-périodiques. — La propriété fondamentale de l'opérateur K, relativement aux exponentielles moyenne-périodiques conduit évidemment à former, pour toute fonction sommable de la variable réelle x, définie dans l'intervalle $(0, a)$, les constantes

$$\alpha_i = \frac{K[f(\xi), e^{\lambda_i \xi}]}{\Lambda'(\lambda_i)},$$

et à étudier la série

$$\sum_i \alpha_i e^{\lambda_i x}.$$

Nous allons montrer dans ce paragraphe que, dans des cas étendus, cette série est convergente et a pour somme $f(x)$, pourvu que la condition essentielle de moyenne-périodicité

$$\delta_0[f(\xi)] = 0$$

soit remplie.

Cauchy le premier a considéré des développements en exponentielles $e^{\lambda_i x}$, les λ_i étant les zéros d'une fonction entière; M. Picard, après lui, a perfectionné certains points du raisonnement de Cauchy, la démonstration qui va suivre s'inspire des mêmes principes que celles des auteurs précédents; cependant les circonstances dans lesquelles nous sommes placé sont notablement plus compliquées, et des modifications importantes ont été nécessaires.

Nous supposerons que la fonction à développer $f(x)$, est à variation bornée, de même que le noyau K; nous serons amené dans la suite à faire d'autres hypothèses supplémentaires sur ce noyau, nous les préciserons chemin faisant.

Considérons la fonction

$$F(z, x) = \frac{e^{zx}}{A(z)} \delta_0 \left[\int_0^{\xi} e^{z(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta \right];$$

c'est une fonction méromorphe de z ayant pour pôles les zéros de $A(z)$; supposons d'abord ces zéros tous simples; alors le résidu de $F(z, x)$ correspondant à l'un d'eux λ, est

$$\frac{e^{\lambda x}}{A'(\lambda)} \delta_0 \left[\int_0^{\xi} e^{\lambda(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta \right].$$

Soient

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots$$

les zéros de $A(z)$ rangés par ordre de module croissant, soient

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots$$

les rayons d'une série de circonférences

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n, \quad \ldots$$

de centre origine. On suppose que

$$|\lambda_n| < r_n < |\lambda_{n+1}|.$$

(On transformerait aisément cette hypothèse dans le cas où un certain nombre de zéros auraient le même module.) Nous avons alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} F(z, x)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\lambda_k x}}{A'(\lambda_k)}\,\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{\lambda_k(\xi-\eta)} f(\eta)\,d\eta\right].$$

Nous allons étudier l'intégrale qui se trouve au premier membre quand le rayon r_n de C_n augmente indéfiniment. En introduisant l'argument φ de z, cette intégrale s'écrit encore

$$\frac{r_n}{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F[r_n e^{i\varphi}, x]\,e^{i\varphi}\,d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F[-r_n e^{i\varphi}, x]\,e^{i\varphi}\,d\varphi\right].$$

On voit que si, $|z|$ augmentant indéfiniment, $\mathcal{R}(z)$ n'étant pas négatif, la quantité

$$\frac{z}{2}[F(z, x) - F(-z, x)]$$

tend uniformément vers une limite F indépendante de φ, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} F(z, x)\,dz$$

tendra ainsi vers F. Il en sera encore ainsi, si, pour un nombre limité d'arguments φ_0, φ_1, ..., la quantité

$$\frac{z}{2}[F(z, x) - F(-z, x)]$$

n'a pas F pour limite, pourvu qu'elle reste finie dans le voisinage de ces valeurs de φ.

Nous transformerons d'abord l'intégrale à étudier. On a

$$\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{z(\xi-\eta)} f(\eta)\,d\eta\right] = \int_0^{a}\int_0^{\xi} K(\xi)\,e^{z(\xi-\eta)} f(\eta)\,d\eta\,d\xi$$

et, en inversant l'ordre des intégrations,

$$\delta_0\left[\int_0^{\xi} e^{z(\xi-\eta)} f(\eta)\,d\eta\right] = \int_0^{a}\int_{\eta}^{a} K(\xi)\,e^{z(\xi-\eta)} f(\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Posons

$$G_1(z, \eta) = \int_\eta^a K(\xi)\, e^{z\xi}\, d\xi,$$

il vient

$$F(z, x) = \int_0^a e^{z(x-\eta)} \frac{G_1(z, \eta)}{A(z)} f(\eta)\, d\eta.$$

A côté de la fonction $G_1(z, x)$, nous considérerons encore

$$G_2(z, \eta) = A(z) - G_1(z, \eta) = \int_0^\eta e^{z\xi} \xi(k)\, d\xi$$

et étudierons, au lieu de $F(z, x)$, les expressions

$$F_1(z, x) = \int_x^a e^{z(x-\eta)} \frac{G_1(z, \eta)}{A(z)} f(\eta)\, d\eta$$

et

$$F_2(z, x) = \int_0^x e^{z(x-\eta)} \frac{G_2(z, \eta)}{A(z)} f(\eta)\, d\eta.$$

Nous nous appuierons sur le lemme suivant qui est classique :

Soit une expression de la forme

$$\int_0^x e^{-z(x-\eta)} f(\eta)\, d\eta\,;$$

si le module de z devient infini son argument restant compris entre

$$-\frac{\pi}{2} + \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

α étant un nombre positif aussi petit qu'on le veut, mais non nul, on a

$$\mathrm{Lim.}\, z \int_0^x e^{-z(x-\eta)} f(\eta)\, d\eta = f(x - 0),$$

la convergence étant uniforme par rapport à l'argument φ de z, dans l'intervalle indiqué. De plus si la fonction $f(x)$ est continue, la limite est aussi atteinte uniformément par rapport à x, pourvu que $x > a$.

On a des résultats analogues pour une expression de la forme

$$\int_x^b e^{z(x-\eta)} f(\eta)\, d\eta,$$

la limite étant cette fois $f(x+0)$, ou $f(x)$, si la fonction f est continue, et cela uniformément par rapport à $x < b$.

Nous appliquerons ces résultats aux quotients

$$\frac{G_1(z, \eta)}{A(z)} \quad \text{et} \quad \frac{G_2(-z, \eta)}{A(-z)}.$$

On a

$$\frac{G_1(z, \eta)}{A(z)} = \frac{z \displaystyle\int_\eta^a e^{-z(a-\xi)} K(\xi)\, d\xi}{z \displaystyle\int_0^a e^{-z(a-\xi)} K(\xi)\, d\xi},$$

et lorsque $|z|$ devient infiniment grand dans les conditions précitées, le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers $K(a-0)$; le quotient a donc pour limite l'unité, pourvu que

$$K(a-0) \neq 0).$$

De même

$$\frac{G_2(-z, \eta)}{A(-z)} = \frac{z \displaystyle\int_0^\eta e^{-z\xi} K(\xi)\, d\xi}{z \displaystyle\int_0^a e^{-z\xi} K(\xi)\, d\xi}$$

a aussi pour limite l'unité, pourvu que

$$K(0+0) \neq 0.$$

Ces limites sont atteintes uniformément par rapport à l'argument φ de z, et aussi par rapport à η, dans tout intervalle complètement intérieur à $(0, a)$. Or on doit intégrer, dans la suite, ces quotients, par rapport à η, de 0 à a, une difficulté va donc se présenter de ce fait; nous y obvierons par une transformation d'intégrales que nous indiquerons dans un instant; auparavant, tirons du lemme précédent une conséquence utile en ce qui concerne la distribution des zéros de la fonction $A(z)$. Considérons la fonction $\frac{1}{A(z)}$ qui s'écrit encore

$$\frac{z e^{-za}}{z\int_0^a e^{-z(a-\xi)} K(\xi)\, d\xi}$$

et supposons que $|z|$ augmente indéfiniment, le point z se déplaçant dans un secteur de sommet origine, limité par deux demi-droites ne comprenant pas l'axe des y, et ouvert du côté des x positifs; dans ces conditions la fraction précédente tend vers zéro, puisque son dénominateur a une limite non nulle. Si le secteur était ouvert du côté des x négatifs, on écrirait

$$\frac{1}{e^{-z\varepsilon} A(z)} = \frac{z e^{z\varepsilon}}{z\int_0^a e^{z\xi} K(\xi)\, d\xi} \qquad (\varepsilon > 0),$$

et la conclusion serait la même. On voit donc qu'il existe un nombre R positif tel que, dans un tel secteur, $A(z)$ n'ait aucun zéro pour $z > R$, $A(z)$ a donc nécessairement un nombre fini de zéros dans un de ces secteurs, et les zéros de $A(z)$, en nombre infini, s'accumulent bien le long de l'axe imaginaire. C'est ce que nous avions annoncé dans le précédent paragraphe.

Revenons maintenant, après cette remarque, à la démonstration en cours.

Nous écrirons, en faisant une intégration par partie qui introduit des intégrales de Stieltjes,

$$G_1(z, \eta) = -\frac{e^{z\eta} K(\eta)}{z} + H_1(z, \eta), \qquad G_2(z, \eta) = \frac{e^{z\eta} K(\eta)}{z} - H_2(z, \eta)$$

avec

$$H_1(z, \eta) = \frac{e^{az} K(a-0)}{z} - \frac{1}{z}\int_\eta^a e^{z\xi}\, d[K(\xi)],$$

$$H_2(z, \eta) = \frac{K(0+0)}{z} + \frac{1}{z}\int_0^\eta e^{z\xi}\, d[K(\xi)],$$

puis

$$F_1(z, x) = \Phi_1(z, x) - \frac{e^{zx}}{z A(z)}\int_x^a K(\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$F_2(z, x) = -\Phi_2(z, x) + \frac{e^{zx}}{z A(z)}\int_0^x K(\xi) f(\xi)\, d\xi$$

avec

$$\Phi_1(z, x) = \int_x^a e^{z(x-\eta)} \frac{H_1(z, \eta)}{A(z)} f(\eta)\, d\eta,$$

$$\Phi_2(z, x) = \int_0^x e^{z(x-\eta)} \frac{H_2(z, \eta)}{A(z)} f(\eta)\, d\eta.$$

Il est à remarquer que, dans les intégrales de Stieltjes, $K(\xi)$ est maintenant semi-continu, supérieurement et inférieurement, pour $\xi = 0$ et $\xi = a$.

Considérons les quotients

$$\frac{H_1(z, \eta)}{A(z)} \quad \text{et} \quad -\frac{H_2(-z, \eta)}{A(-z)}.$$

Cherchons leurs limites quand $|z|$ devient infiniment grand, avec toujours la condition

$$-\frac{\pi}{2} + \alpha < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad (\alpha > 0).$$

Leurs premiers termes

$$\frac{K(a-0)}{z\displaystyle\int_0^a e^{-z(a-\xi)} K(\xi)\, d\xi} \quad \text{et} \quad \frac{K(0+0)}{z\displaystyle\int_0^a e^{-z\xi} K(\xi)\, d\xi}$$

tendent visiblement vers l'unité, d'après le lemme rappelé plus haut, moyennant l'hypothèse essentielle

$$K(0+0) \neq 0, \qquad K(a-0) \neq 0,$$

et ces premiers termes tendent évidemment vers leurs limites, uniformément par rapport à η, dans tout l'intervalle $(0, a)$, limites comprises.

Passons maintenant aux seconds termes

$$-\frac{\displaystyle\int_\eta^a e^{-z(a-\xi)}\, d[K(\xi)]}{z\displaystyle\int_0^a e^{-z(a-\xi)} K(\xi)\, d\xi} \quad \text{et} \quad \frac{\displaystyle\int_0^\eta e^{-z\xi}\, d[K(\xi)]}{z\displaystyle\int_0^a e^{-z\xi} K(\xi)\, d\xi};$$

leurs dénominateurs ont des limites finies non nulles et sont indépendants de η; quant aux numérateurs, nous allons voir qu'ils tendent vers o, uniformément dans tout l'intervalle $(0, a)$, limites comprises. Considérons par exemple

$$\int_0^\eta e^{-z\xi}\, d[K(\xi)]$$

et mettons $K(\xi)$ sous la forme

$$K(\xi) = K_1(\xi) - K_2(\xi),$$

K_1 et K_2 étant deux fonctions à variation bornée, croissantes. On a

$$\left|\int_0^\eta e^{-z\xi}\, d[K_1(\xi)]\right| \leqq \int_0^\eta |e^{-z\xi}|\, d[K_1(\xi)] \leqq \int_0^\eta e^{-x\xi}\, d[K_1(\xi)]$$
$$\leqq \int_0^a e^{-x\xi}\, d[K_1(\xi)],$$

en posant $z = x + iy$. Il est clair d'autre part que

$$\int_0^a e^{-x\xi}\, d[K_1(\xi)] = e^{-ax} K_1(a-0) - K(0+0) + x\int_0^a e^{-x\xi} K_1(\xi)\, d\xi,$$

et au second membre, quand x devient infiniment grand par valeurs positives, le premier terme tend vers zéro ainsi que la différence des deux derniers. On raisonnerait de façon analogue pour

$$\int_0^\eta e^{-z\xi}\, d[K_2(\xi)], \quad \int_\eta^a e^{-z(a-\xi)}\, d[K_1(\xi)], \quad \int_\eta^a e^{-z(a-\xi)}\, d[K_2(\xi)],$$

et comme les majorations obtenues pour chacune de ces intégrales sont indépendantes de η, notre assertion est bien prouvée; il y a convergence uniforme de

$$\frac{H_1(z, \eta)}{A(z)} \quad \text{et} \quad -\frac{H_2(-z, \eta)}{A(-z)}$$

vers l'unité, quel que soit η dans l'intervalle $(0, a)$, limites comprises. C'est pour assurer ce dernier point que nous avons dû substituer H_1 et H_2 respectivement à G_1 et G_2.

Étudions maintenant le comportement de $z\Phi_1(z, x)$. On a

$$z\Phi_1(z, x) = z\int_x^a e^{z(x-\eta)} \frac{H_1(z, \eta)}{A(z)} f(\eta)\, d\eta,$$

$\frac{H_1(z, \eta)}{A(z)}$ tend uniformément vers l'unité dans tout l'intervalle d'intégration, et, d'après le lemme,

$$\lim \left[z \int_x^a e^{z(x-\eta)} f(\eta)\, d\eta \right] = f(x+0).$$

On prévoit que la limite va être $f(x+0)$; en effet, ε positif aussi petit qu'on le veut étant donné, on peut trouver R positif tel que

$$|z| > R$$

entraîne

$$\left| \frac{H_1(z, \eta)}{A(z)} - 1 \right| < \varepsilon,$$

et cela, quels que soient η et φ

$$0 \leqq \eta \leqq a, \qquad -\frac{\pi}{2} + \alpha < \varphi < \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Posons alors

$$f(\eta) = f_1(\eta) - f_2(\eta),$$

f_1 et f_2 étant deux fonctions à variation bornée, croissantes et positives, et considérons, par exemple, la quantité

$$I_1 = z \int_x^a e^{z(x-\eta)} \left[\frac{H_1(z, \eta)}{A(z)} - 1 \right] f_1(\eta)\, d\eta,$$

on a

$$|I_1| \leqq \varepsilon r \int_x^a e^{r(x-\eta)\cos\varphi} f_1(\eta)\, d\eta \leqq \varepsilon r M_1 \int_x^a e^{r(x-\eta)\sin\alpha}\, d\eta < \frac{\varepsilon M_1}{\sin\alpha},$$

M_1 désignant la borne supérieure de $f_1(\eta)$. De même

$$I_2 = z \int_x^a e^{z(x-\eta)} \left[\frac{H_1(z, \eta)}{A(z)} - 1 \right] f_2(\eta)\, d\eta$$

est, en module, inférieure à

$$\frac{\varepsilon M_2}{\sin\alpha},$$

M_2 étant la borne supérieure de $f_2(\eta)$. Il en résulte que

$$\left| z \int_x^a e^{z(x-\eta)} \left[\frac{H_1(z, \eta)}{A(z)} - 1 \right] f(\eta)\, d\eta \right| < \frac{\varepsilon}{\sin\alpha}(M_1 + M_2)$$

peut être rendue aussi petit qu'on le veut, on a bien par suite

$$\lim [z\,\Phi_1(z, x)] = f(x + 0).$$

la limite est atteinte uniformément par rapport à φ, dans tout intervalle complètement intérieur à l'intervalle précité; de plus, elle est aussi atteinte uniformément par rapport à x, dans tout intervalle où $f(x)$ est continue.

De la même façon, on verrait que

$$\lim [z\,\Phi_2(-z, x)] = -f(x - 0)$$

avec les mêmes remarques d'uniformité.

Reste maintenant à étudier le comportement de

$$z\,\Phi_1(-z, x) \quad \text{et} \quad z\,\Phi_2(z, x).$$

On a

$$z\,\Phi_1(-z, x) = \int_x^a z e^{-z(x-\eta)} \frac{H_1(-z, \eta)}{A(-z)} f(\eta)\, d\eta$$

et

$$z e^{-z(x-\eta)} \frac{H_1(-z, \eta)}{A(-z)} = \frac{e^{-z(a+x-\eta)} K(a-0)}{A(-z)} - \frac{e^{-zx}}{A(-z)} \int_\eta^a e^{-z(\xi-\eta)}\, d[K(\xi)].$$

Comme on le sait

$$\lim [z\,A(-z)] = K(0 + 0);$$

d'autre part

$$a \geqq \eta \geqq x > 0,$$

donc

$$\lim [z e^{-z(a+x-\eta)}] = 0;$$

si l'on remarque même que

$$|z e^{-z(a+x-\eta)}| \leqq |z e^{-zx}|,$$

on voit que le premier terme tend vers zéro uniformément par rapport à η dans l'intervalle

$$x \leqq \eta \leqq a.$$

Considérons maintenant le second terme, et en particulier son numérateur, introduisons encore les fonctions croissantes $K_1(\xi)$ et $K_2(\xi)$. On a

$$\left| \int_\eta^a e^{-z(\xi-\eta)}\, d[K_1(\xi)] \right| \leqq \int_\eta^a e^{-r(\xi-\eta)\sin\alpha}\, d[K_1(\xi)] \leqq \int_0^a d[K_1(\xi)] = V_1,$$

où V_1 est la variation totale positive de $K_1(z)$. Il s'ensuit

$$\left|\int_{\eta}^{a} e^{-z(\xi-\eta)}\, d[K(\xi)]\right| \leqq V_1 + V_2,$$

où V_2 est la variation totale positive de $K_2(z)$. Cela suffit à prouver que

$$z e^{-zv}\int_{\eta}^{a} e^{-z(\xi-\eta)}\, d[K(\xi)]$$

tend vers zéro uniformément par rapport à η, quand $|z|$ devient infiniment grand. Donc

$$z e^{-z(x-\eta)} \frac{H_1(-z, \eta)}{A(-z)} \quad \text{et} \quad z e^{z(x-\eta)} \frac{H_2(z, \eta)}{A(z)}$$

tendent aussi uniformément vers zéro par rapport à η (dans l'intervalle $x \leqq \eta \leqq a$ pour la première de ces expressions, dans l'intervalle $0 \leqq \eta \leqq x$ pour la seconde). Il est supposé essentiellement

$$0 < x < a.$$

Passons maintenant à

$$z\,\Phi_1(-z, x), \quad z\,\Phi_2(z, x).$$

$z\, e^{-z(x-\eta)} \dfrac{H_1(-x, \eta)}{A(-z)}$ tendant vers zéro uniformément par rapport à η, on peut prendre z assez grand en module pour que le module de cette expression soit inférieur à ε dans tout l'intervalle d'intégration; alors

$$|z\,\Phi_1(-z, x)| < \varepsilon a M.$$

M étant la borne supérieure de $|f(\xi)|$. On voit que $z\Phi_1(-z, x)$ comme $z\Phi_2(z, x)$ tendent vers zéro, uniformément par rapport à x, dans l'intervalle

$$0 < x < a.$$

En rassemblant ces résultats, nous constatons que les expressions

$$\frac{z}{2}[\Phi_1(z, x) - \Phi_1(-z, x)], \qquad \frac{z}{2}[\Phi_2(z, x) - \Phi_2(-z, x)]$$

tendent, l'une vers $\frac{1}{2}f(x+0)$, l'autre vers $\frac{1}{2}f(x-0)$, quand $|z|$ devient infiniment grand, et cela, uniformément par rapport à φ, pourvu que

$$-\frac{\pi}{2}+\alpha<\varphi<\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

De plus, dans tout intervalle où $f(x)$ est continue, les deux expressions tendent vers $f(x)$, et cela uniformément par rapport à x, dans cet intervalle.

Il faut maintenant examiner ce qui se passe quand l'argument φ de z tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$.

Nous admettrons provisoirement qu'il est possible de choisir la suite des rayons

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots$$

des circonférences

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n, \quad \ldots$$

de telle sorte que les quantités $r_p A(ir_p)$ soient bornées inférieurement en module par un nombre positif.

Il suffira d'examiner ce qui se passe quand z est purement imaginaire. Alors, pour un η déterminé, les quantités

$$\frac{H_1(iy, \eta)}{A(iy)}, \quad \frac{H_2(iy, \eta)}{A(iy)}$$

sont bornées supérieurement quand y devient infiniment grand en prenant les valeurs

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_p, \quad \ldots.$$

On a en effet, par exemple

$$|H_1(iy, \eta)| = \frac{1}{|y|}\left|\left[K(a-0)-\int_\eta^a e^{iy\xi}\,d[K(\xi)]\right]\right| \leqq \frac{1}{|y|}[K(a-0)|+2V],$$

V étant la variation totale de $K(\xi)$, dans l'intervalle $(0, a)$. Ceci par application du premier théorème de la moyenne aux intégrales de Stieltjes. Les quotients

$$\frac{H_1(iy, \eta)}{A(iy)}, \quad \frac{H_2(iy, \eta)}{A(iy)}$$

sont donc bien bornés supérieurement en modules et cela, quel que soit η, pourvu que y prenne la suite des valeurs

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_p, \quad \ldots.$$

Il vient ensuite, comme $H_1(iy, \eta)$ est évidemment une fonction à variation bornée de η $\left(\text{qui d'ailleurs tend uniformément vers zéro avec } \frac{1}{|y|}\right)$,

$$iy\,\Phi_1(iy, x) \doteq \frac{H_1(iy, x)}{A(iy)} f(x) - e^{iy(x-a)} \frac{H_1(iy, a)}{A(iy)} f(a)$$
$$- \int_x^a e^{iy(x-\eta)}\, d\left[\frac{H_1(iy, \eta)}{A(iy)} f(\eta)\right],$$

par une intégration par partie évidente. La portion toute intégrée est bornée supérieurement, quel que soit x, d'après ce qui précède. Quant à l'intégrale de Stieltjes restante, elle est, en module, inférieure à deux fois la variation totale de

$$(P + Q) f(\eta)$$

en posant

$$\frac{H_1(iy, \eta)}{A(iy)} = P + iQ$$

et cette dernière variation totale est aussi bornée. Nous voyons donc que $iy\Phi_1(iy, x)$ reste fini quand $|y|$ devient infiniment grand dans les conditions précitées. Un raisonnement analogue prouve qu'il en est de même de

$$iy\,\Phi_1(-iy, x), \quad iy\,\Phi_2(iy, x), \quad iy\,\Phi_2(-iy, x).$$

Dès lors, le raisonnement indiqué plus haut, montre que les limites pour n infini, des intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \Phi_1(z, x)\, dz \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \Phi_2(z, x)\, dz$$

sont respectivement $\frac{1}{2}f(x + 0)$ et $\frac{1}{2}f(x - 0)$; de sorte que, posant

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \Phi(z, x)\, dz$$

a pour limite

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Dans tout intervalle où $f(x)$ est continue, la limite est $f(x)$, et elle est atteinte uniformément par rapport à x, dans cet intervalle.

Il est maintenant nécessaire de montrer que le choix de la suite

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_p, \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions que nous avons précisées, est possible.

Partons de la formule d'intégration par partie

$$iy\,A(iy) = iy\int_0^a e^{iy\xi}\,K(\xi)\,d\xi = e^{iay}\,K(a-0) - K(0+0) - \int_0^a e^{iy\xi}\,d[K(\xi)],$$

et considérons l'intégrale de Stieltjes

$$\int_0^a e^{iy\xi}\,d[K(\xi)].$$

Examinons successivement diverses hypothèses :

a. $K(z)$ *est continue, dérivable, et sa dérivée est à variation bornée.* — Alors

$$\int_0^a e^{iy\xi}\,d[K(\xi)] = \int_0^a e^{iy\xi}\,K'(\xi)\,d\xi,$$

soit

$$K'(\xi) = K'_1(\xi) - K'_2(\xi).$$

K'_1 et K'_2 étant décroissantes, le deuxième théorème de la moyenne donne

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{iy\xi}\,K'_1(\xi)\,d\xi &= \int_0^a \cos y\xi\,K'_1(\xi)\,d\xi + i\int_0^a \sin y\xi\,K'_1(\xi)\,d\xi \\ &= K'_1(0+0)\int_0^\alpha \cos y\xi\,d\xi + K'_1(a-0)\int_\alpha^a \cos y\xi\,d\xi \\ &\quad + i\left[K'_1(0+0)\int_0^\beta \sin y\xi\,d\xi + K'_1(a-0)\int_\beta^a \sin y\xi\,d\xi\right],\end{aligned}$$

α et β étant convenablement choisis. Les quatre intégrales qui figurent au second membre tendent vers 0 avec $\frac{1}{|y|}$; de même pour les termes en $K'_2(\xi)$ de sorte que $iyA(iy)$ a pour valeur asymptotique

$$e^{iay}K(a-0)-K(0+0);$$

ceci suffit à prouver que le choix de la suite

$$r_1,\quad r_2,\quad \ldots,\quad r_p,\quad \ldots$$

est alors possible.

b. $K(\xi)$, *à variation bornée est absolument continu.* — Soit $'K(\xi)$ sa presque dérivée. C'est une fonction, déterminée à un ensemble de mesure nulle près, qu'on sait seulement être intégrable au sens de Riemann; on a encore

$$\int_0^a e^{iy\xi}d[K(\xi)]=\int_0^a e^{iy\xi}\,'K(\xi)\,d\xi.$$

Si $'K(\xi)$ est bornée, l'intégrale tend encore vers zéro. C'est une propriété classique des coefficients d'une série trigonométrique. Si $'K(\xi)$ n'est pas bornée, et si l'ensemble des points où $'K(\xi)$ devient infinie est de mesure nulle, on sait qu'il en est encore de même, pourvu toutefois que $|'K(\xi)|$ soit aussi intégrale au sens de Riemann.

Ces conditions étant supposées remplies, le raisonnement s'achève comme dans le cas précédent.

c. Cas général. — $K(\xi)$ est seulement supposé à variation bornée; soit $\mathcal{K}(\xi)$, sa partie continue, on a

$$iy\,A(iy)=e^{iay}K(a-0)-K(0+0)-\sum_n k_n e^{iy\xi_n}-\int_0^a e^{iy\xi}d[\mathcal{K}(\xi)];$$

les k_n sont les sauts totaux de $K(\xi)$ en ses points de discontinuité. La série des $|k_n|$ est convergente, et l'ensemble des termes du second membre en dehors de l'intégrale de Stieltjes, forme une série uniformément convergente de fonctions périodiques de y; la somme de cette série sera donc presque-périodique, le choix des r_p est évidemment possible pour cette fonction; il le sera aussi pour $iy\,A(iy)$ si l'intégrale de Stieltjes complémentaire tend vers zéro, il en sera certainement ainsi quand $\mathcal{K}(\xi)$ satisfera aux conditions du paragraphe *b.*

Achevons maintenant notre démonstration, ce qui n'offre plus d'ailleurs de difficulté. Posons

$$\mathcal{F}(z, x) = F_1(z, x) - F_2(z, x) = \Phi(z, x) - \frac{e^{zx}}{z\,A(z)}\delta_0[f(\xi)],$$

d'après les valeurs adoptées plus haut pour F_1 et E_2. Examinons si

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\mathcal{F}(z, x)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\Phi(z, x)\,dz - \delta_0[f(\xi)]\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{e^{zx}}{z\,A(z)}\,dz$$

a une limite. Le cas de la première intégrale du second membre a été résolu plus haut. Pour la seconde, on est amené à étudier le comportement de

$$\frac{e^{zx}}{A(z)}$$

quand $|z|$ devient infini. Nous avons déjà vu que cette quantité tendait vers zéro, pourvu que

$$-\frac{\pi}{2} + \alpha < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \text{ou} \qquad \frac{\pi}{2} + \alpha < \operatorname{Arg} z < \frac{3\pi}{2} - \alpha \qquad (\alpha > 0);$$

mais d'autre part $\frac{e^{ixy}}{A(iy)}$ n'est pas bornée quand $|y|$ devient infini, $A(iy)$ tend alors vers zéro, l'intégrale est donc divergente. Il en sera de même pour

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\mathcal{F}(z, x)\,dz,$$

à moins que $\delta_0[f(\xi)]$ ne soit nul; dans ce dernier cas, et seulement dans ce cas, l'intégrale convergera, et aura pour limite

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Cette limite devient $f(x)$, et est atteinte uniformément, dans tout intervalle où $f(x)$ est continue.

Passons maintenant au calcul des résidus de $\mathcal{F}(z, x)$. Soit d'abord λ un zéro simple de $A(\lambda)$. Le résidu de $F_1(z, x)$ est

$$\frac{1}{A'(\lambda)}\int_x^a e^{\lambda(x-\eta)}\,G_1(\lambda, \eta)\,f(\eta)\,d\eta;$$

celui de $F_2(z, x)$ est de même

$$\frac{1}{A'(\lambda)}\int_0^x e^{\lambda(x-\eta)}\, G_2(\lambda, \eta)\, f(\eta)\, d\eta,$$

mais comme $A(\lambda)$ est nul, il est clair que

$$G_2(\lambda, \eta) = - G_1(\lambda, \eta).$$

Le résidu de $\mathcal{F}(z, x)$ est donc

$$\frac{1}{A'(\lambda)}\int_0^a e^{\lambda(x-\eta)}\, G_1(\lambda, \eta)\, f(\eta)\, d\eta$$

égal aussi à

$$\frac{e^{\lambda x}}{A'(\lambda)}\,\delta_0\left[\int_0^\xi e^{\lambda(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta\right].$$

Plus généralement examinons le cas où λ est une racine multiple d'ordre n de $A(\lambda)$. Le résidu de $F_1(z, x)$ est alors

$$\frac{n!}{A^{(n)}(\lambda)}\int_x^a \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left[e^{\lambda(x-\eta)}\, G_1(\lambda, \eta)\right] f(\eta)\, d\eta,$$

et celui de $F_2(z, x)$ est

$$\frac{n!}{A^{(n)}(\lambda)}\int_0^x \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left[e^{\lambda(x-\eta)}\, G_2(\lambda, \eta)\right] f(\eta)\, d\eta,$$

mais

$$G_2(z, \eta) = A(z) - G_1(z, \eta),$$

et pour $z = \lambda$, $A(z)$ ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées sont nulles, on a donc, aussi bien, comme résidu de $F_2(z, x)$

$$-\frac{n!}{A^{(n)}(\lambda)}\int_0^x \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left[e^{\lambda(x-\eta)}\, G_1(\lambda, \eta)\right] f(\eta)\, d\eta,$$

de sorte que le résidu de $F(z, x)$ peut s'écrire

$$\frac{n!}{A^{(n)}(\lambda)}\int_0^a \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left[e^{\lambda(x-\eta)}\, G_1(\lambda, \eta\right] f(\eta)\, d\eta,$$

ou encore

$$\frac{n!}{\mathrm{A}^{(n)}(\lambda)}\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left\{\delta_0\left[\int_0^\xi e^{\lambda(x+\xi-\eta)}f(\eta)\,d\eta\right]\right\}$$
$$=\frac{n!\,e^{\lambda x}}{\mathrm{A}^{(n)}(\lambda)}\delta_0\left[\int_0^\xi (x+\xi-\eta)^{n-1}e^{\lambda(\xi-\eta)}f(\eta)\,d\eta\right].$$

Soient alors

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \ldots,\quad \lambda_p,\quad \ldots$$

les zéros de $\mathrm{A}(z)$ rangés par ordre de module croissant; soient

$$n_1,\quad n_2,\quad \ldots,\quad n_p,\quad \ldots,$$

respectivement, les ordres de multiplicité de ces racines. La limite, pour p infini, de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_p}\mathcal{F}(z,\,x)\,dz,$$

limite qui existe si $\delta_0[f]$ est nul, est la somme de la série, alors convergente

$$(1)\qquad \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(n_p)!\,e^{\lambda_p x}}{\mathrm{A}^{(n_p)}(\lambda_p)}\delta_0\left[\int_0^\xi (x+\xi-\eta)^{n_p-1}e^{\lambda_p(\xi-\eta)}f(\eta)\,d\eta\right],$$

somme égale, d'autre part à

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Dans tout intervalle où $f(x)$ est continue, la série est uniformément convergente et a pour somme $f(x)$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Considérons la classe des fonctions moyenne-périodiques à une variable, définies par le noyau $\mathrm{K}(x)$ *et l'intervalle* $(0,\,a)$. *Nous supposons :*

1° *Que le noyau* $\mathrm{K}(x)$ *est à variation bornée;*

2° *Que* $\mathrm{K}(0+0)$ *ainsi que* $\mathrm{K}(a-0)$ *sont différents de zéro;*

3° *Que la partie continue* $\mathcal{K}(x)$ *de* $\mathrm{K}(x)$ *est absolument continue, la presque-dérivée* $'\mathcal{K}(x)$ *de* $\mathcal{K}(x)$, *ayant une valeur absolue intégrable au sens de Riemann, l'ensemble des points où cette presque-dérivée devient infinie étant, de plus, de mesure nulle.*

Soit alors $f(x)$ *une fonction à variation bornée,* (*réelle ou non*), *vérifiant la condition essentielle*

$$\delta_0[f(\xi)] = 0.$$

La série (1) *est convergente dans l'intervalle*

$$0 < x < a,$$

et elle a pour somme

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Cette série converge uniformément dans tout intervalle intérieur à l'intervalle précédent, pourvu que, dans cet intervalle partiel, la fonction $f(x)$ soit continue : sa somme, dans cet intervalle, est $f(x)$.

La série (1) procède suivant des exponentielles moyenne-périodiques, seulement lorsque toutes les racines λ_p de $A(\lambda)$ sont simples. Dans le cas contraire, cette série contient encore des termes en

$$x^q e^{\lambda x},$$

l'exposant entier et positif q étant inférieur à l'ordre de multiplicité de la racine λ. Il est facile de montrer que, λ étant une racine multiple d'ordre n, les fonctions $x^q e^{\lambda x}$ sont moyenne-périodiques lorsque q est inférieur à n. En effet, la dérivée $q^{\text{ième}}$ de $A(z)$ est

$$\int_0^a \xi^q K(\xi) e^{z\xi} d\xi;$$

elle est nulle pour $z = \lambda$, racine multiple d'ordre supérieur à q, on peut donc écrire

$$\delta_0[\xi^q e^{\lambda\xi}] = 0.$$

De même on aura

$$\delta_x[\xi^q e^{\lambda\xi}] = e^{\lambda x}\delta_0[(x+\xi)^q e^{\lambda\xi}] = e^{\lambda x}\sum_{r=0}^{q}\frac{q!}{r!(q-r)!}x^r\delta_0[\xi^{q-r}e^{\lambda\xi}] = 0,$$

ce qui achève de prouver notre assertion.

Le développement (1) procède donc, dans tous les cas, suivant des exponentielles moyenne-périodiques, et suivant des dérivées de ces exponentielles par rapport au coefficient λ de la variable dans l'exposant, dérivées qui sont aussi moyenne-périodiques.

Le théorème précédent permet de répondre à la question que nous posions à la fin du paragraphe précédent; de savoir si le système des exponentielles moyenne-périodiques est ou non complet par rapport à l'opérateur K. Bornons-nous au champ des fonctions à variation bornée dans l'intervalle (o, a), et supposons que toutes les racines λ_p soient simples. Il est clair que le système des exponentielles moyenne-périodiques sera complet dans le champ des fonctions à variation bornée appartenant à l'ensemble que nous avions appelé $\mathcal{E}$; une telle fonction est en effet développable en série convergente d'exponentielles moyenne-périodiques, et si, pour cette fonction, tous les opérateurs

$$\mathrm{K}[f(\xi), e^{\lambda_p \xi}]$$

donnaient un résultat nul, la série auraient nécessairement pour somme zéro; la fonction ne pourrait être qu'identiquement nulle, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle.

Il en résulte, comme nous l'avons vu, que le système des exponentielles moyenne-périodiques est aussi complet dans le champ total des fonctions à variation bornée sur l'intervalle (o, a).

Il serait facile d'étendre ce résultat au cas général où les racines λ_p ne sont pas toutes simples; il suffirait d'adjoindre aux exponentielles moyenne-périodiques, certaines fonctions de la forme $x^q e^{\lambda_p x}$, et de modifier convenablement, pour ces fonctions, l'opérateur K. Nous ne nous y attarderons pas.

3. Le développement des fonctions moyenne-périodiques. — Nous avons donné, dans le paragraphe précédent, le développement d'une fonction donnée dans l'intervalle (o, a), à variation bornée dans cet intervalle et satisfaisant à la condition

$$\delta_0[f(\xi)] = 0.$$

Considérons maintenant une fonction moyenne-périodique $f(x)$, donnée de $-\infty$ à $+\infty$, qui soit à variation bornée dans tout intervalle fini. Formons pour cette fonction, la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(n_p)!\, e^{\lambda_p x}}{\mathrm{A}^{(n_p)}(\lambda_p)} \delta_\alpha \left[\int_\alpha^\xi (x+\xi-\eta)^{n_p-1} e^{\lambda_p(\xi-\eta)} f(\eta)\, d\eta \right].$$

Le calcul de ses coefficients ne fait intervenir que les valeurs de $f(x)$

dans l'intervalle

$$\alpha, \quad \alpha + a.$$

Changeons ξ en $\alpha + \xi$, et η en $\alpha + \eta$, cette série s'écrit encore

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(n_p)!\, e^{\lambda_p x}}{A^{(n_p)}(\lambda_p)} \delta_0 \left[\int_0^{\xi} (x + \xi - \eta)^{n_p - 1} e^{\lambda_p(\xi - \eta)} f(\alpha + \eta)\, d\eta \right]$$

et, comme

$$\delta_0[f(\alpha + \xi)] = \delta_\alpha[f(\xi)] = 0,$$

elle est convergente, d'après le théorème général, dans l'intervalle

$$0 < x < a$$

et a pour somme

$$\frac{1}{2}[f(\alpha + x + 0) + f(\alpha + x - 0)].$$

Si dans ce développement, nous changeons x en $x - \alpha$, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[f(x + 0) - f(x - 0) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(n_p)!\, e^{\lambda_p(x-\alpha)}}{A^{(n_p)}(\lambda_p)} \delta_0 \left[\int_0^{\xi} (x - \alpha + \xi - \eta)^{n_p - 1} e^{\lambda_p(\xi - \eta)} f(\alpha + \eta)\, d\eta \right] \end{aligned}$$

pour

$$\alpha < x < a + \alpha.$$

Transformons, dans chacun des termes, le coefficient de l'exponentielle; écrivons $\alpha + \eta$ au lieu η, il prend la forme

$$\frac{(n_p)!\, e^{\lambda_p x}}{A^{(n_p)}(\lambda_p)} \delta_0 \left[\int_\alpha^{\alpha + \xi} (x + \xi - \eta)^{n_p - 1} e^{\lambda_p(\xi - \eta)} f(\eta)\, d\eta \right].$$

Considérons maintenant la différence

$$\begin{aligned} &\delta_0 \left[\int_\alpha^{\alpha + \xi} (x + \xi - \eta)^{n_p - 1} e^{\lambda_p(\xi - \eta)} f(\eta)\, d\eta \right] \\ &- \delta_0 \left[\int_0^{\xi} (x + \xi - \eta)^{n_p - 1} e^{\lambda_p(\xi - \eta)} f(\eta)\, d\eta \right] \\ = \;&\delta_0 \left[\int_\xi^{\alpha + \xi} (x + \xi - \eta)^{n_p - 1} e^{\lambda_p(\xi - \eta)} f(\eta)\, d\eta \right] \\ &- \delta_0 \left[\int_0^{\alpha} (x + \xi - \eta)^{n_p - 1} e^{\lambda_p(\xi - \eta)} f(\eta)\, d\eta \right]; \end{aligned}$$

elle s'écrit encore, en changeant η en $\xi+\eta$ dans la première intégrale du second membre

$$\delta_0\left[\int_0^\alpha (x-\eta)^{n_p-1}e^{-\lambda_p\eta}f(\xi+\eta)\,d\eta\right]-\delta_0\left[\int_0^\alpha (x+\xi-\eta)^{n_p-1}e^{\lambda_p(\xi-\eta)}f(\eta)\,d\eta\right];$$

c'est-à-dire, par des transformations simples,

$$\begin{aligned}&\int_0^\alpha (x-\eta)^{n_p-1}e^{-\lambda_p\eta}\,\delta_\eta[f(\xi)]\,d\eta\\ &\quad-\sum_{q=0}^{n_p-1}\frac{(n_p-1)!}{q!(n_p-q-1)!}A^{(q)}(\lambda_p)\left[\int_0^\alpha (x-\eta)^{n_p-q-1}e^{-\lambda_p\eta}f(\eta)\,d\eta\right].\end{aligned}$$

Cette différence est donc identiquement nulle, puisque, comme on le suppose,

$$\delta_x[f(\xi)]$$

est, d'une part, nul quel que soit x, et que, de l'autre, $A(z)$, ainsi que ses n_p-1 premières dérivées, sont nulles pour $z=\lambda_p$. Le développement obtenu plus haut s'écrit donc

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\\ &\quad=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(n_p)!\,e^{\lambda_p x}}{A^{(n_p)}(\lambda_p)}\delta_0\left[\int_0^\xi (x+\xi-\eta)^{n_p-1}e^{\lambda_p(\xi-\eta)}f(\eta)\,d\eta\right].\end{aligned}$$

Nous retombons sur la série (1); mais cette fois, le développement est valable pour

$$\alpha<x<\alpha+a,$$

et cela, quel que soit le nombre réel et fini α; le développement est donc valable quel que soit x réel et fini. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Une fonction moyenne-périodique relativement au noyau $K(x)$ *et à l'intervalle* $(0, a)$, *étant donnée, soit* $f(x)$, *supposée à variation bornée dans tout intervalle fini : les hypothèses précitées plus haut sur le noyau* $K(x)$ *étant remplies, on forme la série* (1). *Cette série converge pour toute valeur finie de la variable et elle a pour somme*

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Si dans un intervalle partiel (α, β), *la fonction* $f(x)$ *est continue, la série converge uniformément dans cet intervalle, et y a pour somme* $f(x)$.

Il est à remarquer que le calcul des coefficients de la série (1) ne fait intervenir que les valeurs prises par la fonction dans l'intervalle $(0, a)$.

4. Le prolongement des fonctions moyenne-périodiques. — A la fin du premier chapitre de ce travail, nous avons été conduit à poser le problème du prolongement en moyenne-périodique, pour toute valeur finie de la variable, d'une fonction donnée dans l'intervalle $(0, a)$, et y vérifiant la condition

$$\delta_0[f(\xi)] = 0.$$

Supposant cette fonction à variation bornée, on peut alors, d'après le théorème fondamental, la développer en une série d'exponentielles moyenne-périodiques convergeant dans l'intervalle de définition. Le résultat établi dans le précédent paragraphe permet d'énoncer immédiatement le théorème suivant :

La condition nécessaire pour qu'il soit possible de prolonger la fonction $f(x)$ *donnée dans l'intervalle* $(0, a)$, *en une fonction moyenne-périodique définie pour toute valeur finie et réelle de la variable, qui soit de plus à variation bornée dans tout intervalle fini, est que la série* (1) *soit convergente pour toute valeur finie de* x.

Si, inversement, la série (1) *converge uniformément dans tout intervalle fini, sa somme est une fonction moyenne-périodique, alors continue, qui prolonge la fonction donnée.*

Le problème se ramène donc à l'étude des conditions de convergence des séries de la forme (1). Ces séries ressemblent aux séries de Dirichlet, mais sont plus générales. Le fait que, d'une part, les parties réelles des λ_p ne soient pas nulles, ni peut-être même bornées; et que, de l'autre, les coefficients de i dans les différents λ_p croissent indéfiniment en ayant des signes quelconques, complique considérablement la théorie. En général ces séries, comme les séries de Fourier, ne pourront converger que pour les valeurs réelles de x, et si elles convergent, elles ne convergent pas absolument.

Cependant, dans certains cas, en faisant des hypothèses convenables sur les zéros λ_p (par exemple qu'ils sont tous purement imaginaires, et que, pour un nombre fini d'entre eux seulement, le coefficient de i est positif), on pourra obtenir des résultats plus précis sur les conditions de convergence des séries (1), et partant, sur le problème du prolongement d'une fonction donné en fonction moyenne-périodique d'une classe particulière.

Nous n'envisagerons pas ici, le problème du prolongement de ce point de vue.

Nous préférons reprendre directement la question, en partant de la condition de moyenne-périodicité.

Il s'agit donc, étant donnée $f(x)$ dans l'intervalle $(0, a)$, de déterminer une fonction $F(x)$, pour toute valeur finie réelle de x, telle que l'on ait

$$F(x) = f(x) \qquad (0 \leqq x \leqq a),$$

et aussi

$$\delta_x[F(\xi)] \equiv 0.$$

(Il est bien entendu que la fonction donnée $f(x)$ vérifie la condition $\delta_0[f(\xi)] = 0$.) Déterminons successivement la fonction $F(x)$ dans les intervalles $(a, 2a), (2a, 3a), \ldots$, puis $(-a, 0), (-2a, -a), \ldots$, α étant un nombre compris entre 0 et a, on aura

$$\int_\alpha^a K(\xi-\alpha) f(\xi)\, d\xi + \int_a^{\alpha+a} K(\xi-\alpha) F(\xi)\, d\xi = 0.$$

La fonction

$$\varphi(\alpha) = -\int_\alpha^a K(\xi-\alpha) f(\xi)\, d\xi$$

est connue pour $0 \leqq \alpha \leqq a$; elle est d'ailleurs nulle pour $\alpha = 0$. La fonction $F(x)$ satisfait, dans l'intervalle $(a, 2a)$, à l'équation intégrale de première espèce de Volterra

$$\varphi(\alpha) = \int_a^{a+\alpha} K(\xi-\alpha) F(\xi)\, d\xi.$$

Supposons que cette équation ait une solution unique et déterminée $f_1(z)$; on aura

$$F(x) = f_1(x) \qquad (a < x < 2a),$$

et posant

$$\varphi_1(\alpha) = -\int_{\alpha}^{2a} K(\xi - \alpha) f_1(\xi)\, d\xi \qquad (a < \alpha < 2a),$$

la fonction $F(x)$ sera déterminée dans l'intervalle $(2a, 3a)$ par l'équation

$$\varphi_1(\alpha) = \int_{2a}^{2a+\alpha} K(\xi - \alpha)\, F(\xi)\, d\xi$$

et ainsi de suite. Si maintenant on prend les intervalles négatifs, et si l'on pose

$$\psi(\alpha) = -\int_{0}^{a+\alpha} K(\xi - \alpha) f(\xi)\, d\xi \qquad (-a < \alpha < 0),$$

la fonction $F(x)$ est déterminée dans l'intervalle $(-a, 0)$, par l'équation

$$\psi(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} K(\xi - \alpha)\, F(\xi)\, d\xi.$$

Soit $g_1(\xi)$ la solution de cette dernière, et posons

$$\psi_1(\alpha) = -\int_{-a}^{a+\alpha} K(\xi - \alpha)\, g_1(\xi)\, d\xi \qquad (-2a < \alpha < -a),$$

la fonction $F(x)$ est déterminée dans l'intervalle $(-2a, -a)$, par l'équation

$$\psi_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{-a} K(\xi - \alpha)\, F(\xi)\, d\xi,$$

et ainsi de suite.

Le prolongement est ainsi ramené à la résolution successive d'une infinité d'équations de Volterra de première espèce. L'examen de ces dernières montre immédiatement que la méthode classique de résolution s'appliquera :

1° Quand le noyau $K(\xi)$ aura une dérivée bornée dans l'intervalle $(0, a)$;

2° Quand $K(0)$ et $K(a)$ seront différents de zéro.

Il résulte du paragraphe précédent que, lorsque ces conditions seront remplies la solution $F(x)$ sera donnée par la série (1), qui convergera alors nécessairement pour toute valeur finie de la variable. On remarquera combien cette forme de la solution est différente de celle à laquelle conduirait les méthodes classiques de résolution des équations de Volterra.

Il faut noter aussi, qu'on retrouve, dans la précédente condition 2°, une des hypothèses essentielles qu'il a été nécessaire de faire pour que notre théorème fondamental soit valide.

Le traitement des équations de Volterra à quoi se ramène la question, est beaucoup plus délicat, lorsqu'on ne suppose plus la dérivabilité du noyau, mais seulement qu'il est à variation bornée. Il y a là une question qui n'a pas encore été examinée, nous semble-t-il, et sur laquelle nous comptons bien revenir. Peut-être peut-on espérer que des conditions suffisantes, pour que la résolution soit possible, seront les conditions que nous avons été amené à imposer au noyau $K(x)$, dans le cours de la démonstration de notre théorème fondamental. S'il en était ainsi, la série (1) convergerait quelle que soit la fonction $f(x)$, à variation bornée, pour toute valeur finie de la variable, et sa somme donnerait le prolongement de cette fonction en moyenne-périodique.

5. Le cas des fonctions de plusieurs variables. — Nous voudrions, en terminant ce travail, indiquer quelles sont les difficultés qui se présentent lorsqu'on veut étendre les résultats précédents aux fonctions moyenne-périodiques de plusieurs variables. Il y a là une différence profonde entre les fonctions moyenne-périodiques et les fonctions presque-périodiques, pour lesquelles, comme on sait, cette extension se fait immédiatement.

Il existe toujours dans le cas, par exemple, de deux variables, des exponentielles moyenne-périodiques

$$e^{\lambda x+\mu y}.$$

les coefficients λ et μ vérifiant la condition

$$A(\lambda, \mu) \equiv \delta_{00}[e^{\lambda\xi+\mu\eta}] = 0.$$

Ces exponentielles moyenne-périodiques forment donc, non plus un ensemble dénombrable, mais un ensemble continu. C'est là la différence essentielle. On prévoit qu'il ne sera plus question, cette fois, de développer une fonction moyenne-périodique en une série d'exponentielles mais qu'on pourra sans doute obtenir des expressions intégrales, analogues aux intégrales de Fourier, de la forme

$$\int \alpha(\lambda, \mu) e^{\lambda x + \mu y}\, d\omega.$$

Il semble bien, d'ailleurs, que ces intégrales ne seront pas étendues à toute la variété à deux dimensions

$$A(\lambda, \mu) = 0,$$

mais seulement à des parties de cette variété.

Pour rencontrer des développements en série, analogues, par exemple, au développement d'une fonction de deux variables en une série double de sinus et de cosinus, il faut considérer des fonctions qui sont moyenne-périodiques de deux manières différentes, fonctions qui sont la véritable généralisation des fonctions périodiques de deux variables.

Nous espérons pouvoir aborder ces questions dans l'avenir.