JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. SOULA

Sur une suite de nombres qui correspond à une fonction sommable

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 13 (1934), p. 93-112.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1934_9_13__93_0>

Sur une suite de nombres qui correspond à une fonction sommable :

PAR M. J. SOULA

(Montpellier).

I.

1. A toute fonction $f(x)$ dont on sait seulement qu'elle est définie et sommable dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$, j'adjoins la suite des primitives

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad f_2(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt, \quad \ldots, \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt, \quad \ldots$$

Je considérerai plus spécialement les quantités

$$c_1 = f_1(a), \quad c_2 = f_2(a), \quad \ldots, \quad c_n = f_n(a), \quad \ldots$$

et je dirai que ce sont là les coefficients intégraux de $f(x)$. On a fait remarquer que si ces nombres sont nuls et si la fonction est continue, elle se réduit à zéro (¹). J'ai encore fait observer que le résultat est le même quand on sait seulement que certaines suites tirées de la suite des c_n ont tous leurs éléments nuls (²). Ces propriétés sont dues à ce que $n!(n-1)!\,c_n$ est la valeur que prend la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction analytique possédant certaines propriétés.

(¹) PICARD, *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*, p. 49.

(²) Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Nancy, 1931.

Je me suis proposé de caractériser exactement cette fonction analytique et de donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle corresponde à une fonction sommable $f(x)$; j'ai obtenu cette condition en supposant que $f(x)$ est borné (n° **8**).

Je signale à nouveau des conditions nécessaires que vérifie la suite des c_n; j'indique un procédé qui permet d'obtenir une telle suite quand on en connaît deux autres par l'application de la formule de Parceval et de M. Hadamard. J'indique la condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier les c_n quand $f(x)$ a son carré sommable (n° **12**).

Il ne me paraît pas absolument impossible que l'emploi des coefficients c_n donne des applications intéressantes en transformant les problèmes relatifs aux fonctions de variables réelles en problèmes sur les fonctions analytiques. J'ai essayé l'application de cette méthode à l'étude de l'équation intégrale de première espèce

$$(\alpha) \qquad f(x) = \int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds.$$

J'obtiens, par un procédé qui est pour ainsi dire évident, une condition pour qu'il y ait des solutions et une détermination de ces solutions en faisant intervenir les coefficients intégraux de $f(x)$ et de $K(x, s)$. On remarquera que les intervalles de variation de x et de s sont sans relation entre eux dans les calculs du n° **11**. Il est d'ailleurs facile de les séparer dans la présentation de la méthode classique de M. Picard [1].

2. Il est bien connu que l'on peut écrire

$$c_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{a} (a-x)^{n-1} f(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{a} t^{n-1} f(a-t)\, dt.$$

On posera

$$\varphi(t) = f(a-t).$$

Donc

$$c_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{a} t^{n-1} \varphi(t)\, dt.$$

Les produits $(n-1)!\, c_n = B_n$ sont les coefficients du développement de

(1) *Voir* Hadamard, *Bull. Soc. math. de Fr.*, t. 52, 1924, p. 657.

Taylor de la fonction analytique

$$\Phi(z) = \int_0^a \frac{\varphi(t)\,dt}{z-t}$$

au voisinage de l'infini; pour nous en assurer dans le cas général où l'on sait seulement que $f(x)$ est sommable, écrivons :

$$\Phi(z) - \left[\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \ldots + n!\,\frac{c_n}{z^{n+1}}\right] = \int_0^a \varphi(t)\,\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}\,\frac{dt}{z-t}.$$

Cette équation est valable dès que z n'est pas sur le segment de l'axe réel défini par $0 \leqq x \leqq a$, segment que je désignerai par L. Si $|z|$ est assez grand, $\left|\frac{t}{z}\right|$ et $\frac{1}{z-t}$ sont bornés; soit $\left|\frac{t}{z}\right| < q$, le deuxième membre est comparable à $q^{n+1}\int_0^a |\varphi(t)|\,dt$; il tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. D'où, au voisinage de l'infini,

$$\Phi(z) = \sum_0^\infty n!\,\frac{c_n}{z^{n+1}}.$$

La fonction $\Phi(z)$ est analytique en tout point qui n'est pas sur L : la vérification se fait immédiatement par l'étude de $\frac{\Phi(z') - \Phi(z)}{z' - z}$ et l'on trouve que la dérivée est $-\int_0^a \frac{\varphi(t)\,dt}{(z-t)^2}$.

5. Partant d'une fonction sommable réelle $f(t) = \varphi(a-t)$, j'étudie $\Phi(z)$ au voisinage du segment L. J'ai $\Phi(z) = X - iY$, avec

$$\Phi(p+iq) - \Phi(p-iq) = -2iq\int_0^a \frac{\varphi(t)\,dt}{(p-t)^2+q^2} = -2iY,$$

$$\Phi(p+iq) + \Phi(p-iq) = 2\int_0^a \frac{\varphi(t)(p-t)}{(p-t)^2+q^2}\,dt = 2X.$$

Si $\varphi(t)$ est une fonction continue, Y tend vers $\pi\varphi(p)$ lorsque q tend vers zéro, p restant fixe [1]. Pour traiter le cas où $\varphi(t)$ est seulement

---

[1] PICARD, *loc. cit.*

sommable au sens de M. Lebesgue, je pose :

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(x)\,dx,$$

et je transforme Y (¹) :

$$(2)\qquad Y = -2q\int_0^a \frac{\psi(t)(p-t)}{[(p-t)^2+q^2]^2}\,dt - \frac{q\,\psi(a)}{(p-a)^2+q^2}.$$

Soit $0 < p < a$, posons :

$$h(t) = \frac{\psi(t)-\psi(p)}{t-p};$$

admettons que $h(t)$ reste fini quand t varie entre 0 et a : c'est ce qui arrivera, en particulier, quand $\psi(t)$ admet une dérivée pour $t=p$, c'est-à-dire presque partout. Pour $t \neq p$, $h(t)$ est continue, l'intégrale qui figure dans (2) est une intégrale de Riemann à laquelle on peut appliquer le premier théorème de la moyenne dans chacun des deux intervalles séparés par la valeur p.

$$\begin{aligned} Y = 2q&\left[h(\xi_1)\int_0^p \frac{(t-p)^2\,dt}{(t-p)^2+q^2} + h(\xi_2)\int_p^a \frac{(t-p)^2}{[(t-p)^2+q^2]^2}\,dt\right] \\ &- 2q\,\psi(p)\left[\frac{1}{(p-a)^2+q^2} - \frac{1}{p^2+q^2}\right] + \frac{q\,\psi(a)}{(p-a)^2+q^2} \\ &\qquad (0<\xi_1<p,\quad p<\xi_2<a). \end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^t \frac{(x-p)^2\,dx}{[(x-p)^2+q^2]^2} = \frac{1}{2q}\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{t-p}{q} - \frac{q(t-p)}{(t-p)^2+q^2}\right].$$

Si q tend vers zéro, p restant fixe, on obtient

$$Y = \omega_1 h(\xi_1) + \omega_2 h(\xi_2) + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro, ω_1 et ω_2 tendant vers $\frac{\pi}{2}$. Donc Y a les mêmes valeurs limites que $\pi\frac{h(\xi_1)+h(\xi_2)}{2}$.

(¹) Pour l'intégration par parties, *voir* LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 13.

D'autre part, p restant toujours fixe, donnons-nous un nombre constant α suffisamment petit et écrivons

$$(3) \qquad Y = -q\int_{p-\alpha}^{p+\alpha} \frac{\varphi(t)\,dt}{(p-t)^2+q^2} + qG(p, q),$$

G est une fonction qui reste bornée si q tend vers zéro. Les considérations précédentes s'appliquent à l'intégrale de l'équation (3) et l'on voit que les limites de Y sont les mêmes que celles d'une expression de la forme $\pi\frac{h(\zeta_1)+h(\zeta_2)}{2}$, ζ_1 et ζ_2 étant certains nombres qui dépendent de q et qui sont respectivement compris dans les intervalles $(p-\alpha, p)$ et $(p, p+\alpha)$. On en déduira que si $\psi(t)$ a une dérivée à droite et une dérivée à gauche pour $t=p$, $\frac{Y}{\pi}$ a pour limite unique la demi-somme de ces dérivées. Étant données les propriétés de la primitive $\psi(t)$, Y tend presque partout vers $\pi\varphi(t)$ quand q tend vers zéro, p restant fixe.

Complétons cette étude de Y en supposant $\varphi(t)$ borné. Si $|\varphi(t)|<M$ l'expression de Y montre que

$$|Y| < M\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{a-p}{q} - \operatorname{arc\,tang}\frac{-p}{q}\right].$$

La partie imaginaire de $\Phi(z)$ est donc de module borné si $\varphi(t)$ est borné.

4. Étudions X de la même façon; on supposera encore que p garde une valeur constante déterminée $(0<p<a)$ et que $h(t)$ reste borné pour cette valeur de p. La même intégration par parties donne

$$X = \frac{p-a}{(p-a)^2+q^2}\psi(a) - I,$$

avec

$$I = \int_0^a \frac{(t-p)^2-q^2}{[(t-p)^2+q^2]^2}(t-p)h(t)\,dt - \int_0^p \frac{(t-p)^2-q^2}{[(t-p)^2+q^2]^2}\psi(p)\,dt.$$

On appliquera encore le théorème de la moyenne dans chacun des intervalles $(0, p)$, (p, a) où $t-p$ garde un signe constant et où $h(t)$ est continu. En désignant des valeurs de t appartenant respectivement à ces intervalles par η_1 et η_2, on obtient

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} h(\eta_1) \Big| \log[(t-p)^2 + q^2] + \frac{2q^2}{(t-p)^2+q^2} \Big|_0^p$$
$$+ \frac{1}{2} h(\eta_2) \Big| \log[(t-p)^2 + q^2] + \frac{2q^2}{(t-p)^2+q^2} \Big|_p^a - \psi(p) \Big[\frac{t-p}{(t-p)^2+q^2} \Big]_0^a.$$

On peut finalement écrire

$$\frac{\mathrm{I}}{\log \frac{1}{q}} = h(\eta_1) - h(\eta_2) + \varepsilon,$$

ε désignant une fonction de p et de q qui tend vers zéro avec q. Les limites de $\dfrac{\mathrm{I}}{\log \frac{1}{q}}$ restent bornées et inférieures à l'oscillation de $h(t)$ dans l'intervalle $(0, a)$. On verrait de même qu'elles restent inférieures à l'oscillation de $h(t)$ dans un intervalle quelconque contenant la valeur p. Par suite, $\dfrac{\mathrm{I}}{\log \frac{1}{q}}$ tend vers zéro si $h(t)$ est continu pour $t = p$, c'est-à-dire si $\psi(t)$ a une dérivée pour $t = p$, c'est-à-dire presque partout.

5. Évaluons l'ordre de grandeur de $\Phi(z)$ dans tout le plan, y compris le voisinage des extrémités du segment L. Soit $z = p + iq$:

$$|\Phi(z)| < \int_0^a |\varphi(t)| \frac{|p-t|\,dt}{(p-t)^2+q^2} + q \int_0^a \frac{|\varphi(t)|\,dt}{(p-t)^2+q^2}$$
$$< \left(\frac{a}{q^2} + \frac{1}{q}\right) \int_0^a |\varphi(t)|\,dt.$$

Ainsi, dans le cas général, $|q^2 \Phi|$ est borné et l'on voit aussi que I est borné.

Si, maintenant, $|\varphi(t)|$ est borné, $[\,|\varphi(t)| < \mathrm{M}\,]$,

$$|\Phi| < \mathrm{M} \int_0^a \frac{|p-t|\,dt}{(p-t)^2+q^2} + \mathrm{M}q \int_0^a \frac{dt}{(p-t)^2+q^2}$$
$$< \mathrm{M} \log \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} + \mathrm{M} \log \frac{1}{\sqrt{(p-a)^2+q^2}} + \text{const.},$$

on obtient que $\dfrac{\Phi}{\log\dfrac{1}{|q|}}$ est borné ainsi que X au voisinage de L. En résumé, *si la fonction réelle $f(x)$ est sommable, la fonction analytique*

$$\Phi(z) = X - iY = \int_0^a \frac{f(a-t)\,dt}{z-t}$$

est holomorphe dans tout le plan pourvu de la coupure L (infini compris). Si le point $p + iq$ tend vers le point p de L, p restant fixe, Y tend vers $\frac{\pi}{2} f(a-p)$ et $\dfrac{X}{\log\dfrac{1}{|q|}}$ tend vers zéro : ces deux propriétés pouvant ne pas être exactes pour un ensemble de points p de L dont la mesure est nulle.

Si, de plus, $f(x)$ est borné, Y est borné dans le plan et $\dfrac{X}{\log\dfrac{1}{|q|}}$ est borné au voisinage de L.

6. Pour établir une réciproque de cette dernière propriété, considérons *a priori* une fonction $\Phi(z)$ qui possède les deux propriétés suivantes :

1° $\Phi(z) = X - iY$ est holomorphe partout ailleurs que sur le segment L (infini compris).
2° La partie imaginaire Y est de module borné dans le plan.

Nous allons d'abord déduire de là deux autres propriétés de $\Phi(z)$.

La fonction $H(z) = e^{-i\Phi(z)}$ est holomorphe dans la région d'holomorphie indiquée pour Φ et son module est borné. Un théorème de M. Fatou [1] nous apprend que H tend vers une limite déterminée sur tout chemin aboutissant à un point de L sous une incidence nulle ou aiguë sauf, éventuellement, pour des chemins aboutissant à certains points de L dont l'ensemble E est de mesure nulle. Cette limite est une fonction bornée et sommable sur L car elle est obtenue comme dérivée d'une fonction continue à variation bornée. On voit donc que Y a une

[1] FATOU, *Acta mathematica*, t. 30, p. 366. *Voir* aussi DENJOY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 168, 1919, p. 387.

limite aux points qui ne sont pas sur E et cette limite ne peut être l'infini par hypothèse; c'est une fonction mesurable et bornée sur l'intervalle L, donc sommable.

D'autre part, j'ai montré que l'inégalité $|Y| < M$ valable pour $q > 0$, par exemple, entraîne

$$|X(p, q) - X(p, q_0)| < \frac{2M}{\pi} \log \frac{q_0}{q},$$

quand on suppose $0 < q < q_0 < 1$ (¹).

Faisons choix d'un point fixe p_0, q_0 :

$$X(p, q) = X(p, q) - X(p, q_0) + X(p, q_0).$$

Si p reste compris entre $-a$ et $2a$ par exemple, si $0 < q_0 < 1$, $X(p, q_0)$ est évidemment borné; on voit donc que $\dfrac{X}{\log \frac{1}{|q|}}$ admet une borne quand le point $p + iq$ reste dans un domaine qui comprend L à son intérieur.

Ces considérations entraînent deux nouvelles propriétés pour Φ :

3° Y admet presque partout sur L une limite $\varphi(t)$ qui est une fonction bornée et sommable quand p reste fixe et quand q tend vers zéro.

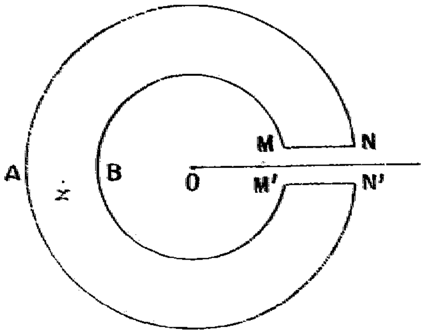
4° $\dfrac{X}{\log \frac{1}{|q|}}$ est borné au voisinage de L.

Cela posé, nous pouvons considérer la fonction $\displaystyle\int_0^a \frac{\varphi(t)\,dt}{z - t}$; je vais démontrer qu'elle est égale à Φ à une constante additive près. Nous avons vu (n° 3) que cette fonction possède les propriétés précédentes; il nous suffira donc de démontrer que si une fonction $\Phi = X - iY$ possède les propriétés 1°, 2°, 3°, 4°, avec $\varphi(t) = 0$, elle se réduit à une constante. Pour faire la démonstration, je considérerai un domaine qui diffère peu de l'anneau compris entre les cercles $|z| = r$, $|z| = R$ avec $0 < r < R < a$. Nous tracerons les droites parallèles à l'axe réel, symétriques par rapport à lui et à la distance q de cet axe. Les cercles sont coupés aux points M, N, M', N' voisins du segment L et nous considérerons le domaine limité par le contour simple M'N'ANMBM'

(¹) *Mathematica*, vol. 1, 1929, p. 39.

(*voir* figure). Soit z un point réel intérieur au contour et situé du côté négatif de l'axe réel ($-R < z < -r$). On a

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\Phi(u)\,du}{u-z},$$



l'intégrale étant prise sur le contour. La partie relative aux deux segments M'N' et MN est

$$\frac{1}{2i\pi}\int_r^R \frac{\Phi(t+iq)-\Phi(t-iq)}{(z-t)^2+q^2}(t-z)\,dt - \frac{iq}{2i\pi}\int_r^R \frac{\Phi(t+iq)+\Phi(t-iq)}{(t-z)^2+q^2}\,dt.$$

La quantité $\Phi(t+iq)-\Phi(t-iq) = -2i\Upsilon(t, q)$ tend vers zéro presque partout avec q pour p fixe; la première intégrale est inférieure en module à

$$\frac{1}{\pi}\int_r^R \frac{|\Upsilon(t, q)|}{(2r)^2}\,2R\,dt,$$

et elle tend vers zéro avec q. La deuxième intégrale admet une borne de la forme $Bq\log\frac{1}{|q|}$ (B constante); elle tend aussi vers zéro. Il reste les intégrales sur les arcs de cercles; je les remplace par des intégrales sur des contours fermés voisins de ces arcs. Pour la première, par exemple, je modifie le contour en ajoutant le petit segment de droite MM'. Comme $|\Phi|$ est de l'ordre de $\log\frac{1}{|q|}$, l'intégrale existe bien et elle admet une borne de la forme $2A\int_0^q \log\frac{1}{y}\,dy$ (A constante);

c'est un infiniment petit avec q. Les contours fermés qui enveloppent l'origine et qui comprennent le point z entre eux étant désignés par γ et γ', on a

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} \frac{\Phi(u)\,du}{u-z} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\Phi(u)\,du}{u-z} + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit avec q.

L'intégrale le long de γ (ou de γ') ne varie pas si r (ou R) reste fixe et si q tend vers zéro. Il faut donc que ε soit nul :

$$(3) \qquad \Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} \frac{\Phi(u)\,du}{u-z} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\Phi(u)\,du}{u-z}.$$

Comme chacune de ces intégrales représente une fonction analytique pour z situé dans le domaine ouvert compris entre les deux contours γ et γ', la formule (3) démontrée pour z réel et négatif est aussi exacte pour z quelconque dans ce domaine annulaire. $\Phi(z)$ est donc holomorphe et uniforme entre les deux contours. Comme r est arbitrairement petit, le point o est un point régulier ou un point singulier isolé autour duquel la fonction est uniforme.

Pour évaluer la grandeur de Φ au voisinage de o, je remarque que la deuxième intégrale de (3) représente une fonction holomorphe pour $z = 0$, il suffit d'étudier l'intégrale le long de γ. Je puis évidemment modifier ce contour fermé entourant l'origine ; je pose $|z| = \rho$ et je remplace γ par un carré dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, dont le centre est O, dont le côté a pour longueur $\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$; il est inscrit dans un cercle de rayon $\frac{\rho}{4}$. On a donc $\frac{1}{|u-z|} < \frac{4}{\rho}$. Sur les côtés parallèles à l'axe réel, $|\Phi(u)|$ est de l'ordre de $\log\frac{1}{\rho}$ d'après la propriété 4° de $\Phi(z)$. Sur le côté normal à l'axe réel, $\int \frac{\Phi(u)\,du}{z-u}$ est comparable à

$$\int_0^{\frac{\rho}{4\sqrt{2}}} \frac{2}{\rho}\log\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 - \log\frac{4\sqrt{2}}{\rho}\right).$$

On s'aperçoit finalement que $|z\Phi(z)|$ est borné au voisinage de l'origine. Comme $z\Phi(z)$ tend vers zéro sur une droite quelconque issue de O autre que l'axe réel, comme cette fonction ne peut être que régulière en O, elle y est nulle. $\Phi(z)$ est donc régulière à l'origine. Un raisonnement analogue donnerait le même résultat pour l'autre extrémité du segment L, le point $z = a$; la fonction est donc régulière dans tout le plan, c'est une constante.

On peut maintenant énoncer :

Soit une fonction $\Phi(z)$ holomorphe en tout point du plan qui n'est pas sur le segment L. Pour que sa partie imaginaire soit bornée, il faut et il suffit que $\Phi(z)$ puisse se mettre sous la forme $\int_0^a \frac{\varphi(t)\,dt}{z-t} + \text{const.}$, $\varphi(t)$ étant une fonction sommable et bornée pour $0 < t < a$.

7. On peut dire encore que la condition nécessaire et suffisante pour que les nombres $c_1, c_2, c_3, \ldots$ soient les coefficients intégraux d'une fonction sommable et bornée est que la fonction $\sum \frac{(n-1)!\,c_n}{z^n}$ ait sa partie imaginaire bornée et soit holomorphe en tout point qui n'est pas sur L.

Le théorème du n° 5 nous donne une condition nécessaire, mais non suffisante, pour qu'ils soient les coefficients intégraux d'une fonction sommable, non nécessairement bornée.

Si les coefficients intégraux d'une fonction sommable f sont nuls à partir d'un certain rang, la fonction Φ correspondante est rationnelle et, par suite, uniforme. Comme elle est réelle pour z réel, sa partie imaginaire Y est nulle pour z réel. Mais on a vu que cette quantité est presque partout égale à $f(a-x)$, cette fonction est donc nulle presque partout.

J'ai déjà fait remarquer (1) que l'on est certain que $f(x)$ est nul presque partout dès que certains coefficients tirés de la suite des c_n sont nuls : c'est ce que montrent les nombreux théorèmes obtenus sur les lacunes des séries de Taylor. Parmi ces résultats, l'un des plus simples s'obtient ici directement.

Supposons $a = 1$, ce qui est sans importance. On a

$$B_n = (n-1)!\,c_n = \int_0^1 t^{n-1} f(a-t)\,dt.$$

(1) *Loc. cit.*, Association française pour l'avancement des Sciences, 1931.

et B_n est la valeur pour $u = n$ de la fonction analytique $\int_0^1 t^{u-1} f(a-t)\, dt$. Dans le domaine où la partie réelle de u est positive, cette fonction est holomorphe et a son module inférieur à $\int_0^1 |f(a-t)|\, dt$. Or, si une fonction analytique non nulle est holomorphe et bornée en module dans le demi-plan à droite de l'axe des imaginaires, les zéros réels positifs de cette fonction, $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$ sont tels que la série $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n} + \ldots$ est convergente : c'est là une transformation du théorème connu de M. Blaschke (¹) relatif aux zéros d'une fonction holomorphe et bornée dans un cercle. (Il suffit d'une transformation conforme pour passer au théorème du demi-plan.)

On voit donc que les coefficients intégraux d'une fonction sont tous nuls si les coefficients c_{n_p} le sont et si $\sum \frac{1}{n_p}$ diverge. La fonction est nulle elle aussi, sauf peut-être en des points formant sur L un ensemble de mesure nulle.

On peut encore dire que la suite des coefficients c_n d'une fonction est déterminée quand on connaît une suite partielle c_{n_p} telle que $\sum \frac{1}{n_p}$ diverge.

Le théorème des lacunes de M. Fabry donne des résultats analogues : non seulement la suite des c_n nuls ne doit pas être trop dense, quand $f(x)$ n'est pas nul, mais il ne se peut pas que des groupes de termes consécutifs $c_{n_p}, c_{n_p+1}, \ldots, c_{n_p+q_p}$ s'évanouissent alors que q_p est relativement grand par rapport à n_p.

Les théorèmes de prolongement analytique donnent d'autres résultats : les uns sont relatifs à l'ordre de grandeur des c_n, d'autres aux changements de signe de deux termes successifs : si c_{n_p-1} et c_{n_p} ne sont pas de même signe et si $f(x)$ n'est pas nul, la série $\sum \frac{1}{n_p}$ converge.

Le résultat le plus simple est d'ailleurs celui qui concerne l'ordre de grandeur des c_n ; on le déduit du rayon de convergence de la fonc-

(¹) Voir, par exemple, MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques*, p. 179.

tion $\Phi\left(\frac{1}{z}\right)$. La plus grande limite de $\sqrt[n]{(n-1)!\,|c_n|}$ est égale à a au plus, il en résulte que la plus grande limite de $n\sqrt[n]{|c_n|}$ est ae au plus; elle est exactement égale à ae si $f(x)$ n'est pas nul au voisinage de $x=0$ car $\Phi\left(\frac{1}{z}\right)$ a bien alors le point $z=\frac{1}{a}$ pour point singulier.

On peut rapprocher cette propriété d'une autre que j'ai obtenue récemment : soit $M_n^2=\int_0^{+a} f_n^2(x)\,dx$, la plus petite limite de $n\sqrt[n]{M_n}$ n'est pas nulle si $f_1(x)$ n'est pas nul [1].

On a donc un grand nombre de conditions nécessaires pour qu'une suite de nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ soit la suite des coefficients intégraux d'une fonction; bien entendu, ces conditions ne sont pas suffisantes. Je donne plus loin une condition nécessaire et suffisante pour que les nombres c_n soient les coefficients intégraux d'une fonction de carré sommable.

On vient d'obtenir incidemment que les coefficients intégraux de toute fonction sommable sont de la forme $c_n=\frac{G(n)}{(n-1)!}$ la fonction $G(u)$ étant holomorphe et bornée en module quand la partie réelle de u est positive et quand $a=1$. Je n'ai pas pu établir la réciproque et je me contente de signaler sans démonstration la proposition suivante : si $G(u)$ est une fonction holomorphe et bornée en module quand la partie réelle de u est positive, les nombres $\frac{G(n)}{n^2(n-1)!}$ sont les coefficients intégraux d'une fonction sommable dans l'intervalle $(0, 1)$, ce qui suffit à montrer que la détermination de $G(u)$ par les valeurs de $G(n)$ est liée au problème traité ici [2].

8. Étant données deux suites de coefficients intégraux correspondant à deux fonctions, on peut par addition de coefficients de même rang obtenir une troisième suite. Il est possible de donner aussi une règle de multiplication.

Soient deux fonctions bornées et continues $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ les fonctions

---

[1] *Mathematica*, vol. VI, 1932, p. 86.

[2] Cette question est traitée dans un travail qui paraîtra prochainement : *Sur l'équation de Laplace et Abel*.

associées correspondantes

$$\Phi(z)=\int_0^{a}\frac{\varphi(t)}{z-t}\,dt=\sum_0^{\infty}\frac{B_n}{z^n},\qquad \Phi'(z)=\int_0^{a'}\frac{\varphi'(t)}{z-t}\,dt=\sum_0^{\infty}\frac{B'_n}{z^n}.$$

Étudions

$$\text{(4)}\qquad H(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_C\Phi(x)\,\Phi'\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$

C est un contour fermé simple qui contient le segment L à son intérieur. Je trace la demi-droite T_z qui est portée par le rayon vecteur joignant l'origine au point z et qui va de z à l'infini. Si T est tout entière extérieure à C, la fonction $H(z)$ est holomorphe sur C. Si z est très grand, $H(z)$ est fonction analytique et son développement s'obtient en prenant pour C un très grand cercle

$$\text{(5)}\qquad H(z)=\sum_0^{\infty}\frac{B_n B'_n}{z^n}.$$

Si l'on déforme C de manière que L reste à l'intérieur et T_z à l'extérieur, la formule (4) reste valable : elle donne donc le prolongement analytique du développement en série (5). La méthode bien connue de M. Hadamard montre donc que $H(z)$ est régulière pour tout point z tel que T_z coupe L, c'est-à-dire pour tout point qui n'est pas sur le segment L de l'axe réel qui va du point O au point d'affixe aa'.

Choisissons un contour répondant aux conditions indiquées et transformons l'expression (4) :

$$H(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_C\int_0^{a}\int_0^{a'}\frac{\varphi(t)\,\varphi'(t')}{(x-t)\left(\frac{z}{x}-t'\right)}\,\frac{dx\,dt\,dt'}{x}.$$

On peut échanger l'ordre des intégrations :

$$H(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{a}\int_0^{a'}\varphi(t)\,\varphi'(t')\left[\int_C\frac{dx}{x(x-t)\left(\frac{z}{x}-t'\right)}\right]dt\,dt'.$$

Soit

$$I=\int_C\frac{dx}{x(x-t)\left(\frac{z}{x}-t'\right)}.$$

Le calcul des résidus donne immédiatement

$$1 = \frac{u(z)}{z-u}, \qquad H(z) = \int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(t)\varphi'(t')\,dt\,dt'}{z-u}.$$

Pour transformer cette intégrale double portant sur des variables réelles, je fais le changement de variables

$$u' = u, \qquad t - t' = v$$

et je pose

$$t + t' = \sqrt{v^2 + 4u} = w.$$

Le déterminant fonctionnel $\frac{D(t, t')}{D(u, v)}$ est égal à $-\frac{1}{w}$.

Le nouveau champ d'intégration du plan des (u, v) est fini ; si u reste constant, v varie de $a - \frac{u}{a}$ à $\frac{u}{a} - a$ et u doit varier ensuite de o à a^2. On obtient donc un triangle du plan des (u, v) dont les sommets sont $(a^2, 0)$, $(0, a)$, $(0, -a)$.

$$H(z) = \int_0^{a^2} \frac{\psi(u)\,du}{z-u} \qquad \text{avec} \qquad \psi(u) = \int_{\frac{u}{a}-a}^{a-\frac{u}{a}} \varphi\left(\frac{w+v}{2}\right)\varphi'\left(\frac{w-v}{2}\right)\frac{dv}{w}.$$

Si M est une borne des fonctions continues $|\varphi(t)|$ et $|\varphi'(t')|$,

$$|\psi(u)| < M^2 \int_{\frac{u}{a}-a}^{a-\frac{u}{a}} \frac{dv}{\sqrt{v^2+4u}} = M^2 \operatorname{Log} \frac{a^2}{u}.$$

$\psi(u)$ est intégrable quoique non borné, ce qui justifie le changement de variables.

La fonction $H(z)$ est donc la fonction analytique associée à la fonction $\psi(a^2 - u)$ qui est intégrable dans l'intervalle $(0, a^2)$. Les quantités $c_n c'_n (n-1)!$ sont les coefficients intégraux d'une fonction dans l'intervalle $(0, a^2)$.

J'ai supposé $\varphi(t)$ et $\varphi'(t')$ continues ; si elles sont seulement sommables, leurs coefficients $c_2, c_3, \ldots$ et $c'_2, c'_3, \ldots$ sont, à partir de c_2 et c'_2, ceux de fonctions continues. Les coefficients $d_{n-1} = c_n c'_n (n-2)!$ sont donc ceux d'une fonction sommable.

II.

9. On peut appliquer les considérations précédentes à l'étude de l'équation intégrale de première espèce, à limites fixes

$$f(x) = \int_0^b K(x, s)\, h(s)\, ds. \tag{2}$$

Les variables x et s sont supposées réelles, les fonctions sont sommables en x, $K(x, s)$ est sommable en s et borné. On cherche une fonction $h(s)$ de carré sommable. On demande une solution valable quand x appartient à l'intervalle L ($0 \leqq x \leqq a$).

Soit z une variable complexe, on peut écrire :

$$\int_0^a \frac{f(x)\, dx}{z - x} = \int_0^b \left[\int_0^a \frac{K(x, s)\, dx}{z - x} \right] h(s)\, ds. \tag{3}$$

Cette égalité est valable tant que z ne prend pas une valeur réelle appartenant à l'intervalle L; on peut, en effet, effectuer un échange d'intégrations. On est ainsi conduit à une nouvelle équation

$$\Phi(z) = \int_0^b H(z, s)\, h(s)\, ds, \tag{3}$$

dont le noyau

$$H(z, s) = \int_0^a \frac{K(x, s)\, dx}{z - x}$$

et la fonction donnée

$$\Phi(z) = \int_0^a \frac{f(x)\, dx}{z - x}$$

sont analytiques et holomorphes dans le plan pourvu de la coupure L.

Réciproquement, si l'on connaît une solution $h(s)$ de 3, le deuxième membre peut s'écrire

$$G(z) = \int_0^a \left[\int_0^b K(x, s)\, h(s)\, ds \right] \frac{dx}{z - x}.$$

Sa partie imaginaire tend vers $-i\pi \int_0^b K(x, s)\, h(s)\, ds$ si z tend vers un point de L en suivant une droite normale au segment, avec exception possible pour un ensemble de points x de L dont la mesure est nulle. La partie imaginaire du premier membre de (3) tend vers $-i\pi f(x)$, dans les mêmes conditions et avec une restriction analogue. L'équation (α) est donc vérifiée par $h(s)$ presque partout.

Pour traiter l'équation de première espèce, on pourra donc toujours supposer que les fonctions sont analytiques en x et vérifient les conditions indiquées au n° 5.

10. Posons

$$
\begin{gathered}
f_1(x) = \int_0^x f(x)\,dx, \qquad f_2(x) = \int_0^x f_1(x)\,dx, \qquad \ldots, \\
c_1 = f_1(a), \qquad c_2 = f_2(a), \qquad \ldots, \\
K_1(x, s) = \int_0^x K(x, s)\,dx, \qquad K_2(x, s) = \int_0^x K_1(x, s)\,dx, \qquad \ldots, \\
D_1(s) = K_1(a, s), \qquad D_2(s) = K_2(a, s), \qquad \ldots
\end{gathered}
$$

L'échange des intégrations conduit au système d'équations

$$
(\gamma) \quad \left\{
\begin{array}{l}
c_1 = \displaystyle\int_0^b D_1(s)\,h(s)\,ds, \qquad c_2 = \int_0^b D_2(s)\,h(s)\,ds, \qquad \ldots, \\
\qquad\qquad c_n = \displaystyle\int_0^b D_n(s)\,h(s)\,ds, \qquad \ldots
\end{array}
\right.
$$

Réciproquement, supposons qu'une fonction $h(s)$ vérifie le système (γ); les coefficients intégraux de $\int_0^b K(x, s)\,h(s)\,ds$ sont les deuxièmes membres des équations (γ); cette fonction a donc mêmes coefficients que $f(x)$; elle lui est donc égale et le système (γ) est donc équivalent à l'équation (α). Il y a plus : d'après les remarques du n° 7, on peut négliger certaines équations (γ); il suffit par exemple de résoudre celles dont les indices $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ sont tels que $\sum \frac{1}{n_p}$ diverge.

On connaît la solution d'un système tel que (γ) quand on cherche une solution $h(s)$ de carré sommable; la méthode est basée sur l'orthogonalisation du système des fonctions D_n qui sont bornées, d'après nos hypothèses.

Il peut arriver que les $D_n(s)$ ne soient pas indépendantes ; supposons que l'une d'elles D_n soit une combinaison linéaire de plusieurs autres qui la précèdent :

$$D_n = m_1 D_{p_1} + m_2 D_{p_2} + \ldots + m_q D_{p_q} \qquad (p_1 < p_2 < \ldots < p_q < n).$$

On devra avoir

$$(\delta) \qquad c_n = m_1 c_1 + m_2 c_2 + \ldots + m_q c_q.$$

Soit (δ) le système formé par toutes les équations linéaires en c_i que l'on peut obtenir ainsi, ce système peut avoir une infinité d'équations.

Supprimons de la suite $D_1, D_2, \ldots$ toute fonction qui serait une combinaison linéaire de quelques autres qui la précèdent. Il reste des fonctions linéaires indépendantes que je désigne par $D'_1, D'_2, \ldots, D'_n$. Si $D'_n = D_p$, je pose $c'_n = c_p$.

Il est clair que le système (γ) est équivalent à l'ensemble du système des conditions (δ) et du système

$$(\gamma') \qquad c'_n = \int_0^b D'_n(s) h(s) ds.$$

On peut trouver un ensemble de fonctions orthogonales et normales E_n dans l'intervalle $(0, b)$ telles que l'on ait

$$\begin{aligned} E_1 &= \alpha_1^1 D'_1, \\ E_2 &= \alpha_2^1 D'_1 + \alpha_2^2 D'_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_n &= \alpha_n^1 D'_1 + \alpha_n^2 D'_2 + \ldots + \alpha_n^n D'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

les coefficients α_i^j étant des constantes. Je pose

$$d_n = \alpha_n^1 c'_1 + \alpha_n^2 c'_2 + \ldots + \alpha_n^n c'_n.$$

Le système (γ') est équivalent au système

$$d_n = \int_0^b E_n(s) h(s) ds \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On sait que la série Σd_n^2 doit converger.

Réciproquement, si la série Σd_n^2 converge, le théorème de MM. Fischer et Riesz montre qu'il existe une fonction de carré sommable définie presque partout sur l'intervalle $(0, b)$ et dont les coefficients de Fourier par rapport à la suite des E_n sont bien les d_n. Cette fonction n'est unique que si la suite des E_n est fermée. La fonction ou les fonctions ainsi obtenues sont bien des solutions de l'équation (α) si le système (δ) est vérifié.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (α) ait une solution qui soit une fonction de carré sommable est donc que le système (δ) soit vérifié par les coefficients intégraux de $f(x)$ et que la série

$$\Sigma(a_n^1 c'_1 + a_n^2 c'_2 + \ldots + a_n^n c'_n)^2$$

soit convergente.

Les c'_p sont les termes d'une suite partielle de coefficients intégraux de $f(x)$; les indices d_n^p de cette suite dépendent de $K(x, s)$ *et non de $f(x)$,* il en est de même des coefficients m_i des équations (δ).

La solution (ou, s'il y en a plusieurs, une des solutions) est obtenue comme limite en moyenne d'une série de Fourier, $\Sigma d_n E_n(s)$.

La solution générale s'obtient en ajoutant à cette solution particulière une fonction quelconque orthogonale à toutes les fonctions E_n, s'il en existe.

11. La méthode que je viens d'employer pour résoudre le système s'applique aux équations

$$(n-1)!\, c_n = B_n = \int_0^1 s^{n-1}\varphi(s)\, ds,$$

où $\varphi(s)$ est l'inconnue, c'est-à-dire à la recherche d'une fonction de carré sommable dont les coefficients intégraux pour l'intervalle $(0, 1)$ sont donnés. Il n'y a qu'à supposer $D_n = s^{n-1}$ et $b = 1$.

Quand on cherche à orthogonaliser les fonctions $1, s, s^2, \ldots,$ on obtient la suite des polynomes de Legendre (à un facteur numérique près) :

$$E_n = a_n^1 + a_n^2 s + \ldots + a_n^n s^{n-1}.$$

Ces suites sont d'ailleurs formées de fonctions linéairement indépendantes.

Pour que les c_n soient les coefficients intégraux d'une fonction de carré sommable, il faut et il suffit que la série

$$\Sigma(a_n^1 c_1 + a_n^2 c_2 + \ldots + a_n^n c_n)^2$$

soit convergente, les a_n^p étant les coefficients des polynomes E_n.

La fonction $\varphi(s)$ obtenue par les coefficients intégraux se présentera comme limite en moyenne d'une série de Fourier de fonctions X_n dans le cas actuel où elle est de carré sommable. Si cette fonction est à variations bornées, la série sera convergente et sa valeur au point s_0 sera

$$\frac{1}{2}[\varphi(s_0+0)+\varphi(s_0-0)] \quad (^1).$$

Si l'on donne les coefficients $c_1, c_2, c_3, \ldots$, et si l'on ne sait rien sur la fonction inconnue $f(a-s)$, on pourra toujours appliquer la méthode précédente au calcul de

$$f_1(x)=\int_0^x f(x)\,dx.$$

12. Pour terminer, je ferai observer qu'il y a plusieurs procédés presque évidents pour ramener l'étude de l'équation intégrale de première espèce à la résolution d'un système infini d'équations du type

$$a_n=\int_0^b J_n(s)\,h(s)\,ds,$$

où $h(s)$ est l'inconnue, sans parler de la solution de M. Picard.

Le procédé que je propose au n° **10** me paraît présenter deux avantages : la solution qu'il donne ne contient pas (ou presque pas) d'indétermination, et il s'applique dans le cas très général où l'on sait seulement que le noyau $K(x, s)$ est intégrable et borné et, si l'on veut, dans des cas plus généraux.

Remarquons encore que si l'on peut négliger certaines équations (7) comme je l'ai expliqué au n° **10** et obtenir des conditions de possibilité qui ne font pas intervenir certains c_n, il reste entendu que les c_n négligés ne sont pas quelconques : ils sont tels que la suite $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ est celle des coefficients intégraux d'une fonction déterminée et d'ailleurs donnée : $f(x)$.

---

(1) BURKHARDT, *Sitzungsb. Akad. München. Math. Phys.* Klasse 1909, Mém. 10.