

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROBERT D'ADHÉMAR

Le mouvement gyroscopique des projectiles stables

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 12 (1933), p. 385-413.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12_385_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Le mouvement gyroscopique des projectiles stables :

PAR ROBERT D'ADHÉMAR.

Mon but est de montrer un aspect intéressant de la théorie du mouvement gyroscopique des projectiles stables. Nous sommes en présence de deux difficultés sérieuses. Les expériences, les données numériques sont insuffisantes, et, d'autre part, la théorie ne peut être qu'une suite d'approximations. Or, l'approximation est parfois dangereuse, car elle est une déformation.

Dans cet ordre, on n'entreprendrait rien si l'on avait la prétention de tout saisir d'un coup. Il faut un peu d'audace et beaucoup de prudence.

I. COMMENTAIRE SUR LES DONNÉES DU PROBLÈME. — Je suppose la rayure à gauche. Si la dérivation est normale, elle aura lieu à gauche du plan de projection.

Je rappelle quelques définitions. Soit Gz l'axe du projectile; G est le centre de gravité, A est la pointe. Soit Gz_1 la tangente à la trajectoire de G . Le plan Gz_1z , ou GAT est dit « plan de résistance ». Dans ce plan s'exerce la poussée R , appliquée au point C sur l'axe; posons $GC = l$.

On a $R = m\alpha v$, m étant la masse et α étant la retardation. La retardation a pour expression $cF(v)$; c est le coefficient balistique, et $F(v)$ est une fonction de la vitesse v du centre de gravité.

L'angle \widehat{AGT} , représenté par \hat{z} , est l'écart; c'est l'élément fondamental.

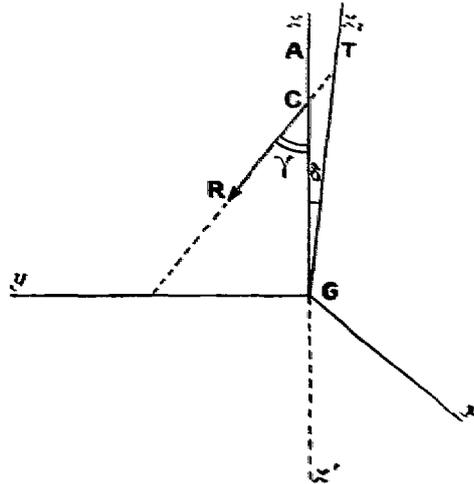
Soit γ l'angle de la poussée avec l'axe, autre élément fondamental.

Posons $\gamma = k_1 \delta$. Ce rapport k_1 joue un rôle important; je le nomme coefficient d'obliquité. On rencontre d'autres coefficients voisins, par exemple k_2 et k_3 définis par les relations

$$\sin \gamma = k_2 \sin \delta = k_3 \delta.$$

La valeur numérique du rapport k_1 varie probablement un peu, sur une trajectoire; elle est encore mal connue. Il n'y a donc aucun inconvénient à substituer à k_1 , k_2 , k_3 , un coefficient unique, par exemple $k = k_1$.

Fig. 1.



Dans le plan de résistance qui coïncide avec le plan de la figure, nous prenons l'axe Gy perpendiculaire sur Gz , puis nous prenons l'axe Gx en avant. Le trièdre $Gxyz$ aura pour sens d'orientation le sens des aiguilles d'une montre, tandis que le trièdre $Gxyz'$ aura pour sens le sens direct. Prenons ce trièdre de référence direct $Gxyz'$, et supposons le tube rayé à gauche; la vitesse de rotation propre du projectile sera représentée par un vecteur Ω porté par Gz' à l'instant $t = 0$.

Les forces extérieures donnent lieu, au point G , à un couple dont les composantes, par rapport à $Gxyz'$, seront \mathfrak{M}_x , \mathfrak{M}_y , \mathfrak{M}_z . La composante \mathfrak{M}_z est le moment de R par rapport à G , vecteur porté

par Gx , et l'on a

$$\mathfrak{M}_x = R/\sin\gamma = R/\sin k\delta \sim Rk\delta.$$

Pour donner une signification physique au couple \mathfrak{M}_y , il faut définir les effets Magnus et Esclangon.

L'effet Magnus est un phénomène connu. Un phénomène analogue pourrait se produire sur un projectile tournant dont l'écart serait grand, et cet effet Magnus serait défavorable, au point de vue de la stabilité. Je n'étudie ici que des écarts assez petits, par exemple moindres que 12° , 15° , ... de sorte que le rôle de l'effet Magnus serait minime. Je le négligerai.

Pour concevoir l'effet Esclangon, il faut saisir l'action des frottements sur la stabilité d'une toupie. Si la toupie a une très grande vitesse de rotation propre, le frottement aide la toupie à se redresser, à dormir. Le frottement, à la pointe de la toupie, tend à supprimer la nutation et à rapprocher le mouvement de la simple précession.

Le frottement stabilise. De même, d'après M. Esclangon, les frottements latéraux engendrent un couple \mathfrak{M}_y , qui favorise la stabilité.

Dans les théories primitives, qui constituent une première approximation très utile, le couple \mathfrak{M}_y était négligé.

La bonne tenue des projectiles tournants bien établis, la régularité des sifflements nous invitent à regarder le couple \mathfrak{M}_y , dû aux *frottements latéraux*, comme un élément fondamental. Ce couple n'est vraisemblablement négligeable que pour des écarts extrêmement petits.

Afin de simplifier l'exposé, j'ometts ici les forces qui résistent aux *changements d'orientation* du projectile, dans son mouvement pendulaire. Ces forces sont actuellement peu connues.

Avant de parler du couple \mathfrak{M}_x , il est nécessaire de préciser la notion de stabilité.

Soit Ω la constante qui représente la vitesse de rotation initiale imprimée au projectile. A l'instant t , ce solide a une rotation, par rapport à G , dont les composantes sur les axes Gx, y, z' , sont p, q, r .

Considérons la rotation instantanée p, q, r .

C'est la rotation instantanée du trièdre $Gxyz'$, regardé comme un solide indépendant de la rotation propre du projectile.

Par définition, la *stabilité* du projectile comporte la réalisation de deux conditions. D'abord δ doit être petit.

Nous dirons, par exemple, que δ est très petit s'il est moindre que 3° ou 4° , et que δ est assez petit s'il reste compris entre 4° ou 5° et 12° ou 14° , par exemple (ces limites dépendent de la constitution du projectile). Ensuite la stabilité exige que p et q soient très petits par rapport à Ω .

D'autre part, on obtient immédiatement l'équation

$$c\lambda \frac{d\varphi}{dt} = \mathfrak{M}_z,$$

($c\lambda$ désigne le moment d'inertie axial).

Afin de simplifier l'exposé, j'admets que \mathfrak{M}_z est négligeable, ce qui donne

$$\varphi = \Omega, \quad \text{ou bien} \quad \varphi = \Omega_1 \approx \Omega.$$

En ce qui concerne les projectiles usuels et les portées ordinaires, on peut regarder \mathfrak{M}_z comme nul, avec une grande approximation.

Par des modifications de forme, on pourrait obtenir un couple \mathfrak{M}_z non négligeable, et une diminution de la vitesse de rotation non négligeable, ce qui serait favorable pour la stabilité, sur la branche descendante. Je ne m'occupe pas de cette question. Et, de même, je mets de côté certaines trajectoires. Considérons un tir très courbe. Dans ce cas, le minimum de v a lieu près du sommet. Si ce minimum était assez petit, les phénomènes deviendraient tellement compliqués que leur analyse serait impossible. Je supposerai donc toujours que le minimum de v n'est pas trop petit, et nous avons alors trois couples \mathfrak{M}_x , \mathfrak{M}_y , et \mathfrak{M}_z . Le premier a la plus grande valeur numérique, et le troisième peut être négligé, pour simplifier les formules.

2. LA FONCTION DE STABILITÉ. — Dans la Balistique, le *calcul des trajectoires* est un calcul de *trajectoires simplifiées*, puisque l'on suppose \dot{G} et G confondus et la retardation tangente à la trajectoire. On a alors une *trajectoire plane*. Si le projectile est stable, la trajectoire plane est une bonne approximation de la trajectoire véritable.

Dans la trajectoire plane, on nomme v la vitesse du centre de gra-

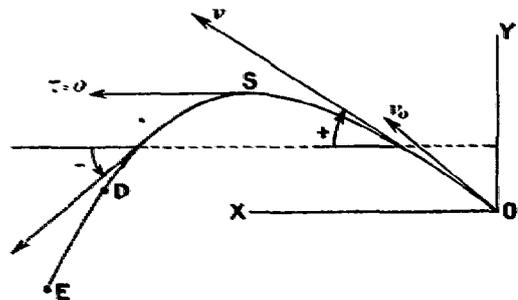
vité et u la composante horizontale de cette vitesse: τ désignant l'inclinaison de la tangente, on a

$$u = v \cos \tau.$$

L'angle τ est regardé comme positif entre l'origine O' et le sommet S , et comme négatif après le sommet. L'angle de départ, dit angle de projection, est désigné par α .

On a, en général, sur une trajectoire, un point D situé après le sommet, où v est *minimum*.

Fig. 2.



Dans le cas du tir de plein fouet (trajectoire tendue, vitesse initiale v_0 grande, et $\alpha < 10^\circ$ ou 12°), le point D se trouve au delà du point de chute.

Dans le cas du tir courbe, le point D se trouve après le sommet et près du sommet.

Au delà du point D , on trouve, en général, un point E , où v est *maximum*. Ce point E peut se trouver près du point de chute, mais, généralement, il est au delà.

Le temps est désigné par t ; il est compté, en secondes, à partir de l'origine du tir. Nous représentons par g l'accélération de la pesanteur (en mètres par seconde). Je rappelle que l'on a

$$du < 0, \quad d\tau < 0, \\ \tau' = \frac{g \cos \tau}{v},$$

c est la vitesse d'abaissement de la tangente.

L'unité de longueur est le mètre et l'unité de poids est le kilo-

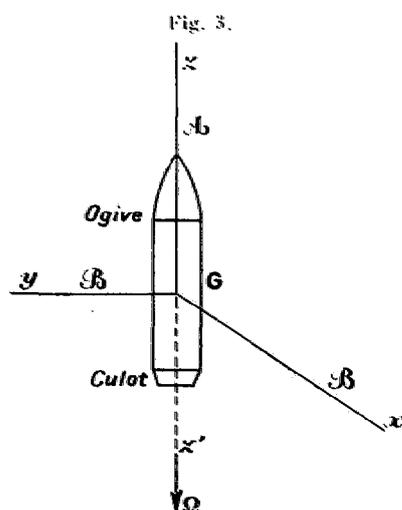
gramme. Nous désignons par α le moment d'inertie axial et par β le moment d'inertie équatorial.

Nous posons

$$P = \frac{Rk}{\alpha \Omega},$$

et

$$Q = \frac{P}{\delta}.$$



Cette fonction Q se trouve, sous une autre forme, dans les travaux de Mayevski.

Cette fonction joue un rôle important; je la nomme « fonction de stabilité »; elle est le quotient de deux vitesses angulaires. On peut écrire

$$\alpha \Omega_1 = \alpha \Omega P \delta.$$

On supposait toujours, autrefois, k et l constants, mais il est probable que ces paramètres sont variables sur une trajectoire. Nous pouvons admettre que, pour un projectile stable, Q décroît depuis l'origine jusqu'en un point M , situé entre S et D . Après ce minimum, Q croît jusqu'au point E , sur la trajectoire.

On a, sur la trajectoire, autour du point M où Q est minimum, une *zone dangereuse*, dans laquelle δ atteint son *maximum maximorum*. Si ce maximum était trop grand, l'obus pourrait chavirer.

On a, dans la zone dangereuse, le minimum de Q , le minimum de P et le maximum de $|\tau'|$, ce qui n'exige pas que ces trois extrema soient simultanés.

Il faut définir le second couple, nous poserons

$$\mathfrak{M}_2 = \alpha \Omega \Lambda \delta.$$

Ce que nous pouvons saisir de la nature du mouvement pendulaire, d'après les théories élémentaires, nous conduit à supposer que le rapport $\Lambda : P$ est toujours petit et sera maximum dans la zone dangereuse (avec l'effet Magnus, comme avec l'effet Esclangon). Par exemple, on peut admettre que Λ varie dans le même sens que $\frac{1}{Q}$.

Pour simplifier l'exposé, supposons que $\frac{\Lambda}{P}$ est maximum lorsque $\frac{1}{Q}$ est maximum, à l'instant $t = t_1$.

Remarquons que Λ et P contiennent, en facteur, le coefficient balistique c , de sorte que $\frac{\Lambda}{P}$ ne contient pas c . Je me servirai, plus tard, de la dérivée logarithmique de Q . Cherchons son expression. On a

$$Q = \frac{m}{\alpha \Omega g} \frac{k l c b v^2}{\cos \tau},$$

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{k'}{k} - \frac{l'}{l} - \frac{c'}{c} + \frac{b'}{b} + 3 \frac{v'}{v} - g' \frac{\sin \tau}{c}.$$

La valeur de v' se déduit de la formule fondamentale

$$\frac{dv}{dt} = -g \left(\sin \tau + \frac{cR}{g} \right).$$

On connaît $\frac{c'}{c} = -\frac{v \sin \tau}{H}$; H est un très grand nombre, qui diminue lorsque l'altitude augmente.

On déduira les valeurs de b' des tables qui donnent $F(v)$ sous la forme $b v^2$. Il faut remarquer que $\frac{db}{dv}$ prend une grande valeur, lorsque la vitesse v se rapproche de la vitesse du son dans l'air.

Nous sommes peu renseignés sur les variations de k et l . Nous pouvons admettre que, pour un projectile stable, ces variations ont pour effet de diminuer les variations de Q . On pourrait admettre que la

valeur de k augmente de 1, 2, 3 unités, entre l'origine et la zone dangereuse, et que la variation totale de k est d'autant plus grande que la variation totale de Q est plus grande.

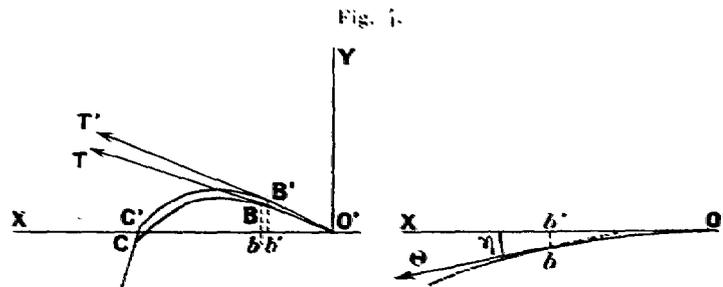
Concluons que nous attendons les données nouvelles et que, pour un projectile très stable, les variations de k et de l doivent jouer un rôle minime dans l'étude que je fais actuellement.

On obtient une image nette du mouvement gyroscopique (ou pendulaire), si le projectile est très stable, mais si la stabilité est moins bonne, la précision de l'analyse diminue: l'image peut devenir vague.

Actuellement, nous devons nous contenter de valeurs probables pour k et l , et pour la fonction A . Ce fait ne modifie en rien la conception mécanique du phénomène et l'allure de la théorie.

5. LE CALCUL APPROCHÉ DE L'ÉCART. On calcule l'écart, en prenant comme base certains éléments de la trajectoire plane, regardés comme première approximation des éléments correspondants de la trajectoire à double courbure, et en faisant d'autres approximations, suggérées par l'intuition physique de la nature des phénomènes. M. Esclangon a décrit cette méthode très remarquablement.

Soit $O'BC$ la trajectoire vraie, et soit $O'B'C'$ sa projection sur le plan de départ $O'XY$ (plan de projection). Nous admettons que $O'B'C'$



diffère peu de la *trajectoire plane* qui a été calculée. Le point B a pour projection B' , nous admettons que ces deux points correspondent au même instant t . Nous admettons que la vitesse, au point B , est approximativement égale à la vitesse v au point B' .

Soit $O'b \dots$ la projection horizontale de la trajectoire; soit Θ la tangente à cette courbe; soit η son inclinaison sur $O'X$. Nous admet-

tous que γ_1 reste toujours petit. Soit θ l'inclinaison de la tangente BT et soit τ l'inclinaison de la tangente B'T' de la trajectoire plane. Si nous admettons intuitivement que l'on a $\theta \sim \tau$, nous en déduisons la relation

$$v \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\tau}{dt} \right) \sim \alpha_1 k - v \dot{\delta}_2.$$

Nous définissons $\dot{\delta}_2$ ultérieurement. On peut conclure que la différence $\theta - \tau$ est négligeable dans des conditions assez générales, et la discussion que l'on fait, à ce sujet, indique le degré d'approximation obtenu lorsqu'on écrit

$$\theta - \tau \sim \alpha, \quad \dot{\theta} - \dot{\tau} \sim \alpha.$$

Voilà une approximation audacieuse, au premier abord, mais justifiée par le fait qu'on ne découvre aucune contradiction dans les conséquences. Souvent, on regarde une approximation comme valable, si elle est inspirée par une intuition, ou par une théorie donnant une image rudimentaire, mais en prenant la précaution de vérifier que les formules finales ne sont pas en contradiction avec les approximations initiales. On a alors une théorie approchée cohérente.

Il faut contrôler les approximations de la Balistique, d'autant plus qu'elles ne sont pas uniformes sur toute la trajectoire. Quand l'approximation est abandonnée au hasard, cela crée un malaise.

Prenons sur la tangente, dans le sens du mouvement, un point O tel que l'on ait $GO = 1$. Par ce point O, faisons passer un plan OHN perpendiculaire sur la tangente: l'axe OH est horizontal, vers la droite, pour un observateur placé au culot; l'axe ON est dirigé vers le haut, de sorte que, pour l'observateur placé au culot, le trièdre OHNG est direct. Soit a la trace de l'axe GA sur ce plan de référence; on a donc $Oa = \tan \delta$. Nous écrirons, aussi bien $Oa = \delta$, car nous supposons essentiellement δ assez petit.

La substitution de δ à $\tan \delta$ ou à $\sin \delta$ est une approximation fondamentale, dans cette théorie.

Les coordonnées du point a , dans le plan de référence, sont δ_1 et δ_2 (fig. 5).

Il est indispensable d'examiner, d'une part, les hypothèses faites sur le caractère mécanique des phénomènes et, d'autre part, la nature des

simplifications analytiques admises pour l'approximation. Si je ne puis ici le faire très complètement, j'essaie de donner une description exacte de la méthode.

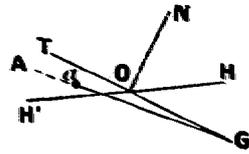
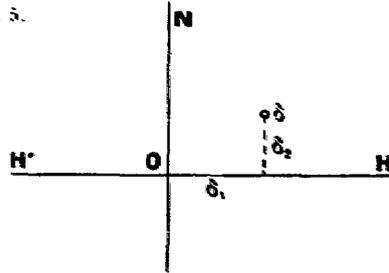


Fig. 5.



Omettant les détails, j'écris maintenant les équations du mouvement gyroscopique, ou pendulaire, sous la forme (ES); ce sont les équations de M. Esclangon et de M. Sugot

$$(ES) \quad \begin{cases} \frac{d\hat{\theta}_1}{dt} = \Lambda \hat{\theta}_1 - P \hat{\theta}_2, \\ \frac{d\hat{\theta}_2}{dt} = P \hat{\theta}_1 - \Lambda \hat{\theta}_2 - \tau'. \end{cases}$$

Λ est le terme d'amortissement; on a

$$-\Lambda \equiv L - A.$$

Le terme A a été défini et nous posons

$$L = \frac{c^2}{v^2} (k - 1).$$

Si nous adoptons l'effet Esclangon plutôt que l'effet Magnus, nous aurons

$$L > 0, \quad \Lambda > 0, \quad \Lambda < 0.$$

Le terme L provient de l'effet *Garnier*, qui va être défini. Nous pouvons écrire les équations (ES) sous une autre forme

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}_1}{dt} &= \Lambda (\hat{\theta}_1 - \Delta_1) - P (\hat{\theta}_2 - \Delta_2), \\ \frac{d\hat{\theta}_2}{dt} &= P (\hat{\theta}_1 - \Delta_1) - \Lambda (\hat{\theta}_2 - \Delta_2). \end{aligned}$$

Avec les axes choisis et avec la rayure à gauche, on a

$$\begin{aligned} \Omega < \alpha, & \quad P < \alpha, \\ \Delta_1 &= -\tau \frac{P}{P^2 + \Lambda^2}, \\ \Delta_2 &= -\tau \frac{\Lambda}{P^2 + \Lambda^2}. \end{aligned}$$

Dans les théories primitives, le terme Λ ne figurait pas; on ne tenait compte ni de l'effet des frottements ou des dépressions, ni de l'effet Garnier, qui n'est pas un effet physique. M. Maurice Garnier a réclamé une grande précision dans l'établissement des équations : l'effet Garnier c'est le rôle de l'angle γ .

M. de Sparre qui a écrit, en 1904, un Mémoire fondamental, au point de vue de la *méthode*, et au point de vue de la *forme de la solution*, supposait intuitivement le rapport $\tau_1 : \tau$ négligeable, ce qui équivaut à la suppression de l'effet Garnier, et ce qui ne serait rigoureusement acceptable que pour une trajectoire presque horizontale et avec une vitesse initiale très grande.

Les travaux anciens renferment tous l'hypothèse, plus ou moins tacite, que la tangente BT est parallèle à la tangente B'T' (*fig. 4*). Les travaux récents de M. de Sparre (1923, 1924, 1927), et ceux de M. Charbonnier (1927), tiennent compte de la variation de τ . Les équations de Garnier-Charbonnier, d'une part, et celles de M. de Sparre, d'autre part, sont du second ordre.

4. L'AXE DYNAMIQUE D'ÉQUILIBRE DE M. ESCLANGON. — Le point ξ , de coordonnées Δ_1 et Δ_2 , est le centre instantané de précession, et la droite $\xi\xi'$ est l'axe instantané de précession. Dans les théories anciennes, on avait $\Lambda = 0$, d'où

$$\Delta_1 = -\frac{1}{Q} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = 0.$$

C'est une première approximation. Dans les conditions actuelles (rayure à gauche), on a

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0.$$

J'introduis l'angle φ , défini par la relation

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\Lambda}{P} = \frac{L - \Lambda}{P}.$$

On a d'abord

$$\frac{L}{P} = \frac{c\Omega}{m} \frac{k-1}{kt} \frac{1}{v}.$$

Nous admettons que les valeurs des paramètres k et l sont stationnaires dans la zone dangereuse (φ étant voisin du maximum maximum). Il en résulte que $\frac{L}{P}$ est maximum au point D.

Nous avons admis, d'autre part, que $\frac{\Lambda}{L}$ est assez petit et que $\frac{\Lambda}{P}$ est maximum au point M. Il en résulte que φ est maximum en un point J, situé entre M et D, sur la trajectoire. Et l'on peut écrire

$$\Delta_1 = -\frac{1}{Q} \cos^2 \varphi.$$

Lorsque le minimum de v est grand, $\operatorname{tang} \varphi$ est voisin de $\frac{L}{P}$, et le maximum de φ est petit.

Mais, si le minimum de v était faible, alors nous ne pourrions plus affirmer que le rapport $\frac{\Lambda}{L} : \frac{\Lambda}{P} = \Lambda : P$ reste petit, et le maximum de φ ne serait pas petit.

En résumé, on a

$$\Delta_2 = \Delta_1 \operatorname{tang} \varphi,$$

et nous pouvons dire que, pour un projectile très stable, φ est très petit, sans préciser.

Pour une trajectoire donnée, le point \mathfrak{A} décrit une courbe, qui a la forme ci-dessous (*fig. 6*).

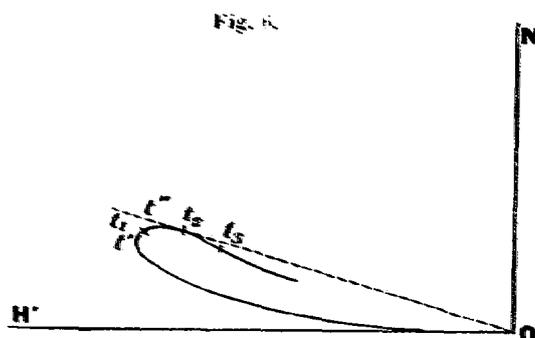
Le minimum de Δ_1 (maximum de $|\Delta_1|$) a lieu à l'instant t' ; le maximum de Δ_2 à l'instant t'' ; le minimum de Q à l'instant t_1 (point M); le maximum de φ a l'instant t_2 (point J); le minimum de v à l'instant t_3 (point D); enfin le maximum de la distance $O\mathfrak{A}$ aura lieu à un instant assez voisin de t_1 .

Ceci ne représente qu'une indication générale sur la forme de la courbe \mathfrak{A} . Il faudra la construire dans chaque cas. On rencontre,

d'ailleurs, une difficulté provenant de l'incertitude qui régné sur les variations des paramètres k, l, Λ .

Nous voyons immédiatement, d'après les équations (ES), la nature qualitative du mouvement instantané de a , par rapport à \mathfrak{A} , mais un élément nous manque : la distance $\mathfrak{A}a$.

Une remarque importante de M. Esclangon permet de calculer, non point l'élément $\mathfrak{A}a$, mais un élément analogue, et de mettre en évidence le jeu de l'amortissement.



Prenons la variable complexe

$$z = \hat{a}_2 - i\hat{a}_1$$

le système (ES) sera remplacé par l'équation unique

$$(1) \quad \frac{dz}{dt} = (\Lambda - iP)z - \tau$$

et le point \mathfrak{A} sera représenté par la variable complexe u , définie par l'équation linéaire

$$(2) \quad u = (\Lambda - iP)u - \tau$$

Soit ζ une solution particulière de (1); on aura donc

$$(3) \quad \frac{d\zeta}{dt} = (\Lambda - iP)\zeta - \tau$$

On en déduit immédiatement

$$(4) \quad z - \zeta = (z_0 - \zeta_0) e^{\int_0^t (\Lambda - iP) dt}$$

et enfin

$$(5) \quad z - \zeta = (z_0 - \zeta_0) e^{\int_0^t \lambda dt}.$$

Cette équation traduit le fait de l'amortissement, λ étant négatif.

La solution particulière ζ de M. Esclangon définit un point ω dit « centre dynamique d'équilibre », et la droite $G\omega$ sera l'axe dynamique d'équilibre. M. Esclangon a conçu sa solution ζ comme correspondant à celui des mouvements gyroscopiques possibles, dont l'allure aurait le plus de régularité, et il a été amené à définir ζ , en utilisant le *prolongement à l'infini* de la trajectoire. M. Esclangon a eu, certes, une *intuition puissante* et jamais le mouvement pendulaire n'avait été analysé, au point de vue physique, avec une pareille vigueur. Cependant, le prolongement à l'infini d'une trajectoire est chose bien abstraite, et je vois de grandes difficultés, en particulier, dans la définition de la densité de l'air, à l'infini, qu'on la suppose finie ou infinie. Je chercherai donc une méthode plus maniable.

Retenons cette idée de M. Esclangon : emploi d'une solution particulière *exacte, et bien choisie*, de l'équation différentielle (1). Quand je dis « exacte », il faut comprendre : exacte dans le cadre tracé par les *approximations antérieures*. C'est ce qui rend si utile l'étude difficile des approximations de la Balistique.

Si le projectile tournant est très stable après le départ, le point a se rapprochera, assez rapidement, du point ω , et il s'en rapprochera de plus en plus. Telle est l'image lumineuse, que nous devons à M. Esclangon.

D'autre part, au point de vue analytique, notons que l'on trouve une première ébauche de cette théorie dans le Mémoire de 1904 de M. de Sparre. On voit, dans ce Mémoire, une solution particulière approchée, avec, en plus, des termes exponentiels. La solution particulière approchée, c'est le point α , tandis que le point ω représente une solution particulière exacte; nous verrons quelle est la nature de cette approximation.

§. L'AXE INSTANTANÉ DE RÉFÉRENCE. — L'image mécanique de M. Esclangon, « intégrale particulière présentant en quelque sorte un minimum d'oscillation », est une intuition très pénétrante, mais

extrêmement difficile à réaliser analytiquement, et, d'autant plus que nous nous trouvons sur un échafaudage d'approximations. Je préfère un autre point de vue.

Nous désirons essentiellement connaître le *maximum maximorum* de δ . Dans ce but, je prends la solution particulière ζ , qui passe par celui des points \mathfrak{A} qui est le *plus éloigné* de l'origine. Soit \mathfrak{A}_1 ce point, et, pour simplifier le discours, je suppose que le centre instantané de précession se trouve en \mathfrak{A}_1 , à l'instant t , où Q est minimum (point M). Je poserai

$$(6) \quad \zeta = \Delta_2 + i\Delta_1 + Z,$$

ce qui définit un nouveau point Γ , dans le plan de référence OHN, de sorte que Z représente la *correction* permettant de passer de la courbe \mathfrak{A} à la courbe Γ .

Je nomme Γ centre instantané de référence, et $G\Gamma$ axe instantané de référence : Z sera la solution de l'équation différentielle

$$(7) \quad \frac{dZ}{dt} = (\Lambda + iP)Z - (\Delta_2 + i\Delta_1),$$

qui est nulle pour $t = t_1$.

Nous avons, d'après ce qui précède,

$$(8) \quad \Delta_1 = -\frac{1}{Q} \cos^2 \varphi,$$

$$(9) \quad \frac{d\Delta_1}{dt} = \Delta_1' = \frac{Q'}{Q^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{Q} \sin 2\varphi \cdot \varphi',$$

$$(10) \quad \Delta_2 = \frac{1}{Q} \frac{1}{2} \sin 2\varphi,$$

$$(11) \quad \frac{d\Delta_2}{dt} = \Delta_2' = -\frac{Q'}{Q^2} \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{Q} \cos 2\varphi \cdot \varphi'.$$

Considérons le terme

$$\frac{Q'}{Q^2} = \frac{1}{Q} \frac{Q'}{Q},$$

D'après ce que nous avons vu antérieurement, ce terme est connu approximativement, si nous pouvons saisir approximativement les variations de k et l , variations minimales si le minimum de v est grand.

De même, il y aurait quelque incertitude sur les valeurs de φ et φ' ,

si les variations de k, l, Λ étaient assez fortes, ce qui n'a pas lieu lorsque le minimum de v est grand.

Si nous pouvons fixer approximativement le maximum Φ de φ , nous pourrions prendre pour φ' les valeurs suivantes : $\varphi' = 0$ dans la zone dangereuse, autour des points M et D; et, à partir de l'origine, avant la zone dangereuse, une valeur moyenne de la variation de φ , par exemple $\frac{\Phi}{l_2}$, en supposant $\varphi_0 \sim 0$, ce qui est approximativement vrai lorsque la vitesse initiale est très grande.

Nous devons intégrer l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} + pZ + q &= 0, \\ p &= -(\Lambda - iP), \\ q &= \Delta_2 + i\Delta_1. \end{aligned}$$

La solution, nulle pour $t = t_1$, sera

$$(10) \quad Z = e^{-\int_{t_1}^t p dx} \left(\int_{t_1}^t q e^{\int_{t_1}^x p dx} dx \right).$$

Posons

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t \Lambda dx &= z(t) = z_t, \\ \int_{t_1}^t P dx &= \beta(t) = \beta_t. \end{aligned}$$

On aura

$$Z = e^{-\Lambda t} Y,$$

en posant

$$(13) \quad \begin{aligned} Y &= e^{\beta_t - i z_t} Y_t, \\ Y_t &= \int_{t_1}^{t'} (\Delta_2 + i\Delta_1) e^{-\beta_t + i z_t} dt, \end{aligned}$$

$$(14) \quad Y = - \int_{t_1}^{t'} e^{-\beta_t} (U + iV) dt,$$

avec

$$(15) \quad U = \Delta_2 \cos \beta_t + \Delta_1 \sin \beta_t,$$

$$(16) \quad V = \Delta_1 \cos \beta_t - \Delta_2 \sin \beta_t.$$

Par exemple, pour calculer Z à l'origine, pour $t = 0$, nous devons

calculer des intégrales de la forme suivante :

$$(C) \quad \int_{t_1}^{t_0} e^{-2x} \Delta' \cos \beta_x dx \quad \text{ou} \quad \int_{t_1}^{t_0} e^{-2x} \Delta' \sin \beta_x dx,$$

Δ' désignant Δ_1 ou Δ_2 .

Considérons d'abord la quadrature

$$\beta(t) = \int_{t_1}^{t_0} P dx < 0,$$

et posons

$$(17) \quad \int_{t_1}^{t_0} P dx = \int_{t_1}^{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} + \int_{T_2}^{T_3} + \dots + \int_{T_{2n-1}}^{t_0} P dx,$$

$$(18) \quad \int_{t_1}^{T_1} = -\frac{\pi}{2}, \quad \int_{T_1}^{T_2} = -3\frac{\pi}{2}, \quad \int_{T_2}^{T_3} = -5\frac{\pi}{2}, \quad \dots$$

En ces points T_1, T_2, T_3, \dots on a

$$\cos \beta(T) = 0,$$

et, dans les intervalles successifs, $\cos \beta(x)$ conserve un signe constant. Cela permet d'appliquer le théorème de la moyenne, sous la forme suivante, en prenant β comme variable indépendante :

$$(19) \quad \int_{T_1}^{T_2} e^{-2x} \Delta' \cos \beta_x dx = \left[e^{-2x} \Delta' \frac{1}{P} \right]_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \cos \beta d\beta,$$

ou, en abrégé,

$$+ 2[\]_1.$$

Le crochet représente une valeur moyenne de l'expression qu'il contient, et l'intégrale a la valeur $+ 2$.

Si nous prenons l'intervalle d'intégration suivant, nous aurons une autre moyenne de la même fonction et une intégrale dont la valeur est $- 2$; avec la même abréviation,

$$- 2[\]_2.$$

Nous calculons donc la première quadrature (C), en prenant les intervalles successifs $t_1, T_1, T_1, T_2, \dots, T_{2n-1}, t_0$. Dans le premier intervalle, on a $\Delta' \sim 0$, car, dans cet intervalle, Δ_1 et Δ_2 sont voisins de

leurs maxima respectifs. Puis nous avons une suite de termes :

$$2[\quad]_1 - 2[\quad]_3 + 2[\quad]_5 - 2[\quad]_7, \dots$$

Si le minimum de Q n'est pas trop petit, Δ' restera petit. Deux moyennes consécutives seront voisines et les différences successives seront très petites. Il en résulte que la correction Z sera très petite.

Le mode de calcul de Z donne des indications sur l'ordre de grandeur du résultat. Une discussion détaillée serait longue.

D'après ce qui précède, on voit que certains termes prennent de l'importance si, partant d'une vitesse initiale très grande, on atteint, sur la trajectoire, la vitesse du son dans l'air.

Il faut remarquer que si l'on a une trajectoire presque horizontale, avec une vitesse initiale très grande (tir de plein fouet), il est inutile de prolonger le calcul de la trajectoire jusqu'au point M . Dans ce cas, on prendra la solution Z , qui est nulle au point α_2 correspondant au point de chute.

6. LES MOUVEMENTS D'OSCILLATION ET LES MOUVEMENTS DE RÉVOLUTION. —

Le mouvement pendulaire est nommé « oscillation » si la droite Oa , dans le plan OHN , oscille autour de OH' (rayure à gauche) ou autour de OH (rayure à droite). Le mouvement est nommé « révolution » si la droite Oa fait un *tour complet* autour de O . J'ai obtenu les résultats suivants en faisant usage d'approximations analogues aux approximations primitives, c'est-à-dire, essentiellement, en négligeant le terme d'amortissement A .

D'abord, à l'origine de la trajectoire, si l'on a une grande vitesse initiale V_0 et un grand angle de projection α , par exemple 60° ou 70° , la fonction de stabilité Q restera très grande pendant un certain temps, et presque stationnaire. Dans ces conditions, si l'écart initial n'est pas nul, on pourra avoir, à l'origine, des révolutions qui se transformeront en oscillations lorsque Q décroîtra sensiblement.

Ce résultat *subsiste* si j'emploie la théorie plus précise que je viens d'esquisser.

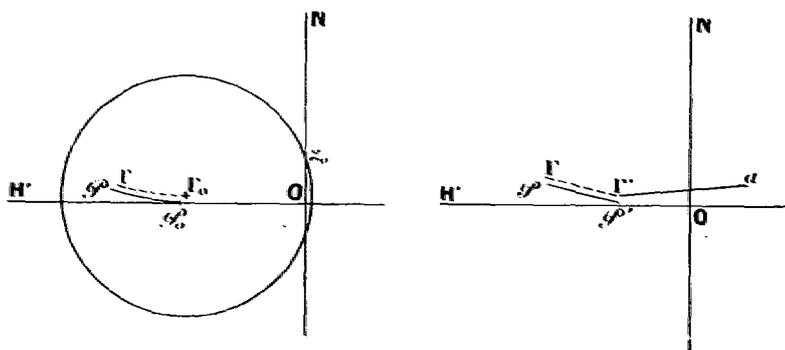
À l'origine, on a $A \sim 0$, de sorte que, pendant un certain temps, l'effet d'amortissement est presque nul. Si Q reste très grand et presque stationnaire pendant un certain temps, les points α' et Γ seront

presque immobiles et confondus avec \mathfrak{X}_0 et Γ_0 . Si z_0 représente le petit écart initial, le mouvement de a restera très voisin du cercle de centre Γ_0 passant par z_0 .

On voit bien que la révolution est possible.

Ensuite, dans le cas du tir courbe, sur la branche descendante, après les points M et D, j'ai prévu la possibilité du passage de l'oscillation à la révolution si la fonction de stabilité Q devient *rapidement croissante*.

Fig. 7.



Ce résultat subsiste, avec une *restriction*, lorsque j'emploie la théorie plus précise. Si, à l'instant t , la croissance de Q est devenue assez rapide, on pourra avoir les points \mathfrak{X}' et Γ' assez voisins de l'origine; on pourra donc avoir

$$\Gamma a' > \Gamma O,$$

a' étant la position du point a à l'instant t , ce qui signifie que le mouvement est de révolution. Mais, si l'amortissement à ce moment est devenu *très fort*, le segment $\Gamma a'$ sera devenu trop petit et la révolution sera impossible; le point a' restera à gauche de l'axe ON.

La distinction entre l'oscillation et la révolution paraît importante; elle peut jouer un rôle dans la théorie de la dérivation. Elle se rattache aussi aux découvertes de Mayevski, qui a été le grand précurseur dans la théorie du mouvement gyroscopique, et qui, avec des méthodes imprécises, a vu en gros les caractères importants du phénomène. Mayevski n'a pas vu la possibilité des mouvements de révolution, et il a affirmé que les amplitudes angulaires des oscillations sont décrois-

santes lorsque le temps croît. Avant le point M, sur la trajectoire, l'affirmation de Mayevski est exacte.

Mais, après le point M, l'amplitude angulaire de l'oscillation sera croissante.

J'ai fait, dans mes travaux antérieurs, l'histoire de cette question, et j'ai expliqué comment, avec la méthode d'approximation qu'il employait, Mayevski se trouvait incapable de saisir la possibilité du passage de l'oscillation à la révolution et du passage inverse.

RESUME. — Considérons le point Γ' qui a été pris comme origine sur la courbe (\mathcal{C}) ; la courbe (Γ) jouit, au point Γ' , d'une propriété particulière. On a, en ce point,

$$\frac{d\hat{\theta}_1}{dt} = \frac{d\hat{\theta}_2}{dt} = \dots$$

Par suite, la dérivée $\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{\theta}_1}$ paraît, au premier abord, indéterminée, au point Γ' . Mais l'indétermination est levée par l'emploi de la Règle de l'Hôpital, et l'on a, en ce point,

$$\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{\theta}_1} = \frac{N\hat{\theta}_2 + P'\hat{\theta}_1 - z''}{N'\hat{\theta}_1 - P'\hat{\theta}_2}$$

De sorte que le point Γ' est, en général, pour la courbe (Γ) , un point de rebroussement.

L'existence de ce point de rebroussement indique que ma solution est *qualitativement* différente de celle de M. Esclangon et ne correspond pas exactement à l'*axe d'équilibre dynamique*, cette synthèse si suggestive du phénomène gyroscopique. Il est possible que cette conception de M. Esclangon ne soit réalisable analytiquement que par le prolongement à l'infini de la trajectoire, lequel donne, au point de vue analytique, la plus grande généralité. Mais il me semble que ma solution particulière donne satisfaction pour l'analyse du phénomène d'*amortissement*, qui joue un rôle si important.

Ce phénomène, on le sait, a été mis en relief par M. de Sparre, d'une manière très détaillée, et aussi par MM. Garnier et Charbonnier, mais par des méthodes absolument différentes de celle qui est employée dans ce Mémoire.

Et d'ailleurs, ces auteurs n'ont pas noté, comme M. Esclangon, l'effet mécanique des *frottements latéraux*. Si le projectile se tient bien, ce qui est révélé par la précision du tir et par certaine régularité des phénomènes sonores, le théoricien doit conclure que les forces de résistance stabilisent le projectile et que les variations des paramètres, tels que k et l , agissent très probablement en faveur de la stabilisation du projectile.

Telle est bien, je crois, la conception de M. Esclangon, et telle est aussi l'idée qui m'a guidé.

J'ai établi que l'on peut passer du point \mathcal{E} au point Γ par une sorte de *correction*, mais ceci doit être commenté. Cette correction ne serait ni efficace, ni opportune, si telle autre partie de la théorie reposait sur une approximation médiocre, et c'est ce qui arriverait, par exemple, si la valeur numérique du minimum de Q était trop petite.

Il faudrait donc compléter tout ce qui précède par l'étude attentive de l'ensemble des approximations adoptées, car toutes les approximations doivent être à peu près du même ordre, si nous voulons obtenir une image cohérente et harmonieuse du mouvement pendulaire. Et l'on verrait, je crois, qu'en général les approximations sont très bonnes, si la vitesse initiale est un très grand nombre et si le minimum de la vitesse est encore un assez grand nombre. Ce minimum doit être d'autant plus grand que l'altitude du point correspondant est plus grande, à cause de la décroissance du coefficient balistique. Je ne précise pas davantage, car cette discussion pourrait être longue.

NOTE SUR L'APPROXIMATION.

Je vais établir les équations différentielles du mouvement pendulaire par une méthode nouvelle, qui me permettra de mettre en lumière la nature des approximations. J'ai désigné ces équations par le symbole (ES), pour rappeler qu'elles ont été établies par M. Esclangon, d'une part, et par M. Sugot, d'autre part, dans des conditions qui n'étaient pas identiques, M. Esclangon tenant compte des forces de résistance aux changements d'*orientation*, et M. Sugot tenant compte de la *courbure* de la projection horizontale de la trajectoire.

Pour simplifier l'exposé, je ne tiens pas compte de ces forces de résistance aux changements d'orientation du projectile. Cela ne signifie pas que je méconnaisse leur rôle, mais je ne m'occupe actuellement que de la nature des approximations, et, à ce point de vue, la simplification que j'introduis est certainement acceptable.

Dans un Mémoire qui paraîtra prochainement (*Mémorial de l'Artillerie française*) sur « la détermination de la vitesse de rotation propre du projectile », j'ai établi les formules suivantes :

Les symboles θ et τ_1 ont été définis. Les angles d'Euler sont désignés par φ , ψ , δ . Le trièdre $Gxyz$ est direct. Je prends ici pour axe Gz l'axe du projectile, dans la direction du culot. L'axe Gx coïncide avec l'axe du couple \mathcal{M}_x . Je nomme ce trièdre le « trièdre libre », parce qu'il n'est pas lié au projectile, et je nomme « trièdre lié » un trièdre direct $GUVz$, lié au projectile. Je cherche les composantes p , q , r de la rotation instantanée du trièdre lié, sur les axes du trièdre libre, et les composantes de la rotation instantanée du trièdre libre, sur les mêmes axes; elles seront désignées par p , q , r .

Je suppose la rayure à gauche, et, par suite, la dérivation normale à gauche. Posons :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \delta', \\ \omega_2 = \tau_1' \cos \delta, \\ \omega_3 = -\tau_1' \sin \delta, \\ \omega_4 = -\omega_1 \sin \psi + \omega_2 \cos \psi, \\ \omega_5 = \omega_1 \cos \psi - \omega_2 \sin \psi, \\ \omega_6 = \omega_3 \sin \delta + \omega_4 \cos \delta, \\ \omega_7 = \omega_3 \cos \delta - \omega_4 \sin \delta. \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement :

$$\begin{array}{ll} (2) & p = \delta' + \omega_7, \\ (3) & q = \psi' \sin \delta + \omega_6, \\ (4) & \varphi = \varphi' - \psi' \cos \delta - \omega_5, \\ (5) & r = \psi' \cos \delta - \omega_7. \end{array}$$

La première approximation consiste dans la substitution de δ à $\sin \delta$, et de 1 à $\cos \delta$, la substitution devant être faite judicieusement. Le symbole (na) désignant une équation approchée, nous pouvons

écrire :

$$\begin{aligned}
 (6a) \quad \eta &= \psi' \delta - \delta r' \sin \theta - \theta' \sin \psi + r' \cos \theta \cos \psi, \\
 (7a) \quad \varphi &= \varphi' - \psi' - r' \sin \theta - \delta (-\theta' \sin \psi + r' \cos \theta \cos \psi), \\
 (8a) \quad r &= \varphi - \varphi'.
 \end{aligned}$$

On a : $\varphi_0 = \Omega$, et Ω est un grand nombre.

Une seconde approximation consistera dans la substitution de τ à θ , et de τ' à θ' . Nous admettons *intuitivement* que la trajectoire vraie est très voisine de la trajectoire plane, sa projection sur le plan vertical, et nous posons

$$(9) \quad \theta \sim \tau, \quad \theta' \sim \tau', \quad \theta'' \sim \tau''.$$

On peut, d'ailleurs, faire une discussion à ce sujet.

Je dois rappeler ici ce qui est bien connu par les théories élémentaires (voir mes travaux antérieurs) : pour que l'écart δ reste *assez petit*, il est nécessaire que la fonction de stabilité Q conserve une valeur numérique *assez grande*.

On admet encore une certaine indépendance des effets des forces, pour parler exactement on admet l'*autonomie* de la force déviatrice provenant de l'obliquité du projectile. Cela donne

$$u \left| \frac{d\tau}{dt} \right| = \mathcal{R}(k-1) \delta_1.$$

On suppose

$$k-1 \geq 0.$$

Si le trièdre de référence est direct et si la dérivation est normale, on aura

$$\tau_1 > 0, \quad \tau'_1 > 0.$$

Lorsque le mouvement pendulaire est une oscillation, on a

$$\delta_1 < 0.$$

Donc la formule de la vitesse angulaire de dérivation sera

$$(10a) \quad -u \frac{d\tau}{dt} = \mathcal{R}(k-1) \delta_1.$$

Lorsque le mouvement pendulaire est une révolution, cas exceptionnel, mais possible, il faut faire attention parce que l'on a, en toute

rigueur, des changements de signes de $\dot{\zeta}_1$ et de τ_1' . Mais, pendant la durée d'une révolution, $\dot{\zeta}_1$ est généralement négatif, et il ne devient positif que pendant un court intervalle de temps. J'admettrai que, pour la zone des $\dot{\zeta}_1$ positifs, on peut écrire

$$(11 a) \quad \frac{d\tau_1}{dt} = 0.$$

C'est une petite *altération*, introduite pour *regulariser* et simplifier l'image du phénomène, et qui n'a de sens que si la dérivation est normale. Retenons que la formule (10 a) pourrait être insuffisante. Dans la discussion d'un cas difficile, il faut remonter à la source, et ne pas se contenter de simplifications qui pourraient bien être des *contradictions*.

Actuellement, cette altération paraît acceptable parce que, si le mouvement est révolutif, $\dot{\zeta}$ et $\dot{\zeta}_1$ sont certainement voisins de zéro. Cela résulte des théories élémentaires du mouvement gyroscopique (voir mes travaux antérieurs).

Je vais utiliser les équations (10 a) et (11 a) pour étudier les expressions approchées de p et de q . Je rappelle que l'on a

$$(12 a) \quad \dot{\sigma}_1 = -\dot{\sigma} \sin \psi, \quad \dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma} \cos \psi.$$

On peut mettre l'équation (2) sous cette forme :

$$(2) \quad p = \dot{\sigma} - \dot{\sigma}' \cos \psi - \tau_1' \cos \psi \cdot \sin \psi.$$

Si nous posons

$$\frac{\dot{\sigma}}{v} (k - 1) \equiv L,$$

nous aurons

$$(13 a) \quad \tau_1' \cos \psi \cdot \sin \psi = L \dot{\sigma} \sin^2 \psi.$$

D'après l'équation (11 a), il faudrait remplacer L par zéro dans la zone des $\dot{\zeta}_1$ positifs, mais je crois qu'il n'y a pas grand inconvénient, en général, à conserver l'équation (13 a), sans restriction.

Nous pouvons maintenant faire intervenir une *intuition*, en nous laissant guider par les théories élémentaires du mouvement pendulaire, pour un projectile bien établi. On peut admettre qu'à l'origine de la trajectoire, $\dot{\zeta}$ reste très voisin de zéro, et ensuite, lorsque $\dot{\zeta}$ se

rapproche du maximum maximorum, que $\sin \psi$ reste voisin de un. Cela permet de proposer une nouvelle altération et de remplacer ainsi l'équation (13 a) par celle-ci :

$$(14 a) \quad r' \cos \psi \sin \psi = L \dot{\psi}.$$

Nous avons ainsi, après plusieurs altérations,

$$(15 a) \quad p = \dot{\psi}' + r' \cos \psi - L \dot{\psi}.$$

Dans l'expression approchée de q , donnée par l'équation (6 a), nous pouvons négliger le second terme, si le projectile est stable. et, *a fortiori*, si le tir est de plein fouet. Nous aurons

$$(16 a) \quad r' \cos \psi \cos \psi = L \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi.$$

Nous verrons qu'il est inutile, ici, d'examiner la possibilité d'une nouvelle altération. et nous écrirons

$$(17 a) \quad q = \psi' \dot{\psi} - r' \sin \psi + L \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi.$$

J'écrirai les équations classiques du théorème du moment cinétique, en projetant sur les trois axes du trièdre libre :

$$(18) \quad \omega \frac{dp}{dt} - \alpha q \psi - \omega q r = \mathcal{M}_x,$$

$$(19) \quad \omega \frac{dq}{dt} - \alpha p \psi - \omega p r = \mathcal{M}_y,$$

$$(20) \quad \alpha \frac{d\psi}{dt} = \mathcal{M}_z.$$

Ce sont des équations exactes au point de vue analytique, et ce seraient des équations exactes, au point de vue physique, si nous connaissions exactement \mathcal{M}_x et \mathcal{M}_y , en particulier si l'on connaissait la loi de variation de k et de l sur la trajectoire. Il est permis de poser : $\mathcal{M}_z = 0$, parce que la durée de la partie utile d'une trajectoire est brève, 3 ou 4 minutes pour des trajectoires exceptionnellement longues. On aura donc

$$(21) \quad \psi = \psi_0 = \text{const.}$$

Le rapport $\frac{r_0}{\Omega}$ sera très petit, extrêmement petit, si le départ n'est

pas très irrégulier, cas exclu. On aura donc

$$\varphi = \varphi_0 = \Omega \quad \text{ou bien} \quad \varphi = \varphi_0 = \Omega_1 \sim \Omega.$$

Nous écrirons

$$(22a) \quad \varphi = \Omega,$$

c'est une relation, ou exacte, ou très approchée.

Posons maintenant $\omega = \frac{\alpha}{\beta} \Omega$; $\frac{\alpha}{\beta}$ pourra être égal à $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, par exemple, de sorte que Ω sera très grand, par rapport à un, et ω sera encore grand.

Posons

$$\mathfrak{M}_x = \alpha \Omega P \delta, \quad \mathfrak{M}_y = \alpha \Omega \Lambda \delta;$$

et faisons encore une approximation, les équations (18) et (19) prendront la forme ci-dessous :

$$(23a) \quad \frac{dp}{dt} + \omega q = \omega P \delta,$$

$$(24a) \quad \frac{dq}{dt} - \omega p = \omega \Lambda \delta.$$

M. Sugot fait l'altération suivante; il écrit :

$$(25a) \quad q = P \delta.$$

$$(26a) \quad -p = \Lambda \delta.$$

Il faut faire une étude assez difficile, pour justifier l'approximation de M. Sugot, et en voir la signification analytique. M. Esclançon a fait une approximation équivalente, et cette altération sera très acceptable, si les rapports $\frac{P}{\Omega}$ et $\frac{q}{\Omega}$ sont très petits. Cela aura lieu si le minimum de la vitesse, sur la trajectoire, est assez grand. Je ferai cette étude ultérieurement.

Je rappelle que la stabilité peut être définie par les conditions suivantes :

$$\delta < \frac{1}{10} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{10} \text{ environ.}$$

et les rapports $\frac{P}{\Omega}$, $\frac{q}{\Omega}$ sont extrêmement petits.

Rassemblons les résultats, et notons que, si la vitesse initiale est très grande et si le minimum de la vitesse est encore un nombre assez grand, le rapport $\frac{L}{p}$ sera petit.

Posons : $L + \Lambda \equiv -A$; L et Λ sont positifs. Cependant, Λ serait négatif, si nous mettions en jeu l'effet Magnus au lieu de l'effet Esclangon. Mais, j'exclus ici l'effet Magnus qui n'agirait, très vraisemblablement, que sur un obus de stabilité médiocre. Nous avons donc

$$A < 0.$$

Finalement l'équation (15a) devient

$$(27a) \quad -A\dot{\delta} = \dot{\delta}' - \tau' \cos \psi - L\delta,$$

et l'équation (17a) devient ($\frac{L}{p}$ étant négligeable)

$$(28a) \quad P\dot{\psi} = \dot{\psi}'\delta - \tau' \sin \psi,$$

ce qui donne

$$(29a) \quad \dot{\delta}' = A\dot{\delta} + |\tau'| \cos \psi,$$

$$(30a) \quad \dot{\psi}' = \dot{\psi}P - |\tau'| \sin \psi.$$

Ce seraient les relations de Mayevski, si nous supposions A nul. Maintenant, revenons aux équations (12a), dans lesquelles l'approximation n'est que la substitution de $\dot{\delta}$ à $\text{tang} \dot{\delta}$. Nous pouvons donc, $\dot{\delta}$ étant petit, prendre les dérivées. Et, à l'aide des équations (29a) et (30a), nous obtenons les équations approchées du mouvement gyroscopique :

$$(31a) \quad \begin{cases} \frac{d\delta_1}{dt} = A\delta_1 - P\delta_2, \\ \frac{d\delta_2}{dt} = P\delta_1 - A\delta_2 + |\tau'|. \end{cases}$$

Nous avons, certes, fait des altérations, mais ne fallait-il pas déformer systématiquement, pour obtenir, d'un phénomène si compliqué, une image aussi simple et aussi commode? Les altérations sont dans la grande tradition de la Balistique; il suffit de les faire judicieusement, et de les contrôler.

Pour un physicien, ces altérations sont la résolution d'un *problème*

voisin du problème donné. Pour un géomètre, c'est bien autre chose. Ces altérations sont, souvent, *la première étape* d'une marche par *approximations successives*. On sait que M. Émile Picard a donné une impulsion vigoureuse à ces méthodes, dans plusieurs branches de l'Analyse. On sait aussi quelle est la *souplesse* de ces méthodes.

Je ne vois, d'ailleurs, aucune raison pour que les balisticiens soient obsédés par la recherche d'un système d'équations simples, et rigoureuses en même temps, pour représenter le mouvement pendulaire. Les *équations exactes* de ce mouvement sont les équations (2), (3), (4), (5), (18), (19), (20).

Elles doivent jouer le rôle de repères pour l'évaluation des approximations.

Si l'on veut conserver une forme simple, et éliminer ψ , par exemple, on n'y arrive que par une altération, nécessairement un peu brutale.

Les altérations ne sont pas toujours défavorables. Il arrive souvent qu'elles font disparaître des phénomènes parasites, comme des festons de nutation. Mais, pour voir rigoureusement les faits, il faut remonter à la source, je veux dire aux équations exactes.

Bibliographie.

Travaux de M. DE SPARRE :

Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité (*Arkiv for Matematik*, Stockholm, 1904) :

Sur le calcul des grandes trajectoires des projectiles (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. 43, 1923) :

Calcul du temps et de la dérivation dans les grandes trajectoires (*Ann. de la Société scientifique de Bruxelles*, t. 44, 1924) :

Mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité et conditions à remplir pour assurer leur stabilité (*Ann. de la Société scientifique de Bruxelles*, t. 47, 1927).

Ingénieur général CHARBONNIER, *Sur le mouvement gyroscopique du projectile* (*Mémorial de l'Artillerie française*, t. 6, 1927).

E. ESCLANGON, *Mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité* (*Mémorial de l'Artillerie française*, t. 6, 1927).

G. SUGOT, *Balistique extérieure théorique* (*Mémorial de l'Artillerie française*, t. 6, 1927).

R. D'ADHÉMAR, *Sur le mouvement pendulaire des projectiles stables*, premier Mémoire (*Mémorial de l'Artillerie française*, t. 8, 1929); second Mémoire (*Ibid.*, t. 11, 1932); troisième Mémoire (*Ibid.*, t. 12, 1933).

R. D'ADHÉMAR, *Étude du mouvement pendulaire d'un projectile tournant* (*Comptes rendus du III^e Congrès international de Mécanique appliquée*, Stockholm, 1930, vol. II).

