JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. NOAILLON

Sur les intégrales de Stieltjes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 12 (1933), p. 83-93.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12__83_0>

Sur les intégrales de Stieltjes;

PAR P. NOAILLON.

Je désigne une fonctionnelle de $y(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu)$ par une notation telle que

$$\underset{\xi_1, \ldots, \xi_\nu}{\overset{\Lambda}{\rceil}} \{ y(\xi_1, \ldots, \xi_\nu) \}.$$

C'est une quantité dont chaque valeur dépend des valeurs que prend la fonction $y(\xi_1, \ldots, \xi_\nu)$ pour un ensemble E de positions du point $(\xi_1, \ldots, \xi_\nu)$, ensemble E qui comprendra, en général, une infinité de points. Les variables $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ mises en évidence sous le signe $\overset{\Lambda}{\rceil}$ sont des variables d'*opération* analogues aux variables d'intégration dans une intégrale définie. L'ensemble E est analogue au domaine d'intégration.

L'analogie est très profonde : notre but est de démontrer que *toute fonctionnelle* $\underset{.\xi}{\overset{\Lambda}{\rceil}} \{ y(.\xi) \}$ (¹) *possédant la continuité liée au voisinage uniforme d'ordre zéro* (²) *et linéaire* (³) *est une intégrale de Lebesgue étendue à l'ensemble* E, *à condition de mesurer cet ensemble* E *par rap-*

(¹) Pour abréger je désigne par $.\xi$ le point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu)$.

(²) *Voir* PAUL LÉVY, *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Collection Borel, Paris, Gauthier-Villars 1922, n° 12).

(³) C'est-à-dire $\overset{\Lambda}{\rceil} \{ y + z \} = \overset{\Lambda}{\rceil} \{ y \} + \overset{\Lambda}{\rceil} \{ z \}$, c'est la définition donnée par M. Hadamard (*Calcul des variations*, t. I, p. 289) quand, comme nous, on se borne au domaine réel.

port à un système de coordonnées approprié à l'opération $\dfrac{A}{.\xi|}$, mais indépendant de la fonction $y(.\xi)$.

Nous partirons de la formule bien connue de Riesz [1]

$$\dfrac{A}{.\xi|}\{y(.\xi)\} = \int_E y(.\xi)\,\alpha(dE_\xi), \tag{1}$$

où $\alpha(e)$ est la fonctionnelle additive d'ensemble obtenue en appliquant l'opération $\dfrac{A}{.\xi|}$ à la fonction caractéristique de M. de la Vallée Poussin, fonction $\varphi(e, .\xi)$ égale à $+1$ quand le point $.\xi$ est dans l'ensemble e, et nulle dans les autres cas; dE_ξ représente une portion infiniment petite de l'ensemble E, portion renfermant le point $.\xi$.

Quand la fonction $y(.\xi)$ est continue, le second membre de (1) est une intégrale de Stieltjes. Nous voulons démontrer qu'on peut la remplacer par une véritable intégrale de Lebesgue, de la forme

$$\int_E y(.\xi)\,\alpha(dE_\xi) = \int_E y(.\xi)\,\omega(.\xi)\,m'(dE_\xi), \tag{2}$$

où $m'(dE_\xi)$ est la mesure, au sens de Borel-Lebesgue, de l'ensemble dE_ξ, mesure rapportée à un système convenable de coordonnées, dépendant de la fonctionnelle d'ensemble $\alpha(e)$, mais non de la fonction $y(.\xi)$; la fonction $\omega(\xi)$ sera également indépendante de $y(\xi)$, on pourra faire en sorte qu'elle ne prenne que les trois valeurs $+1$, 0, -1.

Par la combinaison des formules (1) et (2) l'opération $\dfrac{A}{|}$ se trouvera définie non seulement pour les fonctions $y(.\xi)$ continues, mais pour toutes les fonctions qui sont mesurables dans E, la mesure m' étant rapportée au système de coordonnées convenable.

Ce théorème a été démontré par M. Lebesgue [2] pour le cas d'un ensemble E à une dimension. Pour le cas de plusieurs dimensions,

---

(1) *Voir* P. Lévy, *loc. cit.*, p. 55.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 150, 1910. Pour un exposé détaillé, *voir* H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, 2e édition (Collection Borel, Paris, Gauthier-Villars, 1928), Chap. XI.

M. Lebesgue a énoncé, sans démonstration, un résultat qui peut être considéré comme à peu près équivalent à notre théorème :

« Toute fonction d'ensemble à variation bornée et continue peut, grâce à une transformation convenable, s'exprimer par une intégrale indéfinie » ([1]).

Avant d'établir la formule (2), nous commencerons par démontrer que l'on a

$$(3) \qquad \int_E f(.\xi)\,\alpha(dE_\xi) = \int_E f(.\xi)\,\omega(.\xi)\,T(dE_\xi),$$

où $T(dE)$ sera une fonctionnelle additive d'ensemble, comme $\alpha(dE)$, mais *non négative*.

Il ne nous restera plus qu'à établir que cette fonction additive d'ensemble non négative est précisément la mesure de l'ensemble moyennant un choix convenable des coordonnées.

Pour établit la formule (3), nous utiliserons la notion de « dérivée de fonction d'ensemble » due à M. Lebesgue ([2]) :

Si le rapport

$$\frac{\alpha(dE_\xi)}{m(dE_\xi)}$$

tend vers une limite unique lorsque l'ensemble dE_ξ, qui contient le point fixe $.\xi$, tend vers zéro dans toutes ses dimensions, tout en conservant une certaine régularité spécifiée par la condition que le rapport

$$\frac{m(S[dE_\xi])}{m(dE_\xi)}$$

reste borné, $S[dE_\xi]$ désignant la sphère la plus petite qui contient dE_ξ, nous dirons, avec M. Lebesgue, que cette limite unique est la dérivée au point $.\xi$ de la fonction d'ensemble $\alpha(e)$.

Dans le Mémoire cité des *Annales de l'École Normale*, M. Lebesgue démontre le théorème suivant ([3]) :

([1]) *Note sur les travaux scientifiques de M. H. Lebesgue* (Toulouse, Imprimerie E. Privat, 1922, p. 43).

([2]) *Sur l'intégration des fonctions discontinues* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 27, 1910, p. 395).

([3]) *Loc. cit.*, p. 399.

« Une fonction d'ensemble mesurable *absolument continue* et additive a une dérivée finie et déterminée presque partout et elle est l'intégrale indéfinie d'une fonction égale à cette dérivée, là où elle est finie et déterminée, et égale à une valeur quelconque ailleurs. »

M. de la Vallée Poussin (¹), comme nous allons le rappeler, a étendu ce théorème aux fonctions additives d'ensemble *non absolument continues*. Avant de dire ce que M. de la Vallée Poussin entend par ensemble normal, supposons d'abord que la fonction additive d'ensemble $\alpha(e)$ soit définie seulement pour les ensembles mesurables au sens de Borel, donc pour une famille *close*, suivant une expression de M. de la Vallée Poussin (²); $\alpha(e)$ se décomposera en la différence de deux fonctions additives, non négatives bornées (³)

$$\alpha(e) = p(e) - n(e).$$

Nous poserons

$$(1) \qquad p(e) + n(e) = \mathrm{T}(e).$$

$\mathrm{T}(e)$ est la variation totale de $\alpha(e)$.

Cela posé, nous dirons, avec M. de la Vallée Poussin, qu'un ensemble e est *normal* (⁴) relativement à la fonctionnelle additive non négative $\mathrm{T}(e)$, si, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut déterminer deux ensembles, ouvert et fermé, O et F, tels que l'on ait

$$\mathrm{O} > e > \mathrm{F},$$
$$\mathrm{T(O)} - \mathrm{T(F)} < \varepsilon.$$

C'est l'extension de la définition des ensembles mesurables (⁵). La théorie de M. de la Vallée Poussin permet d'étendre la définition des

---

(¹) *Intégrale de Lebesgue, fonction d'ensemble, classes de Baire*, Chap. VI; *Fonctions additives d'ensemble mesurable et normal* (Collection Borel, Paris, Gauthier-Villars, 1916).

(²) *Loc. cit.*, p. 83.

(³) *Loc. cit.*, p. 84.

(⁴) De la Vallée Poussin, *loc. cit.*, p. 102. Il résultera de notre Mémoire que les ensembles normaux de M. de la Vallée Poussin sont les ensembles mesurables de M. Lebesque, la mesure étant rapportée au système de coordonnées convenables.

(⁵) De la Vallée Poussin, *loc. cit.*, n° 21, p. 22.

fonctions d'ensemble $\alpha(e)$ et $T(e)$ en dehors des ensembles e mesurables (B), comme on l'a fait pour la théorie de la mesure de Lebesgue. On obtient pour la fonction additive d'ensemble $\alpha(e)$, qui peut être *non continue*, et, à fortiori, *non absolument continue*, le théorème suivant [1] :

« La dérivée $\frac{\alpha(dE)}{m(dE)}$ est sommable [2] et sur tout ensemble e normal [relativement à $T(e)$] et mesurable, où la dérivée est finie :

$$\alpha(e) = \int_e \frac{\alpha(de)}{m(de)} de,$$

le second membre étant une intégrale de Lebesgue.

» Dans le cas général où la dérivée peut être infinie dans e, on a

$$\alpha(e) = \alpha\left(\overset{\frown}{e E_\infty}\right) + \int_e \frac{\alpha(de)}{m(de)} de,$$

où E_∞ est l'ensemble des points où $\alpha(e)$ a une dérivée unique infinie [3] et $\overset{\frown}{e E_\infty}$ l'ensemble des points communs à e et E_∞. »

De ce théorème de M. de la Vallée Poussin résultent les deux corollaires suivants :

Si l'on décompose l'ensemble E en

E_∞ où la dérivée est unique et infinie,
E_0 où la dérivée est unique et nulle,
E_1 où la dérivée est unique et finie,
$E_{\frac{0}{0}}$ où la dérivée est non unique,

on a :

Corollaire I. — *Les ensembles* E_∞ *et* $E_{\frac{0}{0}}$ *sont de mesure nulle.*

C'est la remarque faite au commencement de l'énoncé.

Corollaire II. — *Si l'ensemble e appartient à* E_0 *ou à* $E_{\frac{0}{0}}$, *on a* $\alpha(e) = 0$.

---

(1) De la Vallée Poussin, *loc. cit.*, n° 95, p. 97.

(2) Cela implique que l'ensemble des points de E où la dérivée est infinie ou indéterminée est de mesure nulle.

(3) D'après la remarque ci-dessus, E_∞ est de mesure nulle.

Car dans les deux cas on a

$$x(e) = \int_e \frac{x(de)}{m(de)}\, de.$$

Si e est dans E_0 cette intégrale est nulle parce que $\frac{x(de)}{m(de)} = 0$; si E est dans $E_{\frac{0}{0}}$, l'intégrale est nulle parce qu'elle est étendue à un domaine e de mesure nulle.

Théorème. — Représentons par $\omega(.\xi)$ la fonction

$$(5)\qquad \begin{cases} \omega(.\xi) = +1 \text{ quand } \dfrac{x(dE_\xi)}{m(dE_\xi)} \text{ est unique et positive,} \\ \omega(.\xi) = -1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{et négative,} \\ \omega(.\xi) = 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{est non unique, ou nulle.} \end{cases}$$

On aura

$$(6)\qquad \int_E y(.\xi).x(dE_\xi) = \int_E y(.\xi).\omega(.\xi)\,T(dE_\xi).$$

C'est la relation (3), avec les valeurs de $T(e)$ et $\omega(.\xi)$ spécifiées par (4) et (5).

Démonstration. — Il suffit de démontrer que le théorème est vrai dans chacune des deux parties $(E_x + E_1)$ et $(E_0 + E_{\frac{0}{0}})$ de E.

Or dans $(E_x + E_1)$ la dérivée est unique et non nulle, donc ou bien positive, et alors $n(dE) = 0$,

$$x(dE) = p(dE) = T(dE)$$

ou bien négative, et alors $p(dE) = 0$,

$$x(dE) = -n(dE) = -T(dE).$$

Dans les deux cas

$$x(dE) = \omega\, T(dE),$$

ce qui établit la relation (6) dans $(E_x + E_1)$.

Dans $(E_0 + E_{\frac{0}{0}})$ le second membre de (6) est nul parce que $\omega(.\xi) = 0$; et le premier membre de (6) est nul parce que $x(e) = 0$ en vertu du corollaire II du théorème de M. de la Vallée Poussin.

Donc la relation (6) est convenablement établie.

Pour déduire de (6) la formule (2) il suffira de montrer que l'on peut trouver une transformation changeant le point $(\xi_1, \ldots, \xi_\nu)$ en le point $(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_\nu)$ et l'ensemble e en l'ensemble e', de telle façon que la fonctionnelle d'ensemble $T(e)$ soit égale à la mesure de l'ensemble e', c'est-à-dire

$$T(e) = m(e') = m'(e), \tag{7}$$

et par suite

$$T(dE) = m(dE') = m'(dE),$$

où nous désignons par m la mesure rapportée aux coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ et par m' la mesure rapportée aux coordonnées $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_\nu$.

Au temps initial $t = 0$, considérons l'ensemble borné E à ν dimensions, et une portion variable e de E; et considérons la fonctionnelle de l'ensemble e, additive, bornée et non négative

$$T(e).$$

Supposons que tout l'espace à ν dimensions soit occupé, même à l'extérieur de E, par un liquide parfait, incompressible, et supposons qu'à l'instant initial soient distribuées dans E des sources, positives ou négatives, suivant une loi telle que le débit par unité de temps pour les sources situées dans une portion quelconque e de E soit

$$T(e) - m(e),$$

tandis que, initialement, il n'y a aucune source extérieure à E.

Pour $t > 0$, nous supposerons que les sources soient entraînées avec le liquide ambiant. Considérons les particules liquides et les sources positives ou négatives ($+s_e$ ou $-s_e$) qui initialement couvraient l'ensemble e. Au temps t ces particules, augmentées des particules sorties des sources positives ($+s_e$), et diminuées des particules rentrées dans les sources négatives ($-s_e$) (¹), couvriront un certain ensemble e'.

Nous admettrons que le débit par unité de temps fourni par les sources situées à l'instant t dans e' soit invariable dans le temps, donc égal au débit fourni à l'instant initial par les sources qui alors cou-

(¹) Les sources peuvent émettre ou absorber des particules liquides, mais elles ne peuvent émettre ni absorber d'autres sources.

vraient l'ensemble e, c'est-à-dire à

$$T(e) - m(e).$$

La mesure $m(e')$ de l'ensemble e' sera égale à la mesure initiale $m(e)$, augmentée de la somme algébrique des débits fournis pendant les intervalles successifs dt par les sources situées initialement dans e, c'est-à-dire

$$m(e') = m(e) + \int_0^t [T(e) - m(e)]\,dt,$$

$$m(e') = m(e) + [T(e) - m(e)]\,t.$$

Pour $t = 1$, cette formule donne

$$m(e') = T(e).$$

C'est précisément la formule (7).

Donc, quand nous aurons bien défini le mouvement de chaque particule liquide, depuis sa position initiale x, au temps $t = 0$, jusqu'à sa position finale x', au temps $t = 1$, nous aurons défini une transformation des points x en les points x' faisant correspondre à tout ensemble e de points x un ensemble e' de points x' de telle sorte que la relation (7) soit satisfaite.

La correspondance entre x et x' ne sera pas toujours biunivoque. Si en x se trouve au temps $t = 0$ une source ponctuelle positive, il lui correspondra, en général, une infinité de points x', à savoir : toutes les positions occupées au temps $t = 1$ par les différentes particules liquides émises dans l'intervalle de $(0, 1)$ par la source ponctuelle qui au temps $t = 0$ se trouvait en x.

Si en x' se trouve au temps $t = 1$ une source ponctuelle négative, cet x' correspondra à une infinité de points x, à savoir : toutes les positions occupées au temps $t = 0$ par les différentes particules liquides absorbées durant l'intervalle de temps $(0, 1)$ par la source ponctuelle négative qui, au temps $t = 1$, est en x'.

Pour achever de définir ce mouvement le plus simplement, dans l'espace tout entier, nous supposerons qu'il est irrotationel et, pour $\nu > 1$, nul à l'infini.

Considérons à l'instant t le mouvement produit en un point x' par les sources situées dans le voisinage d'un point ξ'. La particule liquide passant en ξ' à l'instant t se trouvait à l'instant initial en un point ξ. Un petit domaine (dE_ξ) entourant ce point initial ξ fournissait par unité de temps un débit élémentaire

$$T(dE_\xi) - m(dE_\xi). \tag{8}$$

Au temps t ces sources sont transportées dans le voisinage du point ξ' où elles fournissent le même flux élémentaire par unité de temps. Ce flux élémentaire (8) produit en x' une vitesse élémentaire donnée par

$$\vec{v}(x') = \frac{1}{S_\nu}\, \frac{\overrightarrow{x' - \xi'}}{|x' - \xi'|^\nu}\, \{T(dE_\xi) - m\, dE_\xi\}, \tag{9}$$

où S_ν est l'aire de la sphère de rayon un dans l'espace à ν dimensions. On a (¹)

$\nu =$	1	2	3	4
$S_\nu =$	2	2π	4π	$2\pi^2$

La vitesse résultante en x', à l'instant t, résultant de toutes les sources distribuées initialement dans E, sera :

$$\vec{V}(x') = \frac{1}{S_\nu} \int_E \frac{\overrightarrow{x' - \xi'}}{|x' - \xi'|^\nu} \{T(dE_\xi) - m(dE_\xi)\} \tag{10}$$

le second membre étant une intégrale de Stieltjes à ν dimensions.

Écrivons nos équations (10) sans notation vectorielle :

Les coordonnées cartésiennes $x'_1, \ldots, x'_\nu$ d'une particule au temps t sont des fonctions des variables de Lagrange : le temps t et les coordonnées initiales $x_1, \ldots, x_\nu$ de la même particule :

$$\begin{gathered} x'_1 = X_1(x_1, \ldots, x_\nu; t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_\nu = X_\nu(x_1, \ldots, x_\nu; t), \end{gathered}$$

avec

$$\begin{gathered} X_1(x_1, \ldots, x_\nu; 0) = x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_\nu(x_1, \ldots, x_\nu; 0) = x_\nu. \end{gathered}$$

(¹) *Voir* P. Lévy, *loc. cit.*, p. 268 et 264.

Les coordonnées cartésiennes $\xi'_1, \ldots, \xi'_\nu$ d'une source au temps t sont exprimées par les mêmes fonctions de t et des coordonnées initiales $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ de la source :

$$\begin{gathered}\xi'_1 = X_1(\xi_1, \ldots, \xi_\nu ; t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \xi'_\nu = X_\nu(\xi_1, \ldots, \xi_\nu ; t),\end{gathered}$$

avec

$$\begin{gathered}X_1(\xi_1, \ldots, \xi_\nu ; 0) = \xi_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ X_\nu(\xi_1, \ldots, \xi_\nu ; 0) = \xi_\nu.\end{gathered}$$

D'après (10) on a, les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t}$ étant relatives aux variables de Lagrange :

$$(11)\quad \frac{\partial X_k(x_1, \ldots, x_\nu ; t)}{\partial t} = \frac{1}{S_\nu} \int_E \frac{X_k(x_1, \ldots, x_\nu ; t) - X_k(\xi_1, \ldots, \xi_\nu ; t)}{\left\{ \sum_i [X_i(x_1, \ldots, x_\nu ; t) - X_i(\xi_1, \ldots, \xi_\nu ; t)]^2 \right\}^{\frac{\nu}{2}}} \{ T(dE_\xi) - m(dE_\xi) \}.$$

Les équations (11) font connaître les fonctions $X_1, \ldots, X_\nu$, au temps $t + dt$, quand on les connait au temps t.

Il est vrai que nos équations différentielles (11) ne rentrent pas dans les formes classiques pour lesquelles on a établi l'existence et le calcul de la solution. Néanmoins la méthode des approximations successives de M. Picard, et la méthode par cheminement de Cauchy-Lipschitz, convenablement appliquées, réussissent. Cela résultera de notre théorie des fonctionnelles *doublement dominantes* que nous exposerons plus tard.

Aujourd'hui nous nous contenterons de remarquer que le Jacobien, qui se définit ordinairement par

$$J = \frac{\partial(X_1, \ldots, X_\nu)}{\partial(x_1, \ldots, x_\nu)},$$

peut aussi se définir comme le rapport des volumes infiniment petits correspondants

$$J = \frac{m(de')}{m(de)} = \frac{T(de)}{m(de)} \quad [\text{relation } (7)].$$

Il est donc négatif et égal à la dérivée, au sens de Lebesgue, de la fonctionnelle d'ensemble $T(e)$. Or nous avons vu que cette dérivée est presque partout finie et déterminée [corollaire I du théorème de M. de la Vallée Poussin]. Donc notre transformation est univoque presque partout sur l'ensemble initial.