JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. TH. MASLOFF

Sur les solutions quadratiques de l'équation harmonique $(A_{3,2})$

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 14, nº 1-4 (1935), p. 229-232.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1935_9_14_1-4_229_0>

Sur les solutions quadratiques de l'équation harmonique $(A_{3,2})$;

PAR M. A. TH. MASLOFF.

1. Les systèmes de solutions quadratiques de l'équation

$$(A_{3,2}) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \left[-\frac{6}{(u-v)^2} + \frac{2}{(u+v)^2} \right] \theta$$

sont donnés par M. Gambier dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques*, t. IX, 1930, p. 333-361. M. Gambier a obtenu ces solutions en considérant comme plus que vraisemblable que la condition fondamentale

$$I \equiv \Sigma \left\{ u \left(\frac{U'_i}{u} \right)^{(4)} - \left(\frac{U'_i}{u} \right)''' \right\} \left\{ v \left(\frac{V'_i}{v} \right)^{(4)} - \left(\frac{V'_i}{v} \right)''' \right\} = 0$$

est nécessaire [1]. Dans la Note présente je donne la démonstration de la nécessité de cette condition. Soient $\theta_i (i = 1, \ldots, n)$ les solutions quadratiques de l'équation $(A_{3,2})$:

$$\Sigma \theta_i^2 = U(u) + V(v).$$

On sait que l'équation $(A_{3,2})$ est transformée de l'équation

$$(E_1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = -\frac{2}{(u-v)^2} z$$

par la solution particulière $\omega = (u-v)^2(u+v)$ (la transformation

[1] GAMBIER, *loc. cit.*, p. 340.

de Moutard); soient $z_i (i=1, \ldots, n)$ les solutions de cette équation (E_1) qui se transforment en $\theta_i (i=1, \ldots, n)$. D'après mon théorème (*Recueil Math. de la Soc. Math. de Moscou*, t. XXXII, 1925, p. 576), l'expression

$$\frac{1}{(u-v)^2(u+v)}(\Sigma z_i^2 - \Sigma \theta_i^2)$$

est la solution de (E_1), d'où

$$\Sigma z_i^2 = U + V - 2[\varphi_1(u) - \varphi_2(v)](u^2 - v^2) + (\varphi_1' + \varphi_2')(u-v)^2(u+v).$$

Désignons par $y_i (i=1, \ldots, n)$ les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$$

qui se transforment (¹) en $z_i (i=1, \ldots, n)$ par la solution $u-v$. D'après mon résultat (*loc. cit.*, p. 575), l'expression

$$\frac{1}{u-v}(\Sigma y_i^2 - \Sigma z_i^2)$$

doit satisfaire nécessairement à la condition

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left[\frac{1}{u-v}(\Sigma y_i^2 - \Sigma z_i^2)\right] = -\frac{2}{u-v}\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(\Sigma z_i^2).$$

En intégrant nous obtenons

$$\begin{aligned}\Sigma y_i^2 = \Sigma z_i^2 + (u-v)[2uv(\varphi_1' - \varphi_2') \\ + 2v\varphi_1 - 2u\varphi_2 + 3v^2\varphi_1' - 3u^2\varphi_2' + \lambda(u) + \mu(v)].\end{aligned}$$

Dans cette équation remplaçons chaque fonction y_i par son expression

$$y_i = U_{0i}(u) + V_{0i}(v),$$

et dérivons en u, puis en v; nous obtenons

$$\Sigma U''_{0i} V''_{0i} = -6v\varphi_1''' - 6u\varphi_2''' \qquad \Sigma U'''_{0i} V''_{0i} = -6v\varphi_1^{(4)} - 6\varphi_2''',$$
$$\Sigma U''_{0i} V'''_{0i} = -6\varphi_1''' - 6u\varphi_2^{(4)}, \qquad \Sigma U'''_{0i} V'''_{0i} = -6\varphi_1^{(4)} - 6\varphi_2^{(4)},$$

(¹) Darboux, *Théorie des surfaces*, 2ᵉ éd., t. 2, p. 171.

d'où nécessairement

$$\Sigma(u U'''_{0i} - U''_{0i})(v V'''_{0i} - V''_{0i}) = 0 \quad (^1).$$

On pose, d'après M. Gambier,

$$z_i = u'_i + v'_i - \frac{2(u_i - v_i)}{u - v};$$

d'après les propriétés de la transformation de Moutard nous avons

$$U_{0i} = -u'_i \qquad V_{0i} = +v'_i.$$

D'autre part, nous avons (d'après les notations de M. Gambier)

$$u u_i = \frac{dU_i}{du} = U'_i, \qquad v v_i = \frac{dV_i}{dv} = V'_i.$$

En remplaçant dans la formule (1) nous obtenons la condition de M. Gambier $I = 0$.

2. Considérons plus généralement l'équation de Darboux (2)

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = -\frac{2\partial^2 \log[(u-v)\omega]}{\partial u \partial v}\theta,$$

où ω est la solution la plus générale de l'équation (E_1),

$$\omega = \alpha' + \beta' - \frac{2(\alpha - \beta)}{u - v};$$

l'équation $(A_{3,2})$ est le cas particulier de l'équation (D) obtenu pour $\alpha = \frac{u^4}{2}$ et $\beta = \frac{v^4}{2}$.

Nous obtiendrons, si $\alpha''' \neq 0$, $\beta''' \neq 0$, par les mêmes considérations la condition fondamentale

$$\Sigma\left\{\alpha'''\left(\frac{U'_i}{\alpha'''}\right)^{(4)} - \alpha^{(4)}\left(\frac{U'_i}{\alpha'''}\right)'''\right\}\left\{\beta'''\left(\frac{V'_i}{\beta'''}\right)^{(4)} - \beta^{(4)}\left(\frac{V'_i}{\beta'''}\right)'''\right\} = 0$$

pour les fonctions U_i, $V_i (i = 1, \ldots, n)$ qui entrent dans les expres-

(1) Gambier, *loc. cit.*, p. 340.
(2) Darboux. *loc. cit.*, p. 172.

sions des solutions quadratiques

$$\theta_i = \left(\frac{U'_i}{\alpha'''}\right)' - \left(\frac{V'_i}{\beta'''}\right)' - \frac{2U'_i}{\alpha'''}\,\frac{\partial \log[\omega(u-v)]}{\partial v}$$
$$+ \frac{2V'_i}{\beta'''}\,\frac{\partial \log[\omega(u-v)]}{\partial v} + \frac{2}{\omega}(U_i - V_i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

de l'équation (D).

Si $\alpha''' \neq 0$, $\beta''' = 0$, la condition prend une forme plus simple, et se réduit à

$$\Sigma(\alpha''' U'''_{0i} V''_{0i} - \alpha^{(4)} U''_{0i} V''_{0i}) = 0$$

pour les fonctions U_{0i}, V_{0i}; enfin, si $\alpha''' = 0$, $\beta''' = 0$ la condition recherchée se réduit à

$$\Sigma U''_{0i} V''_{0i} = 0,$$

ce qui est évident *a priori*, car (D) devient simplement $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = 0$ et l'on a posé $\theta_i = U'_{0i} + V'_{0i}$.