

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

JEAN LERAY

**Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique**

*Journal de mathématiques pures et appliquées* 9<sup>e</sup> série, tome 12 (1933), p. 1-82.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1933\\_9\\_12\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12__1_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

**JOURNAL**  
DE  
**MATHÉMATIQUES**  
PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

*Étude de diverses équations intégrales non linéaires  
et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique ;*

**PAR JEAN LERAY.**

---

**CHAPITRE I.**

**THÉORÈMES D'EXISTENCE NON LOCAUX.**

**I. SOMMAIRE.** — Les théorèmes d'existence fournis par la Méthode des approximations successives sont en général locaux. Dans des cas appropriés on peut, en répétant l'application de cette méthode, atteindre de proche en proche des résultats non locaux : il faut que le rayon de convergence ne tombe pas à zéro [*cf.* les travaux relatifs à l'équation  $\Delta u = e^u$ ; les Mémoires de M. S. Bernstein sur les équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique]. D'autre part M. E. Schmidt a montré que les solutions d'une équation intégrale, considérées comme fonctions des paramètres, peuvent admettre des singularités de nature algébrique. Dans ce cas le procédé ci-dessus

est sûrement inutilisable. Il est donc naturel d'essayer d'obtenir des résultats non locaux en appliquant de proche en proche la méthode de M. Schmidt. C'est ce que nous avons fait, au cours de la première section de ce chapitre, sous une forme qu'exige la rigueur, mais dont je regrette l'abstraction. Pour pouvoir conclure, il faut compléter les hypothèses de M. Schmidt par quelques conditions de nature *essentielle* *différente*. [Les solutions du problème doivent être bornées dans leur ensemble, . . .]. Il est bien remarquable que ces nouvelles conditions sont *nécessairement vérifiées* quand les solutions sont des fonctions des paramètres finies, algébroides et à nombre fini de déterminations.

Au cours de la deuxième section de ce chapitre, ces conclusions sont appliquées à des exemples simples; ceux-ci ont été multipliés afin de montrer la diversité des résultats que l'on peut obtenir et l'impossibilité de donner un critère pratique qui définirait le type des équations relevant de notre méthode. Ces exemples ont été tirés de problèmes que divers auteurs avaient étudiés en appliquant de proche en proche la méthode des approximations successives; nous avons simplement supprimé l'hypothèse qui entraîne l'unicité de la solution. Il est vrai que du même coup les problèmes envisagés ont cessé de correspondre à aucun problème de Physique.

La section III aborde enfin l'étude des régimes permanents et montre comment on peut y utiliser les résultats de la première section.

### I. — Généralités.

2. Une équation intégrale est une équation fonctionnelle du type suivant :

L'inconnue est une fonction  $u(s)$  qui doit être définie sur un certain domaine  $\mathcal{D}$ ; elle doit annuler une fonctionnelle donnée  $\mathfrak{F}[u(s)]$ ; cette fonctionnelle est construite à partir de  $u(s)$  par l'intermédiaire d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de quadratures, de fonctions de fonctions, de passages à la limite. Dans cette équation peuvent figurer des paramètres; nous supposons, pour simplifier, qu'il y en a au plus deux :  $h$  et  $k$ .

Donnons comme premier exemple l'équation :

$$(1) \quad u(s) + h \int_0^1 F[u(t), k] dt = 0,$$

où  $F[u, k]$  est une fonction rationnelle. [Toute solution de (1) a une valeur constante  $u$  qui satisfait l'équation :  $u + hF[u, k] = 0.$ ]

Un second exemple élémentaire est l'équation

$$(2) \quad a(s)u^2(s) + 3hb(s)u(s) + kc(s) = 0,$$

où  $a(s)$ ,  $b(s)$ ,  $c(s)$  sont des fonctions continues données.

Les solutions de ces deux exemples sont des fonctions de  $h$  et de  $k$  de natures très différentes. Il convient donc d'étudier des types particuliers d'équations intégrales, et non l'équation intégrale la plus générale.

3. C'est ce qu'a fait M. E. Schmidt dans son mémoire bien connu des *Mathematische Annalen* (t. 65; 1908). Il se donne une solution arbitraire de l'équation,  $u_0(s)$ , correspondant aux valeurs  $h_0$  et  $k_0$  des paramètres. Puis il suppose satisfaites certaines conditions; quand ces conditions seront vérifiées, nous dirons que l'équation est du *type de Schmidt* au voisinage de la solution :  $u_0(s)$ ,  $h_0$ ,  $k_0$ . M. Schmidt construit alors deux nombres positifs :  $\varepsilon_0$  et  $\tau_0$ ; et il limite son étude à certaines solutions de l'équation; ce sont, dirons-nous, celles qui appartiennent au *voisinage de Schmidt* de la solution donnée :  $u_0(s)$ ,  $h_0$ ,  $k_0$ ; elles sont caractérisées par les inégalités

$$(3) \quad |u(s) - u_0(s)| < \varepsilon_0, \quad |h - h_0| < \tau_0, \quad |k - k_0| < \tau_0.$$

Enfin il les détermine explicitement : elles sont fonctions analytiques et régulières de  $h$ , de  $k$  et de  $n_0$  nouveaux paramètres :  $x, y, \dots, z$ . Ces  $n_0 + 2$  paramètres sont liés par un système de  $n_0$  relations analytiques, régulières dans le domaine où on les utilise et désignées sous le nom d'*équations de bifurcation*

$$(4) \quad \Phi_1(h, k, x, y, \dots, z) = 0, \quad \dots, \quad \Phi_n(h, k, x, y, \dots, z) = 0.$$

Il ne reste plus qu'à discuter (4) : en effet à toute solution de (4) correspond une seule solution  $u(s)$ ,  $h$ ,  $k$  de l'équation intégrale; et réci-

proquement. Si  $h_0, k_0, u_0(s)$  et l'équation intégrale sont réels toutes les relations utilisées sont à coefficients réels; alors les solutions réelles de l'équation intégrale et les solutions réelles du système (1) se correspondent.

Les systèmes de valeurs de  $(x, y, \dots, z)$  correspondant à un système de valeurs de  $h$  et de  $k$  ne peuvent constituer un ou plusieurs continus que dans des cas très exceptionnels; sinon ils sont en nombre fini: si ce nombre est 1 nous dirons qu'il n'y a pas de *bifurcation*: c'est toujours le cas quand  $0$  est la seule solution d'une certaine équation de Fredholm homogène, qu'on peut nommer: *équation aux variations*.

En résumé les résultats de M. Schmidt nous permettent d'obtenir des *propriétés locales* de l'ensemble des solutions d'une équation intégrale.

A. B. — L'équation (1) est du type de Schmidt au voisinage de chacune de ses solutions; l'équation (2) est du type de Schmidt au voisinage de toute solution continue  $u_0(s)$ , telle que  $|a(s)u_0(s) + h_0b(s)|$  ait une borne inférieure positive.

4. UN MOYEN D'OBTENIR DES RESULTATS NON LOCAUX. — Supposons dès maintenant que l'équation intégrale est réelle et que le point  $(h, k)$  reste sur un ensemble fermé  $\delta$ , constitué par un domaine réel borné  $\delta$  et par sa frontière. Soit à étudier l'ensemble  $e$  des solutions réelles et continues  $[u(s), h, k]$  qui correspondent aux divers points de  $\delta$  et qui possèdent en outre, éventuellement, une certaine propriété ( $\mathfrak{F}$ ). La circonstance la plus simple qui puisse se présenter est la suivante:  $e$  constitue un ensemble compact en soi; c'est-à-dire: toute suite d'éléments de  $e$  a au moins un élément d'accumulation appartenant à  $e$ . Or, pour reconnaître cette éventualité, nous possédons une règle pratique: c'est le célèbre *théorème d'Arzelà*, dans le cas usuel où l'espace fonctionnel employé est celui des fonctions continues et où l'on utilise la notion de limite uniforme: il faut et il suffit que les fonctions constituant  $e$  soient bornées dans leur ensemble; qu'elles possèdent une égale continuité; enfin que toute suite convergente d'éléments de  $e$  ait pour limite une solution de l'équation, possédant la propriété ( $\mathfrak{F}$ ).

Supposons que la nature de l'équation nous permet d'établir ces trois dernières propriétés; supposons en outre que l'équation soit du type de Schmidt au voisinage de chacun des éléments de  $e$ . Désignons par  $\mathfrak{V}$  le voisinage de Schmidt relatif à chaque élément de  $e$ , dans le cas où la propriété ( $\mathfrak{A}$ ) n'existe pas; lorsque cette propriété existera effectivement il conviendra, dans chaque cas particulier, de définir  $\mathfrak{V}$  soit comme étant le voisinage de Schmidt, soit comme étant un voisinage plus restreint, défini par des inégalités de la forme

$$(5) \quad |u(s) - u_0(s)| < \varepsilon_0, \quad |h - h_0| < \tau_0, \quad |k - k_0| < \tau_0,$$

où

$$0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_0, \quad 0 < \tau_0 < \tau_0.$$

Ceci posé, utilisons le *lemme de Borel-Lebesgue*: une suite finie  $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \dots, \mathfrak{V}_p$  de voisinages  $\mathfrak{V}$  suffit à couvrir  $e$  tout entier.

On étudiera dès lors chacun des voisinages  $\mathfrak{V}_i$  par les développements de M. Schmidt; et des résultats non locaux seront ainsi acquis.

**3.** Faisons enfin l'hypothèse que les solutions réelles contenues dans le voisinage  $\mathfrak{V}$  d'un élément de  $e$  appartiennent toutes à  $e$ . L'étude de chacun des voisinages  $\mathfrak{V}_i$  revient à discuter les solutions réelles du système des équations de bifurcation, c'est-à-dire l'intersection de  $n_i$  surfaces analytiques réelles dans un espace à  $n_i + 2$  dimensions.

Nommons usuelles les portions de cette intersection qui constituent des variétés à deux dimensions sur lesquelles  $h$  et  $k$  sont variables indépendantes; nommons exceptionnelles les variétés constituant le reste de l'intersection. [L'existence de variétés exceptionnelles à plus d'une dimension exige des conditions extrêmement particulières.] Le nombre des solutions usuelles est toujours fini; il ne peut changer que si le point  $(h, k)$  traverse certaines courbes analytiques; mais sa parité reste la même. Les variétés exceptionnelles se projettent sur le plan  $(h, k)$  suivant des courbes analytiques ou des domaines limités par des courbes analytiques; si de tels domaines existent, il correspond à chacun de leurs points une infinité continue de solutions.

Résumons ce qui précède: le point  $(h, k)$  appartenant à un ensemble  $\delta$  constitué par un domaine borné  $\delta$  et par sa frontière, on

étudie celles des solutions réelles de l'équation intégrale qui possèdent une propriété ( $\mathfrak{A}$ ).

On suppose établi que ces solutions vérifient les hypothèses ci-dessous :

- (H) {
- (H<sub>1</sub>) L'équation est du type de Schmidt au voisinage de chacune d'elles
  - (H<sub>2</sub>) Chacun de leurs voisinages de Schmidt contient un voisinage  $\mathfrak{V}$ , plus restreint, défini par des inégalités ( $\delta$ ) et à l'intérieur duquel toute solution réelle de l'équation possède la propriété ( $\mathfrak{A}$ ).
  - (H<sub>3</sub>) Ces solutions sont bornées dans leur ensemble.
  - (H<sub>4</sub>) Elles possèdent une égale continuité [ce qui, en général, se déduira sans peine de (H<sub>3</sub>)].
  - (H<sub>5</sub>) Toute fonction limite d'une infinité d'entre elles est solution de l'équation.
  - (H<sub>6</sub>) Cette fonction limite possède la propriété ( $\mathfrak{A}$ ).

Retenons seulement les conclusions les moins théoriques, celles qui concernent le nombre des solutions :

- (C) {
- $\delta$  est divisé en régions par un nombre fini d'arcs de courbes, analytiques dans un domaine qui contient  $\delta$ . A l'intérieur de chacune de ces régions le nombre des solutions exceptionnelles de l'équation étudiée est constamment nul ou infini, et le nombre des solutions usuelles est fini et constant (<sup>1</sup>).
  - La parité du nombre des solutions usuelles est la même à l'intérieur de toutes les régions dont l'ensemble constitue  $\delta$ .*
  - Remarque.* — Si l'équation ne comporte qu'un paramètre,  $h$ , le rôle de  $\delta$  est joué par un intervalle (ouvert) de l'axe des  $h$ ; celui de  $\bar{\delta}$  par le segment (fermé) correspondant; celui des régions par un nombre fini d'intervalles, en lesquels  $\delta$  se trouve divisé.

(<sup>1</sup>) Nous indiquerons à la fin du paragraphe 10 du présent chapitre un cas comportant effectivement des solutions exceptionnelles. Dans cette équation figure un noyau dégénéré  $K(s, t)$ , ce qui nous permettra de la résoudre à l'aide de fonctions élémentaires. Mais la propriété de cette équation à laquelle est en réalité liée l'existence de solutions exceptionnelles est la suivante : soit  $u(s)$  une de

*Remarque.* — Ces résultats s'appliqueront fréquemment dans les conditions suivantes : on connaîtra dans le plan  $(h, k)$  une région  $\Delta$ , bornée ou non, telle que tout domaine borné intérieur soit un domaine  $\delta$ ,  $\Delta$  sera alors divisé en régions par un nombre fini ou une infinité dénombrable d'arcs, analytiques en tout point intérieur à  $\Delta$ ; ces régions posséderont les propriétés qui résultent de (C).

**6. DÉTERMINATION DE LA PARITÉ DU NOMBRE DES SOLUTIONS USUELLES.** — Cette détermination est importante; en particulier :

(C) { Si le nombre des solutions usuelles est *impair* l'équation intégrale admet *au moins une solution*, quelle que soit la position du point  $(h, k)$  à l'intérieur de  $\delta$  ou sur sa frontière.

Or pour connaître cette parité il suffit de la déterminer sur un petit domaine intérieur à  $\delta$ . Le procédé le plus simple sera le suivant : on cherchera un point particulier  $(h', k')$  de  $\delta$ , auquel correspondre un nombre fini de solutions, qu'on sache toutes déterminer; il suffirait de construire les solutions appartenant au voisinage  $\mathfrak{V}$  de chacune d'elles pour obtenir toutes les solutions qui correspondent à  $(h, k)$  intérieur à  $\delta$  et à un cercle suffisamment petit, centré en  $(h', k')$  [on le démontre par l'absurde]; le décompte de ces dernières sera donc aisé.

Le principal but de ce Mémoire est de montrer que les conclusions (C) — et, éventuellement, (C') — s'appliquent à diverses équations intégrales appropriées. Le mode d'étude que nous venons de décrire se nommera : « Méthode d'Arzelà-Schmidt ».

ses solutions : elle est définie pour  $0 \leq s \leq 2\pi$ ; convenons que  $u(s \pm 2\pi) = u(s)$ ; alors, quelle que soit la constante  $\omega$ ,  $u(s - \omega)$  est également une solution. L'équation en question est donc telle que toutes les transformées de chacune de ses solutions par les opérations d'un groupe continu la satisfassent encore : Dès qu'elle possède une solution qui n'est pas invariante par les opérations de ce groupe elle en possède une infinité d'autres.

## II. — Application à divers exemples simples.

### 7. Premier exemple. — Soit l'équation

$$(6) \quad u(s) = h \int_a^1 K(s, t) u(t) dt - k \int_a^1 H[s, t, u(t)] dt.$$

Les fonctions données sont supposées vérifier les inégalités suivantes :

l'on a pour  $0 < s < 1$ ,  $0 < t < 1$ ,  $-\infty < u < +\infty$

$$(7) \quad |K(s, t)| < A, \quad |K(s_1, t) - K(s_2, t)| < \varepsilon,$$

$$(8) \quad |H[s, t, u]| < B, \quad |H[s_1, t, u] - H[s_2, t, u]| < C(u)\varepsilon.$$

A et B désignent des constantes;  $\varepsilon[s_1 - s_2]$  et  $\tau_1[s_1 - s_2]$  sont des fonctions de  $(s_1 - s_2)$  qui tendent vers zéro avec  $(s_1 - s_2)$ ;  $C(u)$  est une fonction de  $|u|$  positive et croissante. On suppose enfin que, quel que soit le nombre réel  $u_0$ , on puisse développer  $H[s, t, u]$  en une série de la forme

$$(9) \quad H[s, t, u] = \sum_{p=0}^{\infty} H_p(s, t) (u - u_0)^p,$$

où  $\sqrt[p]{|H_p(s, t)|}$  a une limite supérieure indépendante de  $p$ .

Soit  $\Gamma(s, t; \lambda)$  le noyau résolvant de l'équation de Fredholm :

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^1 K(s, t) \varphi(t) dt.$$

Soient  $\lambda_i$  les valeurs singulières de cette équation, numérotées par ordre de grandeur croissante. Supposons que  $h$  ne soit égal à aucun des nombres  $\lambda_i$ ; et mettons l'équation (6) sous la forme équivalente :

$$(10) \quad u(s) = k \int_a^1 H[s, t, u(t)] dt - hk \int_a^1 \int_a^1 \Gamma(s, t; h) H[t, t', u(t')] dt dt'.$$

Montrons que la méthode d'Arzelà-Schmidt s'applique dans les conditions suivantes : la propriété (9) est inexistante;  $\delta$  est l'un quelconque des domaines bornés intérieurs à la bande,  $\Delta$ , du plan  $(h, k)$ ,

que définit la double inégalité :  $\lambda_i < h < \lambda_{i+1}$ . [S'il n'existe aucune valeur singulière  $\lambda_i$ ,  $\Delta$  est le plan entier; s'il existe une valeur singulière  $\lambda_x$  inférieure (ou supérieure à toutes les autres), on pourra prendre pour  $\Delta$  le demi-plan :  $h < \lambda_x$  (ou  $h > \lambda_x$ ).] Les conditions (H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>), (H<sub>3</sub>), (H<sub>6</sub>) sont vérifiées. D'autre part  $\Gamma(s, t; h)$  satisfait les inégalités

$$|\Gamma(s, t, h)| < f(h), \quad |\Gamma(s_1, t, h) - \Gamma(s_2, t, h)| < f(h) \varepsilon (s_1 - s_2),$$

où  $f(h)$  est borné sur tout segment fini ne contenant aucun point  $\lambda_i$ .

On a d'après (10) :

$$(11) \quad |u(s)| < Bk + Bhk f(h),$$

$$(12) \quad |u(s_1) - u(s_2)| < k\eta C [Bk + Bhk f(h)] + Bhk f(h) \varepsilon.$$

Les conditions (H<sub>3</sub>) et (H<sub>4</sub>) sont donc satisfaites. Et les conclusions (C) sont valables.

Pour  $k = 0$  la solution est unique: c'est  $u(s) = 0$ ; l'équation aux variations correspondante n'admet que la solution nulle; il n'y a pas de bifurcation au voisinage de cette solution. La conclusion (C') est donc également valable.

Faisons tendre  $h$  vers  $\lambda_i$  ou  $\lambda_{i+1}$ ; le nombre des solutions usuelles, qui n'est jamais nul, peut augmenter indéfiniment; il serait possible de préciser comment elles se comportent. Nous ne le ferons pas; nous nous contenterons d'indiquer un cas élémentaire et suggestif: prenons  $H[s, t, u] = F(u)$ ;  $K(s, t) = 1$ ; la seule valeur singulière est  $\lambda_1 = 1$ ; les fonctions cherchées sont des constantes  $u$  qui satisfont la relation :  $(1 - h)u = kF(u)$ .

Les raisonnements précédents s'adaptent aisément au cas où l'on remplace dans la première inégalité (8) la constante B par une fonction B(u), bornée sur tout ensemble borné de valeurs de u et telle que  $u^{-1} B(u)$  tende vers zéro avec  $u^{-1}$ .

**8. EXTENSION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.** — Soit à étudier l'équation (6) lorsque les inégalités (7) et (8) sont vérifiées, sans que la condition (9) le soit. La méthode d'Arzelà-Schmidt ne peut plus être appliquée. Mais considérons une suite de fonctions  $H^*[s, t, u]$  vérifiant les conditions (7), (8) et (9) et convergeant uniformément vers  $H[s, t, u]$  à

l'intérieur du domaine :  $0 < s < 1$ ;  $0 < t < 1$ ;  $-\infty < u < +\infty$  sur lequel  $H[s, t, u]$  est supposé continu. Donnons à  $h$  et  $k$  des valeurs fixes ( $h \neq \lambda_i$ ). Remplaçons dans (6)  $H[s, t, u]$  par  $H^*[s, t, u]$ ; l'équation (6\*) ainsi obtenue a au moins une solution,  $u^*(s)$ . La suite des fonctions  $u^*(s)$  est bornée dans son ensemble et possède une égale continuité, parce que les  $u^*(s)$  vérifient les inégalités (11) et (12). Cette suite a au moins une limite, dont l'existence prouve que (6) a encore, dans ce cas, au moins une solution si  $h$  n'est égal à aucun des  $\lambda_i$ .

Mais l'ensemble des solutions réelles de (6) n'est plus, en général, aussi régulier que précédemment. Si  $\frac{\partial H[s, t, u]}{\partial u}$  n'existe pas, ou devient infini pour certaines valeurs de  $u$ , la plus grande complexité est à prévoir. Toutefois si  $\frac{\partial H[s, t, u]}{\partial u}$  est une fonction continue le Mémoire de M. Schmidt peut servir à analyser la structure locale de l'ensemble des solutions, à condition de résoudre par la Méthode des approximations successives les problèmes qui s'y trouvent résolus par des développements en séries.

9. UN AUTRE PROBLÈME, A PROPOS DE L'ÉQUATION (6). — Soit à étudier les solutions  $u(s)$  de (6) qui possèdent la propriété (A) de n'être jamais négatives; on suppose  $h \geq 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $K(s, t) \geq 0$  et  $H[s, t, u] > 0$  pour  $u \geq 0$  et les conditions (7), (8), (9) vérifiées pour  $u$  et  $u_0$  positifs ou nuls. Il existe une constante positive  $\lambda_1$ , qui est la plus petite des valeurs  $\lambda_i$  positives, et une fonction, non identiquement nulle et jamais négative,  $\Psi_1(s)$ , vérifiant la relation

$$\Psi_1(s) = \lambda_1 \int_0^1 K(s, t) \Psi_1(t) dt.$$

De (6) résulte :

$$\int_0^1 u(s) \Psi_1(s) ds = \frac{h}{\lambda_1} \int_0^1 u(s) \Psi_1(s) ds + k \int_0^1 \int_0^1 H[s, t, u(t)] \Psi_1(t) ds dt.$$

Cette relation est impossible si  $h \geq \lambda_1$ . Il y a donc lieu d'étudier exclusivement la région  $\Delta$  du plan  $(h, k)$  définie par les inégalités :  $0 \leq h < \lambda_1$ ;  $0 \leq k$ . Tout rectangle  $0 < h < \alpha < \lambda_1$ ;  $0 < k < \beta$  est un domaine  $\delta$  pour lequel les hypothèses (H) sont vérifiées. Les conclusions (C) sont donc applicables.

D'autre part pour  $h = k = 0$  l'équation (6) admet la seule solution  $u(s) = 0$ ; il ne s'y produit pas de bifurcation : la conclusion (C') est également valable.

*Remarque.* — Le cas où l'hypothèse (9) n'est plus vérifiée peut être étudié par le procédé du paragraphe 8 : à tout point de  $\Delta$  il correspond encore au moins une solution.

10. UNE SECONDE ÉQUATION INTÉGRALE :

$$u(s) - h \int_a^b K(s, t) F[u(t)] dt = 0.$$

Nous nous proposons d'en étudier l'ensemble des solutions réelles qui correspondent aux valeurs positives du paramètre  $h$ , quand les conditions suivantes sont réalisées :  $K(s, t) + K(t, s)$  est un noyau symétrique positif, c'est-à-dire dont toutes les valeurs singulières sont positives ;  $K(s, t)$  est une fonction continue sur le rectangle :  $0 \leq s \leq 1$  ;  $0 \leq t \leq 1$  ;  $F(u)$  est une fonction analytique régulière pour  $-\infty < u < +\infty$  ;  $F(u)$  reste inférieure à une constante  $A$  sur l'ensemble des valeurs de  $u$  pour lesquelles  $uF(u) < 0$ . Ainsi la propriété (E) est inexistante ;  $\Delta$  est le demi-axe :  $0 \leq h$  ; l'intervalle  $\delta$  peut avoir pour origine le point  $h = 0$ . Établir les conditions (H) revient à établir (H<sub>3</sub>).

Or désignons par  $E_1$  l'ensemble des valeurs de  $s$  pour lesquelles :  $u(s)F[u(s)] > 0$  ; soit  $E_2$  l'ensemble complémentaire de  $E_1$  par rapport à l'intervalle  $(0, 1)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{E_1} u(s) F[u(s)] ds + h \int_{E_1} \int_{E_1} K(s, t) F[u(s)] F[u(t)] ds dt \\ - h \int_{E_2} F[u(s)] ds \int_{E_2} K(s, t) F[u(t)] dt = 0. \end{aligned}$$

Par hypothèse  $|F| < A$  sur  $E_2$  ; d'autre part :

$$\begin{aligned} \int_{E_1} \int_{E_1} K(s, t) F[u(s)] F[u(t)] ds dt \\ = \frac{1}{2} \int_{E_1} \int_{E_1} [K(s, t) + K(t, s)] F[u(s)] F[u(t)] ds dt \geq 0. \end{aligned}$$

Donc,  $B$  désignant le maximum de  $|K(s, t)|$ ,

$$\int_{E_1} u(s) F[u(s)] ds < hAB \int_{E_1} |F[u(s)]| ds.$$

Soit  $E_2$  l'ensemble des points de  $E_1$  en lesquels  $|u(s)| > 2hAB$ .  
Soit  $\varphi(h)$  le maximum de  $|F(u)|$  pour  $|u| \leq 2hAB$ ; il vient :

$$2hAB \int_{E_2} |F[u(s)]| ds < hAB \varphi(h) + hAB \int_{E_1} |F[u(s)]| ds.$$

D'où

$$\int_{E_2} |F[u(s)]| ds < \frac{1}{2} \varphi(h);$$

rappelons que sur  $E_2$  :  $|F| < A$  et que sur  $E_1 - E_2$  :  $|F| < \varphi(h)$ .

Nous sommes donc en état de majorer

$$h \int_0^1 K(s, t) F[u(t)] dt,$$

c'est-à-dire  $-u(s)$ ; il vient :

$$u(s) < hB \left[ A + \frac{3}{2} \varphi(h) \right].$$

Ainsi les conclusions (C) du paragraphe **§** sont valables. L'étude de l'équation pour  $h = 0$  montre que les conclusions (C') le sont également. Enfin si l'on suppose  $F(u)$  continu au lieu de le supposer analytique on peut établir, par le procédé du paragraphe **§**, l'existence d'au moins une solution correspondant à chaque valeur positive de  $h$ .

*A. B.* — Il est aisé de vérifier les résultats énoncés dans le cas particulier de l'équation suivante :

$$u(s) + \frac{h}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(s-t) + a][u^2(t) - bu(t)] dt = 0,$$

$a$  et  $b$  sont des constantes, dont la première est positive.

Toute solution de cette équation est nécessairement de la forme

$$u(s) = \lambda + \mu \cos(s - \omega),$$

$\lambda, \mu, \omega$  étant des constantes. La détermination de ces constantes est un problème élémentaire. Énonçons les résultats que l'on obtient lorsque  $b > 0, a > \frac{1}{2}$  :

Pour  $0 \leq h \leq \frac{1}{2ab}$ , il existe une solution :

Pour  $\frac{1}{3ab} < h \leq \frac{1}{b}$ , il existe trois solutions ;

Pour  $\frac{1}{b} < h \leq \frac{4a-1}{2ab}$ , il existe trois solutions isolées et une famille continue de solutions exceptionnelles :

Pour  $\frac{4a-1}{2ab} < h$ , il existe trois solutions isolées et trois familles continues de solutions exceptionnelles.

**II. PROBLÈME DE M. T. CARLEMAN.** — Soit à construire, dans un volume  $\Pi$  et sur la surface  $\Sigma$  qui le limite, une fonction continue  $u$  satisfaisant les conditions suivantes sur  $\Sigma$  :

$$\frac{du}{dn} = F(u) ;$$

dans  $\Pi$  :

$$\Delta u = g(x, y, z),$$

$g(x, y, z)$  est une fonction donnée en tout point de  $\Pi$ , continue, jamais positive [ou la suppose non identiquement nulle] ;  $\frac{du}{dn}$  est la dérivée prise le long de la normale intérieure ;  $\Delta$  est le symbole de Laplace  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  ;  $F(u)$  est une fonction définie et holomorphe pour toute valeur positive de  $u$  ; quand  $u$  tend vers  $+\infty$ ,  $F(u)$  tend aussi vers  $+\infty$  ; quand  $u$  tend vers zéro,  $F(u)$  n'a aucune valeur limite positive. M. Carleman a montré que ce problème admet toujours une solution unique dans le cas qui se présente en Physique : celui où  $F'(u) > 0$  [*Math. Zeitschrift*, t. 9, 1921].

Nous ne ferons pas cette hypothèse ; il résulte immédiatement du Mémoire cité que le problème relève alors de la méthode d'Arzelà-Schmidt.

Nous nous permettrons d'en reproduire la démonstration. Rappelons les formules classiques :

$$(13) \quad 4\pi u(a, b, c) = \iint_{\Sigma} \left[ u \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right] d\tau - \iiint_{\Pi} \frac{1}{r} \Delta u \, dx \, dy \, dz$$

pour  $(a, b, c)$  intérieur à  $\pi$ ,

$$(14) \quad 2\pi u(a, b, c) = \iint_{\Sigma} \left[ u \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right] d\sigma - \iiint_{\Pi} \frac{1}{r} \Delta u \, dx \, dy \, dz$$

pour  $(a, b, c)$  sur  $\Sigma$ .

$\Delta u$  est donné :  $\frac{du}{dn} = F(u)$ ; d'après (13) le problème se ramène à la détermination des valeurs prises par  $u$  sur  $\Sigma$ ; d'après (12) il équivaut dès lors à l'intégration de l'équation

$$(15) \quad u(a, b, c) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[ u \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - \frac{1}{r} F(u, h) \right] d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iiint_{\Pi} \frac{1}{r} g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

le point  $(a, b, c)$  étant situé sur  $\Sigma$ ; nous avons explicité un paramètre  $h$ ;  $F$  est supposé dépendre analytiquement de  $u$  et de  $h$ .

Soit un segment  $\delta$  de l'axe des  $h$ , possédant les propriétés ci-dessous :  $\underline{F}(u)$ , minimum de  $F(u, h)$  sur  $\delta$ , doit tendre vers  $+\infty$  avec  $u$ ;  $\overline{F}(u)$ , maximum de  $F(u, h)$  sur  $\delta$ , ne doit avoir aucune valeur limite positive quand  $u$  tend vers zéro. Nous étudions les solutions continues de (15),  $u(a, b, c)$ , qui possèdent la propriété (E) d'avoir sur  $\Sigma$  un minimum positif.

L'hypothèse  $(H_1)$ , du paragraphe 3, est vérifiée, sous réserve d'apporter à la théorie de M. Schmidt de légères modifications, exigées par la présence, dans (15), de fonctions non bornées.  $(H_2)$  et  $(H_3)$  sont vérifiées.  $(H_4)$  est une conséquence de  $(H_3)$ . Il reste donc à établir  $(H_5)$  et  $(H_6)$ , c'est-à-dire que les solutions étudiées possèdent, dans leur ensemble, une borne supérieure finie et une borne inférieure positive.

Soit  $u(x, y, z)$  une solution du problème, définie sur  $\Sigma$  et dans  $\Pi$ ; soit  $V(x, y, z)$  la solution du système

$$\Delta V = g(x, y, z) \text{ dans } \Pi. \quad V = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

Posons

$$u(x, y, z) = V(x, y, z) + \Phi(x, y, z);$$

$\Phi$  est harmonique.

Le maximum de  $u$  sur  $\Sigma$  et celui de  $\Phi$  dans  $\Pi + \Sigma$  sont réalisés au même point  $(x_1, y_1, z_1)$ . En ce point

$$\left(\frac{d\Phi}{dn}\right)_1 \leq 0.$$

Donc

$$\left(\frac{du}{dn}\right)_1 \leq \left(\frac{dN}{dn}\right)_1,$$

c'est-à-dire

$$F(u_1, h) \leq \left(\frac{dN}{dn}\right)_1,$$

Soit  $\alpha_1$  la plus grande racine de l'équation, dont le second membre est positif,

$$F(z) = \left\{ \max. \text{ de } \left(\frac{dN}{dn}\right) \text{ sur } \Sigma \right\}.$$

On a sur  $\Sigma$

$$u(x, y, z) \leq \alpha_1,$$

On obtient de même

$$z_2 \geq u(x, y, z) \text{ sur } \Sigma,$$

$z_2$  étant la plus petite racine positive de l'équation

$$F(z) = \left\{ \min. \text{ de } \left(\frac{dN}{dn}\right) \text{ sur } \Sigma \right\};$$

le second membre de cette équation est positif. Et les conclusions (C) du paragraphe 8 se trouvent ainsi établies.

Prenons, avec M. Carleman, pour  $F(u, h)$  la fonction

$$hF(u) + (1-h)u$$

et pour  $\delta$  le segment  $0 \leq h \leq 1$ . Quand  $h = 0$  le problème est linéaire et admet une solution unique; il ne s'y produit pas de bifurcation. Donc les conclusions (C') sont également valables. Un raisonnement analogue à celui du paragraphe 9 prouve que le problème continue à admettre au moins une solution si, au lieu d'avoir une fonction  $F(u)$  holomorphe on a seulement une fonction continue.

## 12. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, DU SECOND ORDRE ET DU TYPE

ELLIPTIQUE. — Soit l'équation

$$(16) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = h F(u).$$

Nous nous proposons d'en étudier les solutions réelles et continues qui sont définies sur une aire bornée  $\Sigma$  et qui prennent sur les courbes constituant la frontière de cette aire une suite continue, donnée de valeurs [non toutes égales à un zéro de  $F(u)$ ]; le paramètre  $h$  varie de 0 à  $+\infty$ ;  $a(x, y)$  et  $b(x, y)$  sont analytiques et régulières en tout point de  $\Sigma$  et de sa frontière;  $F(u)$  est une fonction analytique, régulière pour toute valeur de  $u$ ; il existe une constante  $\Lambda$  telle que

$$\begin{aligned} -\Lambda < F(u) & \quad \text{pour } 0 < u < +\infty, \\ F(u) > \Lambda & \quad \text{pour } -\infty < u < 0. \end{aligned}$$

Si l'une de ces solutions,  $u(x, y)$ , atteint son maximum  $u_1$ , en un point  $(x_1, y_1)$  intérieur à  $\Sigma$ , on a en ce point

$$\Delta u_1 \leq 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = 0;$$

donc  $F(u_1) \leq 0$ . On peut établir l'inégalité plus précise  $F(u_1) < 0$ . Ainsi le maximum d'une solution quelconque du problème sera soit le maximum  $\alpha$  des valeurs données sur le contour, soit un point de l'ensemble ouvert du demi-axe des  $u$  positifs, que définit l'inégalité

$$F(u) < 0.$$

Le point  $u = \alpha$  et cet ensemble ouvert constituent un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles d'un seul tenant  $I_1, I_2, \dots$ .  $I_1$  se réduit à  $\alpha$ , ou bien se compose d'un intervalle et de son origine, cette origine étant  $\alpha$ ;  $I_1$  peut s'étendre jusqu'à  $+\infty$ , alors  $I_2, \dots$  n'existent pas; quand  $I_2, \dots$  existent, ce sont des intervalles (ouverts). De même le minimum d'une solution quelconque  $u(x, y)$  appartient nécessairement à un ensemble  $J_1 + J_2 + \dots$  de l'axe des  $u$ , dont la définition est analogue; tous les points de ce dernier ensemble ont une abscisse inférieure à  $\alpha$ .

Considérons, parmi l'ensemble  $E$  des solutions de (16) que nous avons à étudier, le sous-ensemble  $E_{n,p}$  constitué par les éléments  $u(x, y)$

de  $E$  qui possèdent la propriété (F) d'avoir un maximum appartenant à un  $I_n$  déterminé et un minimum appartenant à un  $J_p$  déterminé. Indiquons comment l'étude de chaque  $E_{n,p}$  relève de la méthode d'Arzelà-Schmidt :  $\Delta$  est le demi-axe  $h \geq 0$ ,  $\delta$  est un intervalle borné quelconque de ce demi-axe,  $\delta$  peut avoir pour origine le point  $h = 0$ ; les fonctions  $u(x, y)$  satisfont une équation intégrale facile à déduire de (16); si  $I_n$  et  $J_p$  sont bornés on connaît de ce fait une limite supérieure de toutes les fonctions  $|u(x, y)|$ ; sinon on connaît une limite supérieure de toutes les fonctions  $|F[u(x, y)]|$ ; d'où, par l'intermédiaire de l'équation intégrale, une limite supérieure de toutes les fonctions  $|u(x, y)|$ . Finalement les hypothèses (H) sont vérifiées; les conclusions (C) sont applicables à chacun des sous-ensembles  $E_{n,p}$ . L'étude de l'équation pour  $h = 0$  prouve que les conclusions (C') sont valables en ce qui concerne le sous-ensemble  $E_{1,1}$ . Au contraire, si l'un au moins des entiers  $n$  et  $p$  diffère de 1, le nombre des solutions appartenant à  $E_{n,p}$  reste nul lorsque  $h$  reste inférieur à une certaine limite (variable avec  $n$  et  $p$ ); le nombre des solutions usuelles appartenant à  $E_{n,p}$  est donc pair (ou nul) sauf, peut-être, pour des valeurs de  $h$  ne pouvant s'accumuler à distance finie.

**15. ÉQUATIONS INTÉGRALES A NOMBRE PAIR DE SOLUTIONS USUELLES.** — Soit l'équation intégrale

$$(17) \quad u(s) = h \int_0^1 K(s, t) F[u(t)] dt + k f(s) \quad [f(s) \neq 0].$$

$K(s, t)$  est continu sur le rectangle  $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ ; il existe une fonction  $A(s)$ , continue et positive pour  $0 \leq s \leq 1$ , telle que la fonction de  $t$

$$\int_0^1 A(s) K(s, t) ds$$

ait un minimum  $B$  positif; d'ailleurs toute fonction suffisamment voisine de  $A(s)$  possède la même propriété; on peut donc supposer

$$\int_0^1 A(s) f(s) ds \neq 0;$$

$F(u)$  est analytique, régulière et positive pour  $-\infty < u < +\infty$ ;  $u^{-1} F(u)$  tend vers  $+\infty$  avec  $u$ .

Nous nous proposons d'appliquer la méthode d'Arzelà-Schmidt à l'ensemble des solutions continues et réelles de (17),  $\Delta$  étant le demi-plan :  $h > 0$ ;  $\delta$  est un domaine quelconque, borné et intérieur à ce demi-plan;  $\delta$  ne doit admettre pour point-frontière aucun point de l'axe  $h=0$ . Établir les hypothèses (H) se ramène tout de suite à établir (H<sub>3</sub>). Or nous avons

$$\int_0^1 \Lambda(s) u(s) ds = h \int_0^1 \int_0^1 \Lambda(s) \mathbf{K}(s, t) F[u(t)] dt + k \int_0^1 \Lambda(s) f(s) ds.$$

D'où

$$(18) \quad Bh \int_0^1 F[u(s)] ds \leq \int_0^1 \Lambda(s) u(s) ds - k \int_0^1 \Lambda(s) f(s) ds.$$

Soit  $A$  le maximum de  $\Lambda(s)$ ; soit  $\varphi(h)$  la plus petite valeur positive ou nulle de  $u$  telle que l'inégalité  $u > \varphi(h)$  entraîne

$$u < \frac{Bh}{2A} F(u);$$

$\varphi(h)$  est une fonction décroissante de  $h$  qui augmente indéfiniment quand  $h$  tend vers zéro. Nous avons

$$\int_0^1 \Lambda(s) u(s) ds \geq A \varphi(h) + \frac{Bh}{2} \int_0^1 F[u(s)] ds.$$

Et l'inégalité (18) donne, dès lors,

$$(19) \quad \frac{1}{2} Bh \int_0^1 F[u(s)] ds < A \varphi(h) - k \int_0^1 \Lambda(s) f(s) ds.$$

Soit  $C$  le maximum de  $\mathbf{K}(s, t)$ ; de (19) et de (17) résulte

$$|u(s)| < \frac{2C}{B} \left[ A \varphi(h) - k \int_0^1 \Lambda(s) f(s) ds \right] + |k f(s)|.$$

L'hypothèse (H<sub>3</sub>) est bien vérifiée.

D'autre part nous avons, puisque le premier membre de (19) est positif,

$$k \int_0^1 \Lambda(s) f(s) ds < A \varphi(h).$$

L'un des deux quadrants :  $h > 0, k > 0$  et  $h > 0, k < 0$ , contient donc une région en tout point de laquelle le nombre des solutions est nul. [Si même on peut trouver deux fonctions  $A(s)$  pour lesquelles les deux intégrales  $\int_0^1 A(s)f(s) ds$  sont de signes opposés, chacun des deux quadrants contient sûrement une telle région]. Et dans le demi-plan  $h > 0$  le nombre des solutions usuelles est pair, sauf sur certaines lignes. Cependant la méthode des approximations successives détermine un domaine :  $0 < h < \psi(k)$  sur lequel il existe une seule solution assujettie à être fonction analytique et bornée de  $h$  et de  $k$ . Il existe donc en outre, en tout point de ce domaine, une ou plusieurs autres solutions usuelles; les maxima de leurs modules augmentent indéfiniment quand  $h$  tend vers zéro,  $k$  restant borné. Le nombre des solutions usuelles peut d'ailleurs augmenter quand  $h$  tend vers zéro. Ces résultats se vérifient tout de suite dans le cas élémentaire

$$K(s, t) \equiv 1, \quad f(s) \equiv 1.$$

Indiquons également que l'hypothèse  $\Lambda(s) > 0$  est superflue lorsque  $|u|^{-1} F(u)$  tend vers  $+\infty$  avec  $u$ .

Enfin explicitons l'une des conclusions obtenues : si l'équation (17) admet une solution  $u(s) = g(s)$ , si l'équation de bifurcation correspondant à cette solution

$$(20) \quad v(s) - h \int_0^1 K(s, t) F'[g(t)] v(t) dt = 0$$

n'admet que la solution  $v(s) = 0$ , alors l'équation (17) admet une solution autre que  $g(s)$ . Autrement dit, l'équation

$$u(s) - h \int_0^1 K(s, t) F[u(t)] dt = g(s) - h \int_0^1 K(s, t) F[g(t)] dt$$

admet une solution différente de la solution évidente

$$u(s) = g(s)$$

quand l'équation (20) n'admet que la solution évidente

$$v(s) = 0.$$

Il est aisé de forger d'autres problèmes dont l'étude est analogue.

**14. NOTE SUR DES ÉQUATIONS VOISINES DE L'ÉQUATION (17).** — Nous nous proposons d'étudier les solutions de l'équation  $\Delta u = -hu^{2p}$  qui sont continues à l'intérieur d'une sphère  $\Pi$  de rayon 1 et qui prennent à la surface de cette sphère une valeur constante  $k$ ;  $p$  est un entier positif; soient  $s, t$  des points décrivant l'intérieur de cette sphère,  $\delta s, \delta t$  les éléments de volume,  $r$  la distance de  $s$  à l'origine; nous nous bornons à la recherche des fonctions  $u(s)$  qui ne dépendent que de  $r$ . Si  $G(s, t)$  est la fonction de Green de la sphère, nous avons

$$(21) \quad u(s) = \frac{h}{2\pi} \int_{\Pi} G(s, t) u^{2p}(t) \delta t - k.$$

L'équation ainsi obtenue n'est pas du type (17) parce que  $G(s, t)$  n'est pas borné supérieurement et a zéro pour borne inférieure. Soit  $\varepsilon$  une constante positive arbitrairement faible; soit  $K(s, t)$  la fonction égale à  $G(s, t)$  quand  $\varepsilon \leq G(s, t) \leq \frac{1}{\varepsilon}$ , à  $\varepsilon$  quand  $G(s, t) < \varepsilon$ , à  $\frac{1}{\varepsilon}$  quand  $G(s, t) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ . L'équation

$$(22) \quad u(s) = \frac{h}{2\pi} \int_{\Pi} K(s, t) u^{2p}(t) \delta t - k$$

est du type (17). Mais — nous croyons intéressant de le signaler — pour  $p > 2$ , la structure de l'ensemble des solutions de (22) s'altère profondément quand on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro. L'ensemble des solutions continues de (22) a pour limite l'ensemble des solutions de (21) telles que l'intégrale  $\int_{\Pi} u^{2p}(s) ds$  ait un sens; ce dernier ensemble ne possède pas les propriétés énoncées au paragraphe 3 : une correspondance biunivoque et bicontinue peut être établie entre ses éléments et les points d'une surface de l'espace  $(h, k, x)$ ; l'équation de cette surface est

$$hk^{2p-1} = \Theta_p(x);$$

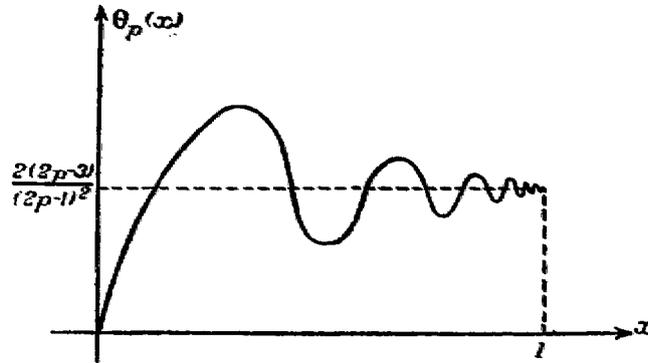
la fonction  $\Theta_p(x)$  est représentée graphiquement ci-après; elle admet une infinité de maxima et de minima au voisinage de la valeur  $x = 1$ . Toutes ces solutions de (21) sont continues, sauf celles qui correspondent à la ligne singulière de la surface

$$x = 1, \quad hk^{2p-1} = \frac{2(3p-3)}{(2p-1)^2};$$

ces dernières ont pour expression :

$$u = \frac{k}{r^{2p-1}}.$$

Ainsi ni la méthode d'Arzelà-Schmidt, ni ses conclusions ne s'appliquent à l'équation (21), bien que toute suite de solutions



de (21) ait au moins une fonction limite si l'ensemble des valeurs prises par  $h^2 + k^2$  est borné; c'est que cette fonction limite peut être la fonction  $\frac{k}{r^{2p-1}}$ , qui est trop irrégulière pour que son voisinage possède les propriétés des voisinages de Schmidt.

### III. — Application au problème des régimes permanents.

13. NOTATIONS. — Soient  $u_i$  les composantes de la vitesse d'un liquide visqueux, soit  $p$  sa pression; le système de référence utilisé est un système de Galilée ou un système en rotation uniforme par rapport à un système de Galilée; si le mouvement du liquide est permanent, il est régi par les équations de Navier :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \rho X_i + \rho \sum_{k=1}^3 A_{ik} u_k \quad (i=1, 2, 3), \\ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \end{array} \right.$$

$\mu$  et  $\rho$  sont deux constantes : le coefficient de viscosité et la densité;  $X_i$  est la résultante des forces extérieures; ce vecteur satisfait une condition de Hölder;  $A_{ik}$  est un tenseur symétrique gauche ( $A_{ik} + A_{ki} = 0$ ), ses composantes sont des constantes; il représente la vitesse de rotation dont est animé le système de référence.

Soit un domaine  $\Pi$ ; sa frontière est une surface  $\Sigma$  sans nappe infinie, sans singularité, et qui admet des rayons de courbure en chacun de ses points: les inverses de ces rayons de courbure ont sur  $\Sigma$  des dérivées premières bornées:  $\Sigma$  se compose d'un nombre fini de surfaces fermées et d'un seul tenant:  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_l$ . Nous représentons un point de l'espace par  $x$ ; ses coordonnées par  $(x_1, x_2, x_3)$ ; l'élément de volume qu'il engendre par  $\delta x$ ; l'élément de surface par  $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ , l'élément de courbe par  $(dx_1, dx_2, dx_3)$ . Quand nous aurons à faire usage d'un second point, nous utiliserons les mêmes notations,  $x$  étant remplacé par  $y$ .

Définissons un vecteur  $u_i(x)$  « solution régulière de (23) dans un domaine  $\Pi$  borné » :

(24)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Les fonctions } u_i(x) \text{ et } \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \text{ devront être définies et continues en} \\ \text{tout point de } \Pi \text{ et de } \Sigma; \text{ la dernière relation (23) sera vérifiée; les} \\ \text{fonctions } u_i(x) \text{ admettront des dérivées secondes continues à l'intérieur} \\ \text{de } \Pi; \text{ et les trois premières relations (23) devront définir une fonction} \\ \text{ } p(x) \text{ continue et uniforme dans } \Pi \text{ et sur } \Sigma. \end{array} \right.$

**16. PROBLÈME RELATIF A UN DOMAINE BORNE.** — Donnons-nous un domaine  $\Pi$  borné et proposons-nous de rechercher les solutions de (23), réelles et régulières dans  $\Pi$ , qui, sur la surface  $\Sigma$ , sont égales à un vecteur donné,  $z_i(x)$ . Ce vecteur admet sur  $\Sigma$  des dérivées secondes bornées; son flux total à travers  $\Sigma$  doit être nul. Rappelons comment M. Odqvist a ramené ce problème à la recherche des solutions continues d'un système d'équations intégrales (*Math. Zeitschrift*, t. 32, 1930): il a construit le tenseur de Green,  $G_{ij}(x, y)$ , relatif au système

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\rho X_i \quad (i=1, 2, 3), \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \end{array} \right.$$

et son Mémoire permet d'obtenir le vecteur  $\beta_i(x)$  défini à l'intérieur de  $\Pi$ , solution de (25), égal sur  $\Sigma$  au vecteur  $\alpha_i(x)$ ; on a dès lors :

$$(26) \quad u_i(x) = -\rho \sum_{p,k} \iiint_{\Pi} G_{ip}(x,y) \left[ u_k(y) \frac{\partial u_p(y)}{\partial y_k} + \Lambda_{pk} u_k(y) \right] \hat{\nu} - \beta_i(x).$$

D'où

$$(27) \quad \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} = -\rho \sum_{p,k} \iiint_{\Pi} \frac{\partial G_{ip}(x,y)}{\partial x_j} \left[ u_k(y) \frac{\partial u_p(y)}{\partial y_k} + \Lambda_{pk} u_k(y) \right] \hat{\nu} + \frac{\partial \beta_i(x)}{\partial x_j}.$$

Les équations (26) et (27), où les fonctions  $u_i(x)$  et  $\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}$  sont les inconnues, constituent les équations intégrales de M. Odqvist.

Afin d'appliquer la méthode d'Arzelà-Schmidt, supposons que les vecteurs  $N_i(x)$  et  $\alpha_i(x)$  — et par suite  $\beta_i(x)$  — soient proportionnels à un paramètre  $h$ . Utilisons les notations du paragraphe 3 : la propriété (3) est inexistante;  $\Delta$  est l'axe réel des  $h$  en entier. Le système (26), (27) est du type de Schmidt au voisinage de toute solution continue. D'autre part nous établirons au Chapitre II le lemme suivant :

LEMME A. — Soient toutes les solutions  $u_i(x)$  réelles et régulières qui correspondent aux valeurs de  $h$  comprises entre les deux quantités  $-h_0$  et  $+h_0$ . Les intégrales

$$J = \iiint_{\Pi} \sum_{i,k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \hat{\nu} dx$$

constituent un ensemble de nombres borné lorsque le flux du vecteur  $\alpha_i(x)$  à travers chacune des surfaces  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$  est séparément nul. (Condition A, que nous supposons remplie.)

Nous en déduisons au Chapitre III le théorème suivant :

THÉORÈME A. — Les fonctions  $u_i(x)$  et  $\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}$  considérées sont bornées dans leur ensemble et possèdent une égale continuité.

Autrement dit les propriétés (H<sub>3</sub>) et (H<sub>4</sub>) sont sûrement réalisées quand est satisfaite la condition A. [Celle-ci est d'ailleurs nécessairement vérifiée quand  $l=1$ ; quand  $l>1$ , la considération de sources placées à l'intérieur des frontières internes de  $\Pi$  n'a guère de sens physique.] Enfin nous rétablirons également le résultat classique que

pour  $h = 0$  la solution est unique; il ne s'y produit pas de bifurcation.

Donc les conclusions (C) et (C') sont valables; et nous sommes assurés de l'existence d'au moins une solution correspondant à des données qui satisfont la condition A.

*Remarques.* — Du paragraphe § résultent des propriétés concernant la nature de la solution en tant que fonction de  $h$ ; elles pourraient être étendues à des cas où  $z_i(x)$  et  $\Pi$  lui-même dépendraient de un ou de plusieurs paramètres.

— Tout ce qui précède peut être transposé sans peine au cas de deux dimensions.

**17. PROBLÈME RELATIF A UN DOMAINE  $\Pi$  INFINI.** — Nous supposons donnés non seulement  $\Pi$  et  $z_i(x)$ , mais aussi un vecteur  $a_i(x)$ , de divergence nulle, régulier en tout point de l'espace.  $\Pi$  ne doit pas occuper l'espace tout entier; les flux de  $z_i(x)$  à travers chacune des surfaces  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_l$  sont séparément nuls; enfin nous prenons pour simplifier  $N_i = 0$ . Soit  $\Sigma^*$  une famille de surfaces régulières, fermées, dont la plus courte distance à  $\Sigma$  augmente indéfiniment (et a une borne inférieure positive). Soit  $\Pi^*$  la portion de  $\Pi$  intérieure à  $\Sigma^*$ . Soit  $u_i^*(x)$  une solution de (23), régulière dans  $\Pi^*$ , égale à  $z_i(x)$  sur  $\Sigma$  et à  $a_i(x)$  sur  $\Sigma^*$  — nous venons de dire qu'il existe au moins une telle solution — Le problème que nous nous posons est de savoir si la suite  $u_i^*(x)$  a au moins une limite. Nous serons conduits à supposer  $a_i(x)$  égal à la vitesse d'un mouvement hélicoïdal uniforme satisfaisant les équations (23); autrement dit on doit avoir

$$\Lambda_{ik} a_k(x) = \frac{da_i(x)}{dx_i},$$

$a_i(x)$  étant un polynôme de degré deux au plus; pour qu'il en soit ainsi il faut que la rotation de ce mouvement hélicoïdal soit parallèle à la rotation dont est animé le système de référence par rapport à un système de Galilée; ce parallélisme est considéré comme réalisé si l'une de ces deux rotations est nulle; pour  $a_i(x) = 0$  nos raisonnements restent d'ailleurs encore valables quand les composantes du tenseur  $\Lambda_{ik}$ , au lieu d'être des constantes, sont des fonctions qui satisfont des conditions de Hölder sur tout domaine borné et qui se com-

portent arbitrairement à l'infini. Sous ces réserves nous démontrerons au Chapitre II le lemme suivant :

LEMME B. — *Les intégrales*

$$J = \iiint_{\Pi} \sum_{i,k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 \delta x$$

*constituent un ensemble de nombres bornés.*

Nous en déduisons au Chapitre III le théorème suivant :

THÉORÈME B. — *Sur toute portion bornée de  $\Pi$  les fonctions  $u_i(x)$  et  $\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}$  sont bornées dans leur ensemble et possèdent une égale continuité.*

D'après le théorème d'Arzelà les fonctions  $u_i(x)$  et  $\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}$  ont au moins une limite  $u_i(x)$ ,  $\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}$ ; on déduit aisément du Mémoire de M. Odqvist, déjà cité, que cette limite constitue une solution de (23) régulière sur toute portion bornée de  $\Pi$ . Nous nommerons « solution de (23) régulière dans le domaine  $\Pi$  infini » tout vecteur  $u_i(x)$  susceptible d'être obtenu par ce procédé, lequel est d'ailleurs analogue au passage à la limite effectué au cours du paragraphe 8.

18. Nous chercherons également à étudier les propriétés de ces solutions régulières. Nous sommes déjà assurés qu'il en existe au moins une correspondant au système de données défini au paragraphe précédent. Nous établirons en outre les résultats suivants :

LEMME C. — *Supposons  $a_i(x)$  fixe et  $\alpha_i(x) = a_i(x)$  proportionnel à un paramètre  $h$ . Soient toutes les solutions  $u_i(x)$  réelles et régulières qui correspondent aux valeurs de  $h$  comprises entre deux quantités  $-h_0$  et  $+h_0$ . Les intégrales*

$$J = \iiint_{\Pi} \sum_{i,k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 \delta x$$

*constituent un ensemble de nombres bornés.*

Nous en déduisons au Chapitre III le théorème suivant :

**THÉORÈME C.** — *Sur toute portion bornée de  $\Pi$  les fonctions  $u_i(x)$  et  $\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}$  considérées sont bornées dans leur ensemble et possèdent une égale continuité.*

Nous démontrerons également que pour  $h=0$  la solution est unique; c'est  $u_i(x) = a_i(x)$ .

Toutefois l'ensemble des solutions du problème correspondant à  $-h_0 \leq h \leq h_0$  ne me paraît plus pouvoir être analysé par la méthode d'Arzelà-Schmidt; le cas où nous nous trouvons est très analogue à celui qui fut signalé au paragraphe 14; il est également analogue à ceux des paragraphes 8, 9, 10, 11, 12 lorsque la fonction  $H[s, t, u]$  ou  $F(u)$  n'est plus holomorphe, mais seulement continue: cet ensemble de solutions est bien compact en soi; mais les voisinages de certains de ses éléments ne peuvent plus être étudiés par la théorie de M. Schmidt, parce que  $\Pi$  est infini. L'ensemble de ces solutions est-il susceptible d'une structure très irrégulière? Cette question, dont nous ne reparlerons plus, reste donc à élucider.

*N. B.* — Les résultats annoncés valent également en ce qui concerne les mouvements plans.

## CHAPITRE II.

PROBLÈME DES RÉGIMES PERMANENTS : LES LEMMES A, B ET C, CONSÉQUENCES DE LA RELATION DE DISSIPATION DE L'ÉNERGIE.

### I. — Sommaire.

#### 1. Rappelons la relation de dissipation de l'énergie :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sum_{i,k} \iint_{\Sigma} \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] u_i \delta x_k - \sum_i \iint_{\Sigma} p u_i \delta x_i - \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} \sum_i u_i^2 \sum_k u_k \delta x_k \\
 & = -\varrho \sum_i \iiint_{\Pi} u_i \Lambda_i \delta x \\
 & + \mu \iiint_{\Pi} \left[ 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \delta x.
 \end{aligned}$$

Le domaine II est supposé borné; le vecteur  $\delta x_i$  est dirigé vers l'extérieur de II.

Pour  $\alpha_i(x) = 0$  le premier membre de (1) s'annule, et d'autre part

$$\mathbf{S}_{i,k} \iiint_{\Pi} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \delta x = 0.$$

La relation (1) devient donc

$$(2) \quad \mu \iiint_{\Pi} \mathbf{S}_{i,k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \delta v = \rho \iiint_{\Pi} \mathbf{S}_i u_i X_i \delta x.$$

Or l'on a, A désignant une constante,

$$\iiint_{\Pi} \mathbf{S}_i u_i^2 \delta x \leq A \iiint_{\Pi} \mathbf{S}_{i,k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \delta x,$$

et par suite, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left[ \iiint_{\Pi} \mathbf{S}_i X_i u_i \delta x \right]^2 \leq A \iiint_{\Pi} \mathbf{S}_i X_i^2 dx \iiint_{\Pi} \mathbf{S}_{i,k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \delta x.$$

Portons dans (2); l'on obtient

$$\iiint_{\Pi} \mathbf{S}_{i,k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \delta x \leq A \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^2 \iiint_{\Pi} \mathbf{S}_i X_i^2 \delta x.$$

Ainsi, quand  $\alpha_i(x) = 0$ , le lemme A se trouve établi.

**2.** Dans les cas qui se présentent en Physique, le champ de forces  $X_i(x)$  dérive toujours d'un potentiel; les solutions  $u_i(x)$  des équations de Navier sont alors les mêmes que si les fonctions  $X_i(x)$  étaient nulles; l'hypothèse  $\alpha_i(x) = 0$  entraîne donc  $u_i(x) = 0$ ; autrement dit le résultat précédent n'a guère d'intérêt.

Or si  $\alpha_i(x)$  n'est pas identiquement nul le raisonnement du paragraphe 1 tombe en défaut. Mais on peut modifier l'expression du premier membre de (1): Soit  $\gamma_i(x)$  l'un quelconque des vecteurs qui sont définis et qui admettent des dérivées secondes bornées dans II et sur  $\Sigma$ , dont la divergence est nulle, qui sur  $\Sigma$  sont égaux à  $\alpha_i(x)$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_{i,k} \iint_{\Sigma} \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \gamma_i \delta x_k - \mathbf{S}_i \iint_{\Sigma} p \gamma_i \delta x_i \\ &= \mathbf{S}_i \iiint_{\Pi} \left[ \mu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \gamma_i \delta x + \mu \mathbf{S}_{i,k} \iiint_{\Pi} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \delta x \\ &= \rho \mathbf{S}_{i,k} \iiint_{\Pi} \left[ u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \Lambda_{ik} u_k \right] \gamma_i \delta x \\ &\quad - \rho \mathbf{S}_i \iiint_{\Pi} X_i u_i \delta x + \mu \mathbf{S}_{i,k} \iiint_{\Pi} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \delta x. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathbf{S}_{i,k} \iiint_{\Pi} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \delta x = \mathbf{S}_{i,k} \iiint_{\Pi} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \delta x.$$

La relation de dissipation de l'énergie (1) peut donc être mise sous la forme

$$\begin{aligned} (3) \quad \mu \mathbf{S}_{i,k} \iiint_{\Pi} \mathbf{S} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \delta x &= - \frac{\rho}{2} \iint_{\Sigma} \mathbf{S} \gamma_i^2 \mathbf{S} \gamma_k \delta x_k \\ &\quad + \rho \mathbf{S}_i \iiint_{\Pi} (u_i - \gamma_i) X_i \delta x + \mu \mathbf{S}_{i,k} \iiint_{\Pi} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \delta x \\ &\quad + \rho \mathbf{S}_{i,k} \iiint_{\Pi} \left[ u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \Lambda_{ik} u_k \right] \gamma_i \delta x. \end{aligned}$$

C'est de cette relation (3) que nous déduirons le lemme A.

**5.** Tout d'abord nous opérerons par l'absurde : supposons que  $\alpha_i(x)$  et  $\gamma_i(x)$  soient proportionnels à un paramètre  $h$  et qu'à une suite bornée de valeurs de  $h$ , distinctes ou non, corresponde une suite de solutions régulières pour lesquelles l'intégrale

$$J = \mathbf{S}_{i,k} \iiint_{\Pi} \mathbf{S} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \delta x$$

augmente indéfiniment. Divisons tous les termes de la relation (3) par  $\mu J$ ; toutes les intégrales du second membre tendent vers zéro,

sauf l'intégrale

$$(4) \quad \frac{\rho}{\mu \sqrt{J}} \sum_{i,k} \iiint_{\Pi} u_k(x) \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_k} \gamma_i(x) \delta x$$

qui tend donc vers 1. Les fonctions  $\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_k}$  satisfont dans leur ensemble une même condition : la somme de leurs carrés, étendue à  $\Pi$ , reste bornée; elles ont dès lors des propriétés analogues à celles des fonctions qui possèdent une égale continuité et qui sont bornées dans leur ensemble; nous l'expliquerons en détail ultérieurement. Pour l'instant contentons-nous de démontrer que l'intégrale (4) ne peut tendre vers 1 quand les fonctions  $\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_k}$  sont bornées dans leur ensemble et possèdent une égale continuité : on sait alors extraire de la suite précédente une suite telle que  $h$  tende vers une limite  $h_1$ , et que chacune des fonctions  $\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_k}$  converge uniformément vers une limite; cette limite est de la forme  $\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k}$ , les fonctions  $U_i(x)$  étant continues dans  $\Pi$  et nulles sur  $\Sigma$ . Il vient

$$(5) \quad \frac{\rho}{\mu} \sum_{i,k} \iiint_{\Pi} U_k(x) \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k} \gamma_i(x) \delta x = 1, \quad \sum_k \frac{\partial U_k(x)}{\partial x_k} = 0.$$

[Dans l'expression des fonctions  $\alpha_i(x)$  et  $\gamma_i(x)$  la valeur  $h_1$  doit désormais être attribuée à  $h$ .] Cherchons si la conclusion ainsi obtenue n'est pas absurde.

Soit  $\lambda_i(x)$  un vecteur défini et régulier dans  $\Pi$  et sur  $\Sigma$ , qui s'annule sur  $\Sigma$  et dont la divergence est nulle. (5) reste vérifié quand on remplace  $\gamma_i(x)$  par  $\gamma_i(x) + \lambda_i(x)$ . Donc

$$\sum_{i,k} \iiint_{\Pi} U_k(x) \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k} \lambda_i(x) \delta x = 0.$$

Soit une ligne fermée quelconque  $L$ , intérieure à  $\Pi$ ; on constate aisément qu'un cas limite de la dernière relation écrite est la suivante :

$$\oint U_k(x) \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k} dx_i = 0.$$

Autrement dit, le vecteur  $\sum_k U_k(x) \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k}$  est le gradient d'une fonction

$P(x)$ , uniforme dans  $\Pi$ ; et le vecteur  $U_i(x)$  se trouve vérifier les équations auxquelles obéissent les régimes permanents des liquides parfaits

$$\sum_k U_k(x) \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial P(x)}{\partial x_i}, \quad \sum_k \frac{\partial U_k(x)}{\partial x_k} = 0.$$

Comme  $U_k(x)$  est nul sur  $\Sigma$ ,  $P(x)$  prend des valeurs constantes  $P_1, P_2, \dots, P_l$  sur chacune des surfaces  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_l$ ; et la première relation (5) s'écrit

$$P_1 \iint_{\Sigma_1} \sum z_i(x) \delta x_i + P_2 \iint_{\Sigma_2} \sum z_i(x) \delta x_i + \dots + P_l \iint_{\Sigma_l} \sum z_i(x) \delta x_i = \frac{\mu}{\rho}.$$

Cette relation est effectivement impossible si chacune de ces intégrales de surface est nulle (condition A que nous supposons remplie).

Pour démontrer le lemme A il nous faudra donc substituer au raisonnement de ce paragraphe un autre, envisageant toutes les éventualités possibles. Nous établirons les lemmes B et C en même temps que le lemme A; à cet effet nous donnerons préalablement une nouvelle forme à la relation (3).

## II. — Une relation équivalente à la relation de dissipation de l'énergie.

4. CAS D'UN DOMAINE  $\Pi$  BORNÉ. — Nous déduirons directement des équations de Navier la relation annoncée; elle diffère de (3) en ce qu'il n'y figure que des intégrales triples et qu'on y emploie, le plus souvent possible, les composantes du tenseur symétrique  $\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}$  — ce tenseur s'annule dans tout domaine où  $\gamma_i(x)$  est égal à la vitesse d'un mouvement de déplacement —. Nous utiliserons jusqu'à la fin de ce chapitre « la convention de l'indice muet » : un terme d'une somme où un indice figure deux fois représentera la somme des termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs 1, 2, 3. Écrivons quatre identités valables sous la seule réserve que l'on ait

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i} = 0;$$

nous y avons fait figurer une fonction  $a(x)$  qui restera arbitraire jusqu'à nouvelle indication

$$\begin{aligned} \mu \iint_{\Sigma} (u_i - \gamma_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x_k &= \mu \iiint_{\Pi} (u_i - \gamma_i) \Delta u_i \delta x \\ &+ \mu \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \right) \delta x \\ &+ \mu \iiint_{\Pi} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \right) \delta x; \\ \mu \iint_{\Sigma} (u_i - \gamma_i) \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \delta x_k &= \mu \iiint_{\Pi} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \right) \delta x; \\ &- \iint_{\Sigma} [\rho(x) + \rho a(x)] (u_i - \gamma_i) \delta x_i \\ &= - \iiint_{\Pi} (u_i - \gamma_i) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \delta x - \rho \iiint_{\Pi} (u_i - \gamma_i) \frac{\partial a}{\partial x_i} \delta x; \\ \rho \iint_{\Pi} \left[ \gamma_i u_i u_k - \frac{1}{2} u_i u_i u_k - \frac{1}{2} \gamma_i \gamma_i \gamma_k \right] \\ &= - \rho \iiint_{\Pi} (u_i - \gamma_i) u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x + \rho \iiint_{\Pi} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} (u_i u_k - \gamma_i \gamma_k) \delta x. \end{aligned}$$

Ajoutons ces identités membre à membre; supposons que  $u_i(x)$  soit une solution, régulière dans  $\Pi$ , des équations de Navier :

$$(6) \quad \mu \Delta u_i - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\rho X_i + \rho A_{ik} u_k, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Remarquons en outre que  $A_{ik} u_i u_k = A_{ik} \gamma_i \gamma_k = 0$  puisque  $A_{ik} + A_{ki} = 0$ . Il vient

$$\begin{aligned} (7) \quad \mu \iint_{\Sigma} (u_i - \gamma_i) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k &- \iint_{\Sigma} [\rho(x) + \rho a(x)] (u_i - \gamma_i) \delta x_i \\ &+ \rho \iint_{\Sigma} \left[ \gamma_i u_i u_k - \frac{1}{2} u_i u_i u_k - \frac{1}{2} \gamma_i \gamma_i \gamma_k \right] \delta x_k \\ &= -\rho \iiint_{\Pi} (u_i - \gamma_i) X_i \delta x + \rho \iiint_{\Pi} \left[ A_{ik} \gamma_k - \frac{\partial a}{\partial x_i} \right] (u_i - \gamma_i) \delta x \\ &+ \mu \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \right) \delta x \\ &+ \frac{\mu}{2} \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) \left[ \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) \right] \delta x \\ &+ \frac{\rho}{2} \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) (u_i u_k - \gamma_i \gamma_k) \delta x. \end{aligned}$$

Enfin tenons compte du fait que  $u_i = \gamma_i$  sur  $\Sigma$ . Nous obtenons la relation, dont l'emploi est préférable à celui de (3),

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \mu \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \right) \delta x \\
 & = - \frac{\mu}{2} \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) \right] \delta x \\
 & \quad - \frac{\rho}{2} \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) (u_i u_k - \gamma_i \gamma_k) \delta x \\
 & \quad + \rho \iiint_{\Pi} (u_i - \gamma_i) X_i \delta x - \rho \iiint_{\Pi} \left[ \Lambda_{ik} \gamma_k - \frac{\partial a}{\partial x_i} \right] (u_i - \gamma_i) \delta x.
 \end{aligned}$$

*Réciproque.* — Dans la définition des solutions régulières donnée au paragraphe 15 du chapitre précédent on peut remplacer la condition que les trois premières équations de Navier définissent une fonction  $p(x)$ , continue et uniforme dans  $\Pi$  et sur  $\Sigma$ , par la condition que la relation (8) soit vérifiée pour tous les vecteurs  $\gamma_i(x)$ .

*Remarque.* — Supposons que  $\alpha_i(x)$  se trouve être égal à la vitesse  $a_i(x)$  d'un mouvement hélicoïdal uniforme satisfaisant les équations de Navier (6). Nous avons donc

$$\Lambda_{ik} a_k(x) = \frac{\partial a}{\partial x_i},$$

$a(x)$  étant un polynôme du second degré auquel nous égalons la fonction arbitraire qui figure dans (8). Prenons  $\gamma_i(x) = a_i(x)$ , le second membre de (8) s'annule identiquement

Donc  $u_i(x) = a_i(x)$  est la seule solution régulière qui corresponde aux données que nous venons de choisir.

**3. CAS D'UN DOMAINE  $\Pi$  INFINI.** — On suppose donnés  $\Pi$ ,  $\alpha_i(x)$  et  $a_i(x)$ ;  $X_i = 0$ ; soit  $u_i(x)$  une solution régulière correspondante. D'après la définition que nous avons énoncée, à la fin du paragraphe 17 (Chapitre I),  $u_i(x)$  est la limite de solutions des équations de Navier,  $u_i^*(x)$ , régulières dans des domaines bornés  $\Pi^*$  qui tendent vers  $\Pi$ . Les vecteurs que nous nommerons  $\gamma_i(x)$  sont ceux qui possèdent les propriétés déjà indiquées au paragraphe 2 et qui en outre ne diffèrent de  $a_i(x)$  que sur un domaine borné. Dès que  $\Pi^*$  contient ce domaine

borné les fonctions  $u_i$  vérifient la relation (8), où l'on prend pour  $a(x)$  le polynôme du second degré dont le gradient est

$$\frac{\partial a(x)}{\partial x_i} = A_{ik} a_k(x).$$

Toutes les intégrales qui figurent au second membre de cette relation (8) portent sur des quantités identiques à zéro hors d'un domaine borné; un passage à la limite aisé nous donne donc

$$\begin{aligned} (9) \quad & \mu \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \right) \delta u \\ & \leq - \frac{\mu}{2} \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) \right] \delta x \\ & \quad - \frac{\varrho}{2} \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) (u_i u_k - \gamma_i \gamma_k) \delta x \\ & \quad - \varrho \iiint_{\Pi} \left[ A_{ik} \gamma_k - \frac{\partial a}{\partial x_i} \right] (u_i - \gamma_i) \delta x. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\frac{\partial a(x)}{\partial x_i} = A_{ik} a_k(x).$$

*Remarque.* — Soit  $S$  une surface régulière et fermée qui s'éloigne indéfiniment. Toute solution  $u_i(x)$  régulière dans  $\Pi$  vérifie la relation que l'on obtient en remplaçant dans (7)  $\Sigma$  par  $S + \Sigma$  et  $\Pi$  par la portion de  $\Pi$  intérieure à  $S$ . On en déduit que la quantité obtenue en retranchant le second membre de (9) du premier est la limite de l'intégrale

$$\begin{aligned} & \mu \iint_S (u_i - a_i) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k - \iint_S [p + \varrho a] (u_i - a_i) \delta x_i \\ & - \varrho \iint_S \left[ a_i u_i u_k - \frac{1}{2} u_i u_i u_k - \frac{1}{2} a_i a_i a_k \right] \delta x_k. \end{aligned}$$

[ Le vecteur  $\delta x_i$  est dirigé suivant la normale extérieure à  $S$ . ]

Par suite la différence des deux membres de (9) a une valeur indépendante du choix de  $\gamma_i(x)$ .

III. — Démonstration par l'absurde des lemmes A, B et C.

6. Supposons l'existence d'une suite de solutions régulières  $u_i^*(x)$  qui mettent en défaut les lemmes A, B ou C : l'intégrale

$$J^* = \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \delta x$$

augmente indéfiniment. Dans le cas A nous convenons que le vecteur  $a_i(x)$  et la fonction  $a(x)$  sont nuls; dans le cas B nous posons  $u_i^*(x) = a_i(x)$  sur  $\Pi - \Pi^*$ . Nous désignons par  $\alpha_i^*(x)$  les valeurs prises par  $u_i^*(x)$  sur  $\Sigma$ . Les fonctions  $\alpha_i^*(x) - a_i(x)$  sont proportionnelles à un paramètre  $h^*$  [et même toutes égales dans le cas B, où  $h^*$  représentera donc une suite de valeurs égales].

Introduisons une suite de vecteurs  $\gamma_i^*(x)$  : ils seront définis dans  $\Pi$  : ils y admettent des dérivées secondes bornées; sur  $\Sigma$  ils seront respectivement égaux aux vecteurs  $\alpha_i^*(x)$ ; leur divergence sera nulle en tout point de  $\Pi$ ; dans les cas B et C ils ne différeront de  $a_i(x)$  que sur un domaine borné; nous ferons en sorte que les vecteurs  $\gamma_i^*(x) - a_i(x)$  soient proportionnels à  $h^*$ .

Remplaçons dans l'égalité (8) (cas A ou B) ou dans l'inégalité (9) (cas C)  $u_i(x)$  et  $\gamma_i(x)$  respectivement par  $u_i^*(x)$  et  $\gamma_i^*(x)$  et divisons par  $J^*$  les deux membres. La relation ainsi obtenue sera nommée *relation fondamentale*. Dans le cas B elle n'est valable que pour les termes de la suite de rang suffisamment élevé :  $\Pi^*$  doit contenir tous les points où  $\gamma_i^*(x) \neq a_i(x)$ .

[Dans le cas C, où cette relation fondamentale est une inégalité, la différence de ses deux membres a une valeur indépendante du choix de  $\gamma_i^*(x)$ .]

7. Nous avons le droit de supposer la suite choisie en sorte que  $h^*$  tende vers une limite unique, ainsi que les intégrales

$$\frac{1}{J^*} \iiint \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \delta x$$

lorsqu'elles sont étendues au volume de l'un quelconque des cubes

intérieurs à  $\Pi$  dont les sommets ont des coordonnées rationnelles. Dès lors  $\alpha_i^*(x)$  et  $\gamma_i^*(x)$  tendent uniformément vers des limites  $\alpha_i(x)$  et  $\gamma_i(x)$  et les intégrales

$$\frac{1}{\sqrt{J^2}} \iiint_{\Pi} F_{ij}(x) \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \hat{\alpha} x$$

tendent vers des limites bien déterminées chaque fois que les fonctions  $F_{ij}(x)$  sont de carrés sommables sur  $\Pi$ .

On démontre que ces limites sont de la forme

$$\iiint_{\Pi} F_{ij}(x) U_{ij}(x) \hat{\alpha} x,$$

les  $U_{ij}(x)$  étant certaines fonctions mesurables, de carrés sommables sur  $\Pi$ . De même les intégrales

$$\frac{1}{J^2} \iiint_{\Pi} \iiint_{\Pi} F_{ijkl}(x, y) \left[ \frac{\partial u_i^*(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} \right] \left[ \frac{\partial u_l^*(y)}{\partial y_k} - \frac{\partial a_l(y)}{\partial y_k} \right] \hat{\alpha} x \hat{\alpha} y$$

tendent vers

$$\iiint_{\Pi} \iiint_{\Pi} F_{ijkl}(x, y) U_{ij}(x) U_{kl}(y) \hat{\alpha} x \hat{\alpha} y$$

quand les  $F_{ijkl}(x, y)$  sont de carrés sommables sur le domaine à six dimensions obtenu en faisant parcourir indépendamment  $\Pi$  à  $x$  et à  $y$ . On dit que les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{J^2}} \left[ \frac{\partial u_i^*(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} \right]$$

convergent faiblement, en moyenne, sur  $\Pi$  vers les fonctions  $U_{ij}(x)$ .

On trouvera dans le Mémoire de M. F. Riesz [*Ueber Systeme integrierbarer Funktionen* (*Mathematische Annalen*, 1910)] des renseignements plus précis sur cette notion qui a pour origine certains travaux de M. Hilbert.

8. Sachant ainsi comment se comportent les fonctions  $\frac{1}{\sqrt{J^2}} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}$  cherchons à en déduire des renseignements concernant les fonctions  $\frac{1}{\sqrt{J^2}} u_i^*(x)$  elles-mêmes.

Soit  $x$  un point intérieur à  $\Pi$ ; soit  $z$  un point de la surface  $\Sigma$  tel que tous les points  $y$  du segment  $\overline{xz}$  appartiennent à  $\Pi$ . Nous avons, en désignant par  $r$  et  $r_1$  les distances respectives de  $x$  à  $y$  et à  $z$ , par  $\omega$  l'angle solide sous lequel on voit  $\Sigma$  de  $x$

$$u_i^*(x) = -\frac{1}{\omega} \iiint_{\Sigma} \frac{\partial u_i^*(y)}{\partial y_k} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y_k} \delta y - \frac{1}{\omega} \iint_{\Sigma} x_i^*(z) \frac{\partial \left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial z_k} \delta z_k;$$

les intégrales sont étendues aux ensembles de points  $y$  et  $z$  que nous venons de définir. Le second terme du second membre est inférieur en module à la plus grande longueur du vecteur  $x_i^*(x)$ . Le premier terme est de la forme

$$\iiint_{\Pi} H_k(x, y) \frac{\partial u_i^*(y)}{\partial y_k} \delta y.$$

Imposons à  $x$  de rester à l'intérieur d'une portion de  $\Pi$  bornée :  $\omega, A, A'', \dots$  désignant des constantes, nous avons

$$H_k(x, y) < \frac{A}{r^2}$$

et

$$H_k(x, y) = 0 \quad \text{pour } x_k y_k > A' \text{ et pour } y_k y_k > A'.$$

Posons

$$K_{k,l}(y, y') = \iiint_{\Pi} H_k(x, y) H_l(x, y') \delta x.$$

Nous avons,  $r'$  représentant la distance des points  $y$  et  $y'$ ,

$$K_{k,l}(y, y') < \frac{A''}{r'^2}$$

et

$$K_{k,l}(y, y') = 0 \quad \text{pour } y_k y_k > A' \text{ et pour } y'_k y'_k > A'.$$

Par suite l'intégrale

$$\iiint_{\Pi} \iiint_{\Pi} K_{k,l}(y, y') K_{k,l}(y, y') \delta y \delta y'$$

a un sens.

Il en résulte que les fonctions

$$U_i(x) = \iiint_{\Pi} H_k(x, y) U_{ik}(y) \delta y$$

sont définies presque partout sur  $\Pi$  et sont de carrés sommables sur tout domaine  $\omega$ . Or

$$\begin{aligned} & \iiint_{\omega} \left[ U_i(x) - \frac{1}{\sqrt{J^2}} \iiint_{\Pi} H_k(x, y) \frac{\partial u_i^*(y)}{\partial y_k} \delta y \right] \\ & \times \left[ U_i(x) - \frac{1}{\sqrt{J^2}} \iiint_{\Pi} H_k(x, y) \frac{\partial u_i^*(y)}{\partial y_k} \delta y \right] \delta x \\ & = \iiint_{\Pi} \iiint_{\Pi} \left[ U_{i,k}(y) - \frac{1}{\sqrt{J^2}} \frac{\partial u_i^*(y)}{\partial y_k} \right] K_{k,l}(y, y') \\ & \times \left[ U_{i,l}(y') - \frac{1}{\sqrt{J^2}} \frac{\partial u_i^*(y')}{\partial y'_l} \right] \delta y \delta y'. \end{aligned}$$

D'après le paragraphe précédent, cette dernière intégrale tend vers zéro. Donc

$$\iiint_{\omega} \left[ U_i(x) - \frac{1}{\sqrt{J^2}} u_i^*(x) \right] \left[ U_i(x) - \frac{1}{\sqrt{J^2}} u_i^*(x) \right] \delta x$$

tend vers zéro.

On exprime ce fait en disant que les fonctions  $\frac{1}{\sqrt{J^2}} u_i^*(x)$  convergent fortement en moyenne vers les fonctions mesurables  $U_i(x)$  sur toute portion bornée  $\omega$  de  $\Pi$ .

Soient  $F_{ij}(x)$  et  $F_{ijk}(x)$  des fonctions mesurables bornées qui ne diffèrent de zéro que sur un ensemble borné de points de  $\Pi$  : l'intégrale

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{1}{J^2} \iiint_{\Pi} F_{ij}(x) u_i^*(x) u_j^*(x) \delta x \text{ tend vers } \iiint_{\Pi} F_{ij}(x) U_i(x) U_j(x) \delta x, \\ \frac{1}{J^2} \iiint_{\Pi} F_{ijk}(x) u_i^*(x) \frac{\partial u_j^*(x)}{\partial x_k} \delta x \text{ tend vers } \iiint_{\Pi} F_{ijk}(x) U_i(x) U_{j,k}(x) \delta x. \end{cases}$$

9. De même la relation fondamentale donne à la limite

$$(11) \quad \mu \leq - \frac{\rho}{2} \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) U_i U_k \delta x.$$

Dans cette formule on peut prendre pour  $\gamma_i(x)$  un quelconque des vecteurs de divergence nulle, qui admettent dans  $\Pi$  des dérivées secondes bornées, qui sont égaux à  $\alpha_i(x)$  sur  $\Sigma$  et qui, lorsque  $\Pi$  est infini, coïncident avec  $\alpha_i(x)$  hors d'un domaine borné.

[La différence des deux membres de la relation fondamentale est indépendante du choix de  $\gamma_i(x)$ ; cette propriété vaut à la limite pour (11); autrement dit le second membre de (11) a une valeur indépendante du choix de  $\gamma_i(x)$ .]

Soit  $\varepsilon$  une longueur tendant vers zéro et soit  $\omega$  l'ensemble des points de  $\Pi$  distants de  $\Sigma$  de moins de  $\varepsilon$ ;  $\omega$  se compose de  $l$  domaines séparés :  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$  qui correspondent respectivement aux surfaces  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_l$ . Énonçons deux inégalités que nous démontrerons aux paragraphes suivants :

*Première inégalité.* — On peut trouver un vecteur  $\gamma_i(x)$  qui ne diffère de  $a_i(x)$  qu'à l'intérieur de  $\omega$  et tel que

$$\left| \frac{\partial \gamma_i(x)}{\partial x_k} \right| < A \varepsilon^{-2},$$

$A$  étant une quantité dépendant exclusivement de  $\Sigma$ , de  $\alpha_i(x)$  et de  $a_i(x)$ .

*Seconde inégalité.* — Il existe une quantité  $A_\omega$ , dépendant uniquement de  $\Sigma$ , telle que

$$\iiint_{\omega} U_i(x) U_i(x) \delta x \leq 4 A_\omega^2 \varepsilon^2 \iiint_{\omega} U_{i,k}(x) U_{i,k}(x) \delta x.$$

Dès lors

$$-\frac{\rho}{2} \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) U_i U_k \delta x < 4 A_\omega^2 A_l \iiint_{\omega} U_{i,k}(x) U_{i,k}(x) \delta x.$$

Ainsi le second membre de (11) peut être rendu arbitrairement voisin de zéro, alors que le premier a une valeur positive. Ce résultat constitue la contradiction cherchée, qui établit les lemmes A, B, C.

Indiquons que de simples raisons d'homogénéité suffisent à rendre très probable la seconde inégalité. Quand à la première, elle est intuitive : considérons, par exemple à l'intérieur de  $\omega_1$ , le courant dont la vitesse est  $\gamma_i(x) - a_i(x)$ ; ce courant entre dans  $\omega$ , par certaines portions de  $\Sigma_1$ , sort par d'autres, avec des vitesses données; — ceci exige la relation

$$\iint_{\Sigma_1} \alpha_i(x) \delta x_i = 0.$$

le volume qu'il traverse a une section dont l'ordre infinitésimal est  $\varepsilon$ ; le maximum de l'intensité de ce courant doit donc pouvoir être choisi de l'ordre de  $\varepsilon^{-1}$ , et le maximum de  $\left| \frac{\partial \gamma_i(x)}{\partial x_k} \right|$  de l'ordre de  $\varepsilon^{-2}$ .

**10. DEMONSTRATION DE LA SECONDE INÉGALITÉ.** — Soit  $2\Delta$  le minimum des longueurs de tous les rayons de courbure de  $\Sigma$  et de tous les segments perpendiculaires à  $\Sigma$  en leurs deux extrémités. Traçons en chaque point de  $\Sigma$  un segment normal à  $\Sigma$ , intérieur à  $\Pi$ , de longueur  $\Delta$ . Ces segments emplissent un volume; définissons en tout point  $x$  de ce volume une fonction  $D(x)$  comme étant la plus courte distance de  $x$  à  $\Sigma$  et un vecteur  $L_k(x)$  par les propriétés suivantes : ses lignes de force sont les segments tracés; son flux est conservatif; sur  $\Sigma$  il a pour longueur 1 et est orienté vers l'intérieur de  $\Pi$ . Nous prendrons  $\varepsilon < \Delta$ ;  $\omega$  est le domaine où  $D(x) < \varepsilon$ . Soit  $\eta$  une quantité positive arbitrairement faible; nous avons

$$\begin{aligned} & - \iiint_{\omega, x < \varepsilon} (u_i^* - \gamma_i^*) (u_i - \gamma_i) \frac{1}{(D + \eta)^2} \frac{\partial D}{\partial x_k} L_k \delta x \\ & - 2 \iiint_{\omega, x < \varepsilon} (u_i - \gamma_i) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i^*}{\partial x_k} \right) \frac{L_k}{D + \eta} \delta x \\ & = \iiint_{\omega, x = \varepsilon} (u_i^* - \gamma_i^*) (u_i - \gamma_i) \frac{1}{D + \eta} L_k \delta x_k > 0. \end{aligned}$$

Divisons par  $J^*$ , passons à la limite en utilisant (10), il vient

$$\iiint_{\omega} U_i U_j \frac{1}{(D + \eta)^2} \frac{\partial D}{\partial x_k} L_k \delta x \leq 2 \iiint_{\omega} U_i U_{i,k} \frac{1}{D + \eta} L_k \delta x.$$

D'où, par l'inégalité de Schwarz,

$$\left[ \iiint_{\omega} U_i U_j \frac{1}{(D + \eta)^2} \frac{\partial D}{\partial x_k} L_k \delta x \right]^2 \leq 4 \iiint_{\omega} U_i U_i \frac{L_k L_k}{(D + \eta)^2} \delta x \iiint_{\omega} U_{i,k} U_{i,k} \delta x.$$

En chaque point  $x$  les vecteurs  $\frac{\partial D}{\partial x_k}$  et  $L_k$  sont parallèles; le premier a pour longueur 1; soit  $A_0$  le quotient de la plus grande longueur du second par la plus petite, nous avons

$$\iiint_{\omega} U_i U_i \frac{1}{(D + \eta)^2} \delta x \leq 4 A_0^2 \iiint_{\omega} U_{i,k} U_{i,k} \delta x.$$

D'où, en remplaçant  $D$  par son maximum dans  $\varpi : \varepsilon$ , puis en faisant tendre  $\gamma$  vers zéro,

$$\iiint_{\varpi} U_i U_j \delta x \leq 4 A_0^2 \varepsilon^3 \iiint_{\varpi} U_{i,k} U_{j,k} \delta x. \quad \text{c. q. f. d.}$$

## II. DÉMONSTRATION DE LA PREMIÈRE INÉGALITÉ. — Puisque

$$\iint_{\Sigma} x_i(x) \delta x_i = 0,$$

on a

$$\iint_{\Sigma} [x_i(x) - a_i(x)] \delta x_i = 0,$$

il est possible de définir dans  $\Pi$  et sur  $\Sigma$  un vecteur  $P_k(x)$ , à dérivées secondes bornées, tel que sur  $\Sigma$

$$\begin{aligned} x_1(x) - a_1(x) &= \frac{\partial P_3(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2(x)}{\partial x_3}, \\ x_2(x) - a_2(x) &= \frac{\partial P_1(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial P_3(x)}{\partial x_1}, \\ x_3(x) - a_3(x) &= \frac{\partial P_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1(x)}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Or la fonction  $\frac{[\varepsilon^2 - D^2(x)]^2}{\varepsilon^6}$  vaut 1 sur  $\Sigma$ , ses dérivées premières s'y annulent; pour  $D(x) = \varepsilon$ , elle est nulle ainsi que ses dérivées premières et secondes. Donc la « première inégalité » est vérifiée par le vecteur  $\gamma_i(x)$  que définissent les relations

$$(13) \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_1(x) - a_1(x) = \frac{1}{\varepsilon^6} \frac{\partial}{\partial x_2} [(\varepsilon^2 - D^2)^2 P_3] - \frac{1}{\varepsilon^6} \frac{\partial}{\partial x_3} [(\varepsilon^2 - D^2)^2 P_2] & \text{pour } D(x) \leq \varepsilon; \\ \gamma_1(x) - a_1(x) = 0 & \text{dans } \Pi - \varpi; \\ \gamma_2(x) - a_2(x) = \frac{1}{\varepsilon^6} \frac{\partial}{\partial x_3} [(\varepsilon^2 - D^2)^2 P_1] - \frac{1}{\varepsilon^6} \frac{\partial}{\partial x_1} [(\varepsilon^2 - D^2)^2 P_3] & \text{pour } D(x) \leq \varepsilon; \\ \gamma_2(x) - a_2(x) = 0 & \text{dans } \Pi - \varpi; \\ \gamma_3(x) - a_3(x) = \frac{1}{\varepsilon^6} \frac{\partial}{\partial x_1} [(\varepsilon^2 - D^2)^2 P_2] - \frac{1}{\varepsilon^6} \frac{\partial}{\partial x_2} [(\varepsilon^2 - D^2)^2 P_1] & \text{pour } D(x) \leq \varepsilon; \\ \gamma_3(x) - a_3(x) = 0 & \text{dans } \Pi - \varpi. \end{array} \right.$$

*Remarque.* —  $\gamma_i(x)$  doit admettre des dérivées secondes bornées; nous venons donc de supposer implicitement que  $D(x)$  possède des

dérivées troisièmes bornées. Quand il n'en sera pas ainsi, on introduira une fonction positive et monotone,  $\Phi(x)$ , définie pour  $D(x) < \Delta$ ,  $\Phi$  admettra des dérivées troisièmes bornées; la longueur de son gradient et la fonction  $\Phi(x)D^{-1}(x)$  devront avoir une borne inférieure positive et une borne supérieure finie;  $\omega$  sera alors le domaine où  $\Phi(x) < \varepsilon$ ,  $L_k$  sera parallèle en chaque point à  $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$ , et non plus à  $\frac{\partial D}{\partial x_k}$ , et  $\Phi$  sera partout substitué à  $D$  au cours des paragraphes 9, 10, 11.

*Cas où le vecteur  $x_i(x) - a_i(x)$  est tangent à  $\Sigma$  en chacun de ses points.* — On peut alors prendre le vecteur  $P_k(x)$  nul sur  $\Sigma$ : les conditions imposées se traduiront par deux relations concernant sa dérivée normale sur  $\Sigma$ . Et des formules (12) résulte une inégalité plus précise que l'inégalité annoncée, à savoir

$$\left| \frac{\partial \gamma_i(x)}{\partial x_k} \right| < A \varepsilon^{-1}.$$

$A$  étant une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

#### IV. — Détermination effective d'une majorante de $J$ .

12. Nous venons d'établir les lemmes A, B et C. Il est naturel d'essayer d'obtenir des résultats plus précis et de se poser le problème suivant:  $u_i(x)$  étant une solution des équations de Navier, régulière dans un domaine  $\Pi$  fini ou infini, construire, à l'aide des seules quantités que nous avons nommées les données, une majorante de l'intégrale

$$J = \iiint_{\Pi} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \delta x.$$

*Notations.* —  $a_i(x)$  a été défini dans le cas où  $\Pi$  n'est pas borné.

Sinon, on peut prendre ce vecteur égal à la vitesse d'un mouvement quelconque de déplacement qui satisfait la relation  $A_{ik} a_k(x) = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}$ ,  $a(x)$  étant un polynome de degré deux au plus; par exemple, si sur

une surface fermée frontière de  $\Pi$   $a_i(x)$  se trouve être égal à la vitesse d'un tel mouvement, il sera très avantageux de prendre dans  $\Pi$   $a_i(x)$  égal à cette vitesse. Modifions maintenant comme suit les notations précédemment utilisées : soient  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  celles des surfaces frontières de  $\Pi$ , fermées et d'un seul tenant, sur lesquelles  $z_i(x)$  n'est pas identique à  $a_i(x)$ ; nommons  $\Delta$  une longueur inférieure à la moitié du plus petit rayon de courbure de  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ , à la moitié du plus petit segment perpendiculaire en ses deux extrémités à l'une des surfaces  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ , et inférieure à la plus courte distance de  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  aux autres surfaces fermées qui constituent  $\Delta$ .

Traçons en chaque point de  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  un segment normal à la frontière, intérieur à  $\Pi$ , de longueur  $\Delta$ . Ces segments emplissent un volume; définissons en tout point  $x$  de ce volume la fonction  $D(x)$  comme étant la plus courte distance de  $x$  à  $\Sigma$ , et le vecteur  $L_k(x)$  par les mêmes propriétés qu'au paragraphe 10. Soit  $\varepsilon$  une longueur variant de 0 à  $\Delta$  et soit  $\omega(\varepsilon)$  l'ensemble des points où  $D(x)$  est inférieur à  $\varepsilon$ .  $\omega(\varepsilon)$  se compose de  $n$  domaines séparés :  $\omega_1(\varepsilon), \dots, \omega_n(\varepsilon)$ ;  $\omega_s(\varepsilon)$  a pour frontière  $\Sigma_s$  et une surface parallèle  $S_s(\varepsilon)$ . Nous nommons  $\gamma_i(x)$  le vecteur, dépendant de  $\varepsilon$ , que définissent les relations (12).

Nous supposons, pour simplifier, que les dérivées troisièmes de  $D(x)$  existent et sont bornées. Posons

$$u_i(x) = v_i(x) + a_i(x), \quad \gamma_i(x) = z_i(x) + a_i(x).$$

Introduisons enfin quatre constantes :

- $A_1^2$  qui est le maximum de l'aire de  $S_1(\varepsilon) + \dots + S_n(\varepsilon)$ , pour  $0 \leq \varepsilon \leq \Delta$ ;
- $A_2$  qui est le maximum de  $\varepsilon^2 \left| \frac{\partial \gamma_i(x)}{\partial x_k} \right|$  et par suite une borne supérieure de  $\varepsilon |\gamma_i(x)|$ ;
- $A_3$  qui est le maximum de  $|a_i(x)|$  dans  $\omega(\Delta)$ ;
- $A_4$  qui est la plus grande des quantités  $|A_{ik}|$ .

Et, pour simplifier, supposons  $N_i = 0$ .

Dans ces conditions la relation fondamentale, c'est-à-dire l'éga-

lité (8) ou l'inégalité (9), nous donne

$$\begin{aligned} \mu \iiint_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta v &\leq \mu \iiint_{\sigma, \varepsilon} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x_i} \right) \delta v \\ &+ \mu \iiint_{\sigma, \varepsilon} \frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x_i} \delta v \\ &- \frac{\rho}{2} \iiint_{\sigma, \varepsilon} \left( \frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_i^k}{\partial x_i} \right) (u_i u_k - \gamma_i \gamma_k) \delta v \\ &- \rho \iiint_{\sigma, \varepsilon} \Lambda_{ik} \gamma_i^k (u_i - \gamma_i) \delta v. \end{aligned}$$

Et il en résulte l'inégalité

$$\begin{aligned} (13) \quad \mu J &\geq 6\mu \Lambda_1 \Lambda_2 \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{J} \\ &+ 3\rho \Lambda_2 \varepsilon^{-2} \iiint_{\sigma, \varepsilon} u_i u_i \delta v + 3\sqrt{3} \rho \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\iiint_{\sigma, \varepsilon} u_i u_i \delta v} \\ &+ 9\mu \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 \varepsilon^{-3} + 3\rho \Lambda_1^2 \Lambda_2 \varepsilon^{-1} [\Lambda_2 \varepsilon^{-1} + \Lambda_3]^2 \\ &+ 9\rho \Lambda_1^2 \Lambda_2 \Lambda_3 [\Lambda_2 \varepsilon^{-1} + \Lambda_3]. \end{aligned}$$

**15.** Ayons maintenant recours à des considérations analogues à celles du paragraphe 10.

Soit  $\Gamma_i(x)$  le vecteur  $\gamma_i(x)$  correspondant à  $\varepsilon = \Delta$ , ou un autre vecteur régulier dans  $\sigma(\Delta)$  et égal à  $\alpha_i(x)$  sur  $\Sigma$ . Nous avons

$$\iiint_{\sigma, \Delta} (u_i - \Gamma_i) (u_i - \Gamma_i) \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial x_k} L_k \delta v \geq 3 \iiint_{\sigma, \Delta} (u_i - \Gamma_i) \frac{\partial (u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \frac{L_k}{D} \delta v.$$

D'où

$$\begin{aligned} &\left[ \iiint_{\sigma, \Delta} (u_i - \Gamma_i) (u_i - \Gamma_i) \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial x_k} L_k \delta v \right]^2 \\ &\geq 4 \iiint_{\sigma, \Delta} (u_i - \Gamma_i) (u_i - \Gamma_i) \frac{L_k L_k}{D^2} \delta v \iiint_{\sigma, \Delta} \frac{\partial (u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \frac{\partial (u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \delta v. \end{aligned}$$

Et en désignant par  $A_0$  le quotient du maximum de  $\sqrt{L_k L_k}$  par son minimum

$$(14) \quad \iiint_{\sigma, \Delta} (u_i - \Gamma_i) (u_i - \Gamma_i) \frac{1}{D^2} \delta v \leq 4 A_0^2 \iiint_{\sigma, \Delta} \frac{\partial (u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \frac{\partial (u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \delta v.$$

Soit

$$\varphi(\varepsilon) = \iiint_{\sigma(\varepsilon)} (u_i - \Gamma_i)(u_i - \Gamma_i) \delta x;$$

$\varphi'(\varepsilon)$  est la somme de  $(u_i - \Gamma_i)(u_i - \Gamma_i)$  étendue à la surface

$$S_1(\varepsilon) + \dots + S_n(\varepsilon);$$

$\varphi'(\varepsilon)\varepsilon^{-2}$  reste bornée quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. La relation (14) s'écrit

$$\int_0^\Delta \frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varepsilon^2} d\varepsilon \leq 4A_0^2 \iiint_{\sigma(\Delta)} \frac{\partial(u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \frac{\partial(u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \delta x.$$

Or

$$\left[ \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right]_0^\Delta = \int_0^\Delta \frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varepsilon^2} d\varepsilon - 2 \int_0^\Delta \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^3} d\varepsilon.$$

On a donc

$$\int_0^\Delta \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^3} d\varepsilon \leq 2A_0^2 \iiint_{\sigma(\Delta)} \frac{\partial(u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \frac{\partial(u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \delta x.$$

Soit  $B^2$  une quantité positive arbitraire; on ne peut avoir

$$\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^3} > B^2 \iiint_{\sigma(\Delta)} \frac{\partial(u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \frac{\partial(u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \delta x$$

sur un intervalle  $(\eta, \Delta)$  de variation de  $\varepsilon$  que si

$$B^2 \log \frac{\Delta}{\eta} < 2A_0^2.$$

Autrement dit entre  $\Delta$  et  $\eta = \Delta e^{-\frac{2A_0^2}{B^2}}$  se trouvent des valeurs de  $\varepsilon$  pour lesquelles

$$\iiint_{\sigma(\varepsilon)} (u_i - \Gamma_i)(u_i - \Gamma_i) \delta x \leq B^2 \varepsilon^2 \iiint_{\sigma(\Delta)} \frac{\partial(u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \frac{\partial(u_i - \Gamma_i)}{\partial x_k} \delta x.$$

**14.** Dans (13) prenons précisément pour  $\varepsilon$  l'une de ces valeurs: posons

$$\iiint_{\sigma(\Delta)} \Gamma_i \Gamma_i \delta x = A_5^2; \quad \iiint_{\sigma(\Delta)} \frac{\partial(\Gamma_i - a_i)}{\partial x_k} \frac{\partial(\Gamma_i - a_i)}{\partial x_k} \delta x = A_6^2.$$

Nous avons

$$\iiint_{\sigma, \varepsilon} u_i u_i \delta x - 2A_3 \sqrt{\iiint_{\sigma, \varepsilon} u_i u_i \delta x} + A_3^2 \leq B^2 \varepsilon^2 [J + 2A_6 \sqrt{J} + A_6^2],$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\iiint_{\sigma, \varepsilon} u_i u_i \delta x} \leq B\varepsilon [\sqrt{J} + A_6] + A_3.$$

De (13) résulte donc l'inégalité

$$\begin{aligned} (15) \quad \mu J &\leq 6\mu A_1 A_2 \eta^{-\frac{3}{2}} \sqrt{J} + 3\rho A_2 [B\sqrt{J} + BA_6 + A_3 \eta^{-1}]^2 \\ &\quad + 3\sqrt{3}\rho A_1 A_2 A_3 [B\sqrt{J} \Delta^{\frac{1}{2}} + BA_6 \Delta^{\frac{1}{2}} + A_3 \eta^{-\frac{1}{2}}] \\ &\quad + 9\mu A_1^2 A_2^2 \eta^{-3} + 3\rho A_1^2 A_2 \eta^{-1} [A_2 \eta^{-1} + A_3]^2 \\ &\quad - 9\rho A_1^2 A_2 A_3 [A_2 \eta^{-1} + A_3], \end{aligned}$$

où

$$\eta = \Delta e^{-\frac{2A_3}{B}}.$$

(15) est une inégalité du second degré en  $\sqrt{J}$ , qui est vérifiée quel que soit B; prenons

$$B^2 < \frac{\mu}{3\rho A_2};$$

la résolution de cette inégalité fournit une majorante de J.

Montrons comment les lemmes A, B, C en résultent.

Lemme A :  $a_i(x) = 0$ ;  $\Delta$ ,  $\sigma$ ,  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  sont indépendants de  $h$ ;  $A_2$ ,  $A_5$ ,  $A_6$  sont proportionnels à  $h$ ; (15) fournit dès lors une majorante de J qui est une fonction de  $h$  continue, donc bornée. c. q. f. d.

Le lemme C résulte de considérations analogues.

Quant au lemme B, il est évident :  $\alpha_i(x) = a_i(x)$  sur la paroi externe qui s'éloigne indéfiniment; donc la majorante obtenue est indépendante de la position de cette paroi.

Si l'on fait tendre  $\mu$  vers zéro, les autres données restant fixes, la meilleure majorante que l'on puisse déduire de (15) croît indéfiniment, comme une fonction exponentielle de  $\frac{1}{\mu}$ .

**13. EXAMEN DE CAS PARTICULIERS.** — Dans certains cas particuliers il peut être avantageux de choisir  $\varepsilon$  autrement que nous l'avons fait au

paragraphe 15. D'après l'inégalité (14), nous avons

$$\iiint_{\sigma_\varepsilon} (u_i - \Gamma_i)(u_i - \Gamma_i) \delta r \geq A_0^2 \varepsilon^2 \iiint_{\sigma_\Delta} \frac{\partial(u_i - \Gamma_i)}{\partial r_i} \frac{\partial(u_i - \Gamma_i)}{\partial r_i} \delta r.$$

D'où

$$\sqrt{\iiint_{\sigma_\varepsilon} u_i u_i \delta r} \leq A_0 \varepsilon [A J - A_0] - A_0$$

et, en portant dans (13) :

$$(16) \quad \mu J \geq 6\mu A_1 A_2 \varepsilon^{-\frac{2}{3}} A J + 3\varphi A_2 [2A_0 A J - 2A_0 A_0 + A_0 \varepsilon^{-1}]^2 \\ - 3A \sqrt{3} \varphi A_1 A_2 A_1 [2A_0 A J \varepsilon^{\frac{1}{2}} - 2A_0 A_0 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + A_0 \varepsilon^{-\frac{1}{2}}] \\ - 9\mu A_1^2 A_2^2 \varepsilon^{-1} - 3\varphi A_1^2 A_2 \varepsilon^{-1} [A \varepsilon^{-1} - A_0]^2 + 9\varphi A_1^2 A_2 A_1 [A_2 \varepsilon^{-1} - A_0].$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit  $\varepsilon$ . Un premier cas où elle est utilisable est celui où le vecteur  $\alpha_i(x)$  est suffisamment voisin d'un vecteur  $a_i(x)$  pour que  $A_2 < \frac{\mu}{12\varphi A_0^2}$  : Avec les hypothèses des lemmes A et C,  $\alpha_i(x) - a_i(x)$  est proportionnel à  $h$ , donc  $A_2$  également; la relation (16) est applicable pour les faibles valeurs de  $h$ ; et puisque  $A_2$  est en facteur dans tout le second membre, cette relation prouve que  $J$  tend vers zéro avec  $h$ .

Un second cas intéressant est celui où l'on peut choisir  $a_i(x)$  en sorte que  $\alpha_i(x) - a_i(x)$  soit tangent à  $\Sigma$  en tous ses points; les dernières lignes du paragraphe 11 nous autorisent alors à remplacer dans (16) la constante  $A_2$  par  $A_2' \varepsilon$ ,  $A_2'$  étant une nouvelle constante, il suffit de choisir  $\varepsilon$  inférieur à  $\Delta$  et à  $\frac{\mu}{12\varphi A_0^2 A_2'}$  pour que la relation (16) fournisse une majorante de  $J$ .

Ainsi les lemmes A, B, C s'obtiennent bien aisément dans certains cas et en particulier dans ceux qui correspondent le mieux à des conditions aux limites pratiquement réalisables : le liquide adhère à des parois que l'on fait glisser sur elles-mêmes. Le cas plus général étudié exigerait un dispositif permettant d'injecter un liquide dans un récipient et de l'en laisser sortir avec une vitesse imposée en chaque point. Rappelons à ce propos que nous avons dû renoncer à étudier le problème qui correspondrait à l'éventualité matériellement impossible

dans laquelle certaines parois internes de  $\Pi$  contiendraient des sources de liquide.

*Remarque importante.* — Tout le contenu de ce chapitre peut être transposé sans difficulté au cas d'un espace à nombre quelconque de dimensions; les lemmes A, B, C restent valables.

### CHAPITRE III.

#### FIN DE L'ÉTUDE DES RÉGIMES PERMANENTS.

REMARQUES CONCERNANT QUELQUES AUTRES PROBLÈMES DE L'HYDRODYNAMIQUE.

#### I. — Démonstration des théorèmes A, B, C.

**I. UNE INÉGALITÉ PRÉLIMINAIRE.** — Les lemmes A, B et C seront toujours utilisés par l'intermédiaire de l'inégalité en question.

Soit une solution du problème des régimes permanents,  $u_i(x)$ , régulière dans un domaine borné  $\Pi$ ;  $r$  étant la distance d'un point quelconque de l'espace,  $x$ , à un point  $\gamma$  de  $\Pi$  et  $\gamma_i(x)$  ayant la même signification qu'au chapitre précédent nous avons l'identité

$$(1) \quad \begin{aligned} & \iiint_{\Pi} [u_i(\gamma) - \gamma_i(\gamma)] [u_i(\gamma) - \gamma_i(\gamma)] \frac{1}{r^2} \delta\gamma \\ &= -\gamma \iiint_{\Pi} [u_i(\gamma) - \gamma_i(\gamma)] \frac{\partial [u_i - \gamma_i]}{\partial \gamma_k} \frac{\gamma_k - x_k}{r^2} \delta\gamma. \end{aligned}$$

D'où, en appliquant l'inégalité de Schwarz au second membre, l'inégalité annoncée

$$(2) \quad \begin{aligned} & \iiint_{\Pi} [u_i(\gamma) - \gamma_i(\gamma)] [u_i(\gamma) - \gamma_i(\gamma)] \frac{1}{r^2} \delta\gamma \\ & \leq \gamma \iiint_{\Pi} \frac{\partial [u_i - \gamma_i]}{\partial \gamma_k} \frac{\partial [u_i - \gamma_i]}{\partial \gamma_k} \delta\gamma. \end{aligned}$$

Soit maintenant une solution du problème des régimes permanents,  $u_i(x)$ , régulière dans un domaine infini  $\Pi$ . Sur toute portion bornée  $\omega_0$  de  $\Pi$  cette solution  $u_i(x)$  est limite uniforme de solutions  $u_i^*(x)$  régulières dans des domaines bornés  $\Pi^*$ , qui tendent vers  $\Pi$ ; nous avons.

dès que  $\Pi^*$  contient tous les points où  $\gamma_i(x) = a_i(x)$  :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Pi^*} [u_i^*(y) - \gamma_i(y)][u_i^*(y) - \gamma_i(y)] \frac{1}{r^2} \delta y \\ & \leq 4 \iiint_{\Pi^*} \frac{\partial[u_i^* - \gamma_i]}{\partial y_k} \frac{\partial[u_i^* - \gamma_i]}{\partial y_k} \delta y. \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme B le second membre de cette dernière inégalité reste borné; donc l'intégrale

$$\iiint_{\Pi^*} [u_i(y) - \gamma_i(y)][u_i(y) - \gamma_i(y)] \frac{1}{r^2} \delta y$$

est inférieure à une borne indépendante de  $\omega_0$ , autrement dit l'intégrale

$$(3) \quad \iiint_{\Pi} [u_i(y) - \gamma_i(y)][u_i(y) - \gamma_i(y)] \frac{1}{r^2} \delta y$$

converge.

Mais on peut obtenir un résultat plus précis : soit  $S$  une sphère de centre  $x$ , dont le rayon  $R$  augmente indéfiniment; soit  $V$  la portion de  $\Pi$  intérieure à  $S$ ; nous avons

$$\begin{aligned} (4) \quad & \iiint_V [u_i(y) - \gamma_i(y)][u_i(y) - \gamma_i(y)] \frac{1}{r^2} \delta y \\ & - \iint_S [u_i(y) - \gamma_i(y)][u_i(y) - \gamma_i(y)] \frac{y_k - x_k}{r^2} dy_k \\ & = -2 \iiint_V [u_i(y) - \gamma_i(y)] \frac{\partial[u_i - \gamma_i]}{\partial y_k} \frac{y_k - x_k}{r^2} \delta y. \end{aligned}$$

Soit  $\Psi(R)$  l'intégrale de volume qui figure au premier membre de (4). L'intégrale de surface vaut  $R\Psi'(R)$ .  $\Psi(R)$  est une fonction bornée et croissante. Donc il existe une suite de valeurs de  $R$ , augmentant indéfiniment, et pour lesquelles  $R\Psi'(R)$  tend vers zéro. D'autre part l'inégalité de Schwarz appliquée au second membre de (4) donne

$$\begin{aligned} & \left[ \iiint_V [u_i(y) - \gamma_i(y)][u_i(y) - \gamma_i(y)] \frac{1}{r^2} \delta y - R\Psi'(R) \right]^2 \\ & \leq 4 \iiint_V [u_i(y) - \gamma_i(y)] [u_i(y) - \gamma_i(y)] \frac{1}{r^2} \delta y \\ & \quad \times \iiint_V \frac{\partial[u_i - \gamma_i]}{\partial y_k} \frac{\partial[u_i - \gamma_i]}{\partial y_k} \delta y. \end{aligned}$$

On obtient à la limite l'inégalité (2).

L'inégalité (2) est donc applicable aux domaines  $\Pi$  bornés et aux domaines  $\Pi$  non bornés. Cette inégalité vaut dans le cas d'espaces à plus de trois dimensions, sous la seule réserve de remplacer par un autre nombre le coefficient 4. Mais si l'espace est à deux dimensions son premier membre n'a plus aucun sens.

**2. LES INÉGALITÉS PRÉLIMINAIRES RELATIVES AU PROBLÈME A DEUX DIMENSIONS.**

— Soit  $x$  un point extérieur à  $\Pi$  et soit  $\Lambda$  sa plus courte distance à  $\Sigma$ .

Nous avons :

$$(5) \quad \iint_{\Pi} [u_i(y) - \gamma_i(y)][u_i(y) - \gamma_i(y)] \frac{1}{r^2 \left(\log \frac{r}{\Lambda}\right)^2} \partial y \\ \leq 4 \iint_{\Pi} \frac{\partial [u_i - \gamma_i]}{\partial y_k} \frac{\partial [u_i - \gamma_i]}{\partial y_k} \partial y.$$

La démonstration en est analogue à la précédente; indiquons seulement que la fonction bornée et croissante,  $\Psi(R)$  a maintenant pour expression :

$$\iint_{\Sigma} [u_i(y) - \gamma_i(y)][u_i(y) - \gamma_i(y)] \frac{1}{r^2 \left(\log \frac{r}{\Lambda}\right)^2} \partial y.$$

et que le rôle de l'intégrale de surface qui figure dans (4) est joué par l'intégrale curviligne

$$\oint_{\Sigma} [u_i(y) - \gamma_i(y)][u_i(y) - \gamma_i(y)] \frac{(y_1 - x_1) dy_2 - (y_2 - x_2) dy_1}{r^2 \log \frac{r}{\Lambda}} \\ = \Psi(R) R \log \frac{R}{\Lambda}.$$

Mais il convient d'adjoindre une seconde inégalité à l'inégalité (5): soit  $\omega_0$  une portion bornée du domaine  $\Pi$ , et soit  $x$  un point intérieur. Désignons par  $\Lambda_0$  le plus grand diamètre de  $\omega_0$  et par  $\omega'$  la portion de  $\Pi$  distante de  $x$  de moins de  $2\Lambda_0$ ; si la fonction  $v(y)$  s'annule sur la frontière de  $\omega'$  nous avons :

$$\iint_{\omega'} v^2(y) \frac{1}{r^2 \left(\log \frac{r}{\Lambda}\right)^2} \partial y \leq 4 \iint_{\omega'} \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial v}{\partial y_k} \partial y.$$

Appliquons ce résultat aux fonctions

$$v(r) = [u_i(r) - \gamma_i(r)][r^2 - 4A_0^2]$$

et tenons compte de ce que (5) nous fournit une majorante de l'intégrale

$$\iint_{\sigma_0}^{\dots} [u_i(r) - \gamma_i(r)][u_i(r) - \gamma_i(r)] \delta v;$$

on obtient finalement une inégalité de la forme

$$(6) \quad \iint_{\sigma_0}^{\dots} [u_i(r) - \gamma_i(r)][u_i(r) - \gamma_i(r)] \frac{1}{r^2 \left(\log \frac{r}{3A_0}\right)^2} \delta v \\ < B_0 \iint_{\Pi} \frac{\partial [u_i - \gamma_i]}{\partial r_i} \frac{\partial [u_i - \gamma_i]}{\partial r_i} \delta v.$$

$B_0$  est une constante qui dépend de  $\sigma_0$  et de  $\Pi$ .

5. L'inégalité (2) va nous permettre de déduire les théorèmes A, B, C des lemmes A, B, C, l'espace étant supposé à trois dimensions. Considérons les ensembles des fonctions  $u_i(x)$  envisagés par les énoncés de ces trois théorèmes : nous allons les étudier sur un domaine borné  $\sigma$  ; dans le cas du théorème A  $\sigma$ , sera le domaine  $\Pi$  lui-même ; dans les cas B et C ce sera la portion de  $\Pi$  intérieure à une sphère  $\sigma$ , arbitrairement grande, et qui contient  $\Sigma$  à son intérieur. Traçons quatre sphères concentriques à  $\sigma$ , de rayons croissants et supérieurs à celui de  $\sigma$  ;  $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ . Soient  $\sigma_2, \dots, \sigma_5$  les portions de  $\Pi$  respectivement intérieures à  $\sigma_2, \dots, \sigma_5$ . Dans le cas A  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_5$  coïncident avec  $\Pi$ .

D'après les lemmes A, B, C et l'inégalité (2) nous avons :

$$(7) \quad \iiint_{\sigma_2}^{\dots} \frac{\partial u_i}{\partial r_i} \frac{\partial u_i}{\partial r_i} \delta v < B;$$

$$(8) \quad \iiint_{\sigma_2}^{\dots} u_i(r) u_i(r) \frac{1}{r^2} \delta v < B.$$

On en déduit

$$(9) \quad \iiint_{\sigma_2}^{\dots} u_i(r) u_i(r) \delta v < B$$

et

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \iiint_{\omega_s} |u_k(y)| \left| \frac{\partial u_p(y)}{\partial y_k} \right| \frac{1}{r} \hat{q}v < B, \\ \iiint_{\omega_s} |u_k(y)| \frac{1}{r} \hat{q}v < B, \\ \iiint_{\omega_s} |u_k(y)| \frac{1}{r^2} \hat{q}v < B; \end{array} \right.$$

le symbole B représente au cours de ce paragraphe diverses quantités indépendantes de celle des fonctions  $u_i(x)$  que l'on envisage et de la position qu'occupe le point  $x$ . Soit d'autre part  $G_{ij}(x, y)$  le tenseur de Green relatif au domaine  $\omega_s$  et au système

$$\mu \Delta v_i - \frac{\partial q}{\partial x_i} = \rho X_i, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Nommons  $\mathfrak{F}_i(x)$  la solution de ce système, régulière dans  $\omega_s$ , et égale à  $u_i(x)$  sur sa frontière. Nous avons pour  $x$  intérieur à  $\omega_s$  [cf. formules (26) et (27) du premier Chapitre] :

$$(11) \quad u_i(x) = -\rho \iiint_{\omega_s} G_{is}(x, y) \left[ u_k(y) \frac{\partial u_p(y)}{\partial y_k} + \Lambda_{pk} u_k(y) \right] \hat{q}v + \mathfrak{F}_i(x),$$

$$(12) \quad \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} = -\rho \iiint_{\omega_s} \frac{\partial G_{is}(x, y)}{\partial x_j} \left[ u_k(y) \frac{\partial u_p(y)}{\partial y_k} + \Lambda_{pk} u_k(y) \right] \hat{q}v + \frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j}.$$

Or, d'après le Mémoire déjà cité de M. Odqvist :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} |G_{is}(x, y)| < \frac{B}{r}, \\ \left| \frac{\partial G_{is}(x, y)}{\partial x_j} \right| < \frac{B}{r^2}, \\ \left| \frac{\partial G_{is}(x, y)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{is}(x', y')}{\partial x_j} \right| < B \frac{r}{r_0^2}, \end{array} \right.$$

$r$  représente la distance de  $x$  à  $y$ ;  $r'$  celle de  $x$  à  $x'$ ;  $r_0$  est la plus courte des distances de  $y$  à  $x$  et à  $x'$ .

De (10) et de la première inégalité (13) résulte que l'intégrale figurant au second membre de (11) est inférieure en valeur absolue à une quantité B. On en déduit grâce à (9) :

$$\iiint_{\omega_s} \mathfrak{F}_i(x) \mathfrak{F}_i(x) \hat{q}v < B.$$

Par suite, pour tout domaine intérieur à  $\omega_3$ , on a des inégalités de la forme

$$(14) \quad |\mathfrak{F}_i(x)| < B, \quad \left| \frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j} \right| > B, \quad \left| \frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathfrak{F}_i(x')}{\partial x_j'} \right| B r^{\frac{1}{2}}.$$

— Cette dernière affirmation est trop voisine de propriétés classiques des fonctions harmoniques pour que nous la démontrions —. Mais il y a plus : sur  $\Sigma$   $\mathfrak{F}_i(x)$  coïncide avec un vecteur  $\alpha_i(x)$ ; or, par hypothèse les vecteurs  $\alpha_i(x)$  et ses vecteurs dérivés du premier et du second ordre, calculés en déplaçant  $x$  sur  $\Sigma$ , ont des longueurs bornées dans leur ensemble. Par suite les inégalités (14) valent dans le domaine  $\omega_3$ . Et puisque l'intégrale qui figure au second membre de (11) est bornée dans  $\omega_3$ , nous avons pour tous les points  $x$  de  $\omega_3$  et pour toutes les fonctions  $u_i(x)$  :

$$(15) \quad |u_i(x)| < B.$$

Tenons-en compte dans (12); il vient, pour  $x$  intérieur à  $\omega_3$ ,

$$(16) \quad \sum_{i,j} \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \right| < B \sum_{i,j} \iiint_{\omega_1} \left| \frac{\partial u_i(y)}{\partial x_j} \right| \frac{1}{r^2} \delta y < B.$$

Multiplions les deux membres de (16) par l'inverse du carré de la distance de  $x$  à un point fixe de  $\omega_2$  et intégrons; on obtient

$$(17) \quad \sum_{i,j} \iiint_{\omega_3} \left| \frac{\partial u_i(y)}{\partial x_j} \right| \frac{1}{r^2} \delta y < B \sum_{i,j} \iiint_{\omega_1} \left| \frac{\partial u_i(y)}{\partial x_j} \right| \frac{1}{r} \delta y < B.$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left[ \iiint_{\omega_1} \left| \frac{\partial u_i(y)}{\partial x_j} \right| \frac{1}{r} \delta y \right]^2 < B \iiint_{\omega_1} \left| \frac{\partial u_i(y)}{\partial x_j} \right|^2 \delta y \iiint_{\omega_1} \frac{1}{r^2} \delta y < B.$$

Donc,  $x$  étant intérieur à  $\omega_2$ , le premier membre de (17) reste inférieur à une quantité  $B$  et par suite celui de (16); nous avons pour tous les points  $x$  de  $\omega_2$  et pour toutes les fonctions  $u_i(x)$

$$(18) \quad \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \right| < B.$$

Tenons compte dans (12) des inégalités (13), (15), (18) et (10); il

vient, pour  $x$  et  $x'$  intérieurs à  $\varpi_1$ ,

$$\left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i(x')}{\partial x_j} \right| < B \iiint_{\varpi_2} \left| \frac{\partial G_{ij}(x, y)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{ij}(x', y)}{\partial x_j} \right| \delta y + Br^{1/2}.$$

D'où

$$(19) \quad \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i(x')}{\partial x_j} \right| < Br^{1/2}.$$

La validité des relations (15), (18) et (19) pour tous les points  $x$  et  $x'$  de  $\varpi_1$  et pour toutes les fonctions  $u_i(x)$  entraîne l'exactitude des théorèmes A, B et C.

Le cas d'un espace à deux dimensions se traite aussi aisément, à partir des inégalité (5) et (6).

Et tous les résultats annoncés au premier Chapitre se trouvent enfin démontrés.

**4. REMARQUE IMPORTANTE.** — Pour ce qui est des espaces à plus de trois dimensions les inégalités (13) doivent être remplacées par d'autres dans lesquelles les exposants de  $r$  et de  $R$  sont plus élevés; et je n'ai pas réussi à déduire les théorèmes A, B, C des lemmes A, B, C. Je ne sais si les résultats énoncés au premier Chapitre sont également applicables aux régimes permanents des liquides visqueux à plus de trois dimensions. Le nombre de dimensions de l'espace joue donc un rôle essentiel en ce qui concerne les problèmes de l'Hydrodynamique, alors que son influence est secondaire dans toute la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires.

## II. — Allure d'un régime permanent aux points à l'infini.

**3. GÉNÉRALITÉS.** — Soit un régime permanent  $u_i(x)$  régulier dans un domaine  $\Pi$  infini, à trois dimensions. D'après le paragraphe 1 les intégrales

$$J = \iiint_{\Pi} \left[ \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} \right] \left[ \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} \right] \delta x$$

$$I(x) = \iiint_{\Pi} [u_i(y) - a_i(y)] [u_i(y) - a_i(y)] \frac{1}{r^2} \delta y$$

sont convergentes. Il n'en résulte pas que  $u_i(x) - a_i(x)$  tende vers zéro quand  $x$  s'éloigne indéfiniment. Mais considérons une sphère  $S$ , ayant pour centre le point fixe  $x$  et dont le rayon  $R$  augmente indéfiniment; soit  $E(\varepsilon)$  l'ensemble des valeurs de  $R$  telles que la moyenne de  $[u_i(x) - a_i(x)][u_i(x) - a_i(x)]$  sur  $S$  surpasse  $\varepsilon$ ; on a

$$4\pi\varepsilon \int_{E(\varepsilon)} dR < I(x).$$

Il semble peu probable qu'on puisse énoncer d'autres résultats quand  $a_i(x)$  est nul et que  $A_{ik}$  est un tenseur symétrique gauche dont les composantes satisfont des conditions de Hölder sur tout domaine borné, mais se comportent arbitrairement à l'infini. Toutefois l'hypothèse que les  $A_{ik}$  sont des constantes ne permet peut-être pas, en général, d'obtenir des résultats plus précis.

Envisageons maintenant le problème à deux dimensions: l'intégrale

$$J = \iint_{\Pi} \left[ \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} \right] \left[ \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} \right]$$

est convergente; et si  $x$  est un point extérieur à  $\Pi$ , dont la plus courte distance à  $\Pi$  est  $\Lambda$ , l'intégrale

$$I(x) = \iint_{\Pi} [u_i(y) - a_i(y)][u_i(y) - a_i(y)] \frac{1}{r^2 \left( \log \frac{2r}{\Lambda} \right)^2} dy$$

est également convergente. Soit  $S$  une circonférence de centre  $x$  et dont le rayon  $R$  augmente indéfiniment; soit  $E(\varepsilon)$  l'ensemble des valeurs de  $R$  pour lesquelles la moyenne de  $[u_i(x) - a_i(x)][u_i(x) - a_i(x)]$ , prise le long de  $S$  surpasse  $\varepsilon$ ; nous avons

$$3\pi\varepsilon \int_{E(\varepsilon)} \frac{dR}{R \left[ \log \frac{2R}{\Lambda} \right]^2} < I(x);$$

mais l'intégrale

$$\int_{\Lambda}^{\infty} \frac{dR}{R \left( \log \frac{2R}{\Lambda} \right)^2}$$

est convergente, et contrairement au cas de trois dimensions la proposition que nous venons d'énoncer ne suffit plus à différencier les solutions du problème qui correspondent à des fonctions  $a_i(x)$  dont les différences sont des constantes. Nous ne devons pas nous en étonner : pour  $\varphi = 0$  ces solutions sont identiques (paradoxe de Stokes).

6. EXAMEN D'UN CAS PARTICULIER :  $a_i(x) = 0$ ,  $A_{ik} = 0$ ; l'espace a trois dimensions. — Commençons par établir une *formule importante*  $x$  étant un point arbitraire de  $\Pi$ , représentons par  $R$ ,  $S$  et  $V$  les mêmes éléments géométriques qu'au paragraphe 1. Introduisons les fonctions :

$$\begin{aligned} T_{ij}(r) &= \frac{1}{8\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{r^3} \right]; \\ P_i(r) &= \frac{1}{4\pi} \frac{y_i - x_i}{r^3}; \\ T_{ij}^*(r) &= \frac{1}{8\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{ij}}{R^3} (3R^2 - 3r^2) + \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{R^3} \right]; \\ P_i^*(r) &= \frac{3}{4\pi} \frac{y_i - x_i}{R^3}; \\ \delta_{ij} &= 0 \text{ pour } i \neq j, \quad \delta_{ij} = 1 \text{ pour } i = j; \\ T_{ij}^*(r) &= T_{ij}(r) - T_{ij}(r); \quad P_i^*(r) = P_i(r) - P_i(r); \\ T_{ij}^{**}(r) &\text{ est nul sur } V \end{aligned}$$

et

$$\mu \frac{\partial^2 T_{ij}^*(r)}{\partial y_k \partial y_k} = \frac{\partial P_i^*(r)}{\partial y_i}; \quad \frac{\partial T_{ij}^*(r)}{\partial y_j} = 0.$$

Un calcul classique nous donne :

$$\begin{aligned} (20) \quad u_i(x) &= -\rho \iiint_V T_{ij}^*(r) u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} \delta y \\ &+ \iint_{\Sigma} T_{ij}^*(r) \left[ \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \right) - p \delta_{kk} \right] \delta y_k \\ &- \iint_{\Sigma+\Sigma'} \left[ \mu \left( \frac{\partial T_{ij}^*}{\partial y_k} + \frac{\partial T_{ik}^*}{\partial y_j} \right) - P_i^* \delta_{ik} \right] u_j(y) \delta y_k; \end{aligned}$$

$R$  augmente indéfiniment ; l'intégrale

$$-\rho \iiint_V T_{ij}(r) u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} \delta y$$

tend vers l'intégrale absolument convergente

$$(21) \quad v_i(x) = -\rho \iiint_{\Omega} T_{ij}(y) u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} \delta y.$$

Puisque  $T'_{ij}(y)$ ,  $\frac{\partial T'_{ij}(y)}{\partial y_k}$  et  $P'_i(y)$  tendent vers zéro, la quantité.

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Sigma} T''_{ij}(y) \left[ \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \right) - p \delta_{jk} \right] \delta y_k \\ & - \iiint_{\Sigma} \left[ \mu \left( \frac{\partial T''_{ij}}{\partial y_k} + \frac{\partial T''_{ik}}{\partial y_j} \right) - P''_i \delta_{jk} \right] u_j(y) \delta y_k \end{aligned}$$

tend vers une limite  $w_i(x)$  dont nous noterons les propriétés suivantes :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_i(x) \text{ est solution du système : } \Delta w_i(x) - \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0; \text{ quand } x \\ \text{s'éloigne indéfiniment, } w_i(x), \frac{\partial w_i(x)}{\partial x_j} \text{ et } q(x) \text{ tendent vers zéro respec-} \\ \text{tivement comme } (x_k x_k)^{-\frac{1}{2}}, (x_k x_k)^{-1} \text{ et } (x_k x_k)^{-1}. \end{array} \right.$$

Donc  $u_i(x) = v_i(x) + w_i(x) + \lim \theta_i(R)$ , en posant

$$\begin{aligned} \theta_i(R) = & +\rho \iiint_{\mathcal{V}} T_{ij}(y) u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} \delta y \\ & - \iiint_{\mathcal{S}} \left[ \mu \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_k} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial y_j} \right) - P_i \delta_{jk} \right] u_j \delta y_k. \end{aligned}$$

Nous avons,  $C$  représentant une quantité positive indépendante de  $R$ ,

$$C |\theta_i(R)| < \frac{1}{R} \iiint_{\mathcal{V}} |u_k(y)| \left| \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} \right| \delta y + \frac{1}{R^2} \sum_j \iiint_{\mathcal{S}} |u_j(y)| \frac{y_k - x_k}{R} \delta y_k.$$

Il en résulte que l'intégrale

$$\int_{R_0}^{\infty} R^{-1} |\theta_i(R)| dR$$

est convergente : la convergence de l'intégrale

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{dR}{R^2} \iiint_{\mathcal{V}} |u_k(y)| \left| \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} \right| \delta y$$

s'établit en intervertissant l'ordre des deux intégrations, puis en utilisant la convergence de l'intégrale

$$\iiint_{\Pi} \frac{1}{r} |u_k(v)| \left| \frac{\partial u_j(v)}{\partial v_k} \right| \delta v.$$

Quant à l'intégrale

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{dR}{R^3} \iint_{\Sigma} |u_j(v)| \frac{v_k - x_k}{R} \delta v_k,$$

elle peut s'écrire

$$\iiint_{R_0 < r} |u_j(v)| \frac{1}{r^3} \delta v;$$

or d'après l'inégalité de Schwarz le carré de cette dernière expression est inférieur à la quantité finie :

$$\iiint_{R_0 < r} |u_j(v)|^2 \frac{1}{r^2} \delta v \iiint_{R_0 < r} \frac{1}{r^3} \delta v.$$

La convergence, ainsi établie, de l'expression

$$\int_{R_0}^{\infty} R^{-1} |\mathcal{G}_i(R)| dR$$

prouve l'existence d'une suite de valeurs de  $R$  faisant tendre  $\theta_i(r)$  vers zéro.

On a dès lors

$$(23) \quad u_i(x) = v_i(x) + w_i(x),$$

$v_i(x)$  est parfaitement déterminé par les relations (21);  $w_i(x)$  l'est par les conditions (22) et par la condition de satisfaire sur  $\Sigma$  la relation (23).

### 7. Indiquons deux applications de la formule (23).

Divisons, par exemple à l'aide d'une sphère, le domaine  $\Pi$  en deux portions  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ , la seconde étant bornée :

$$\begin{aligned} v_i(x) = & - \rho \iiint_{\Pi_1} T_{ij}(v) u_k(v) \frac{\partial u_j(v)}{\partial v_k} \delta v \\ & - \rho \iiint_{\Pi_2} T_{ij}(v) u_k(v) \frac{\partial u_j(v)}{\partial v_k} \delta v. \end{aligned}$$

Or,

$$\left[ \rho \iiint_{\Pi_1} T_{ij}(y) u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} \delta y \right]^2 \\ < \left( \frac{\rho}{4\pi\mu} \right)^2 \iiint_{\Pi} u_j(y) u_j(y) \frac{1}{r^2} \delta y \iiint_{\Pi_1} \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \delta y$$

On peut choisir  $\Pi_2$  tel que

$$\iiint_{\Pi_1} \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \delta y$$

soit arbitrairement faible; la fonction

$$I(x) = \iiint_{\Pi} u_j(y) u_j(y) \frac{1}{r^2} \delta y$$

est bornée sur  $\Pi$ . Donc on peut choisir  $\Pi_2$  tel que

$$\left| \rho \iiint_{\Pi_1} T_{ij}(y) u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} \delta y \right| < \tau_0,$$

$\tau_0$  étant une quantité positive donnée arbitrairement. Ceci fait, éloignons indéfiniment le point  $x$ ; l'intégrale

$$\rho \iiint_{\Pi_2} T_{ij}(y) u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} \delta y$$

tend vers zéro comme  $(x_k x_k)^{-\frac{1}{2}}$ .

Donc  $|u_i(x)| < 2\tau_0$  pour tous les points  $x$  situés hors d'une sphère appropriée, qui contient  $\Pi_2$ . Autrement dit  $u_i(x)$  tend vers zéro quand  $x$  s'éloigne indéfiniment.

Donnons la deuxième application de la formule (23). Supposons les dérivées  $\alpha_i(x)$  proportionnelles à un paramètre  $h$  qui tend vers zéro. D'après le paragraphe 14 du second Chapitre J tend vers zéro. Donc d'après la formule (2) du présent chapitre la fonction  $I(x)$  tend uniformément vers zéro dans  $\Pi$ . Il en est de même pour  $v_i(x)$  et  $w_i(x)$ :  $u_i(x)$  tend uniformément vers zéro dans le domaine  $\Pi$ . Il est d'ailleurs aisé de préciser que le maximum de  $v_i(x)$  tend vers zéro au moins aussi rapidement que  $h^2$ ; et par suite  $w_i(x)$  est un infiniment petit de l'ordre de  $h$ .

III. — Remarques sur les écoulements non permanents.

8. Donnons-nous un domaine borné  $\Pi(t)$  variable avec le temps  $t$ . Il serait intéressant de savoir s'il existe toujours des fonctions  $u_i(x, t)$ ,  $p(x, t)$  définies dans le domaine  $\Pi(t)$  pour toute valeur positive de  $t$  et satisfaisant les conditions suivantes :

$$(24) \quad \mu \Delta u_i - \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0;$$

les  $u_i(x, t)$  ont des valeurs données  $u_i(x, 0)$  pour  $t = 0$  et prennent des valeurs imposées  $\alpha_i(x, t)$  sur la frontière  $\Sigma(t)$  de  $\Pi(t)$ ; on suppose naturellement

$$\frac{\partial u_k(x, 0)}{\partial x_k} = 0 \quad \text{et} \quad \iint_{\Sigma(t)} \alpha_i(x, t) \delta x_i = 0.$$

La relation fondamentale (8) du second Chapitre est valable, à condition d'y remplacer  $X_i$  par  $-\frac{\partial u_i}{\partial t}$ , puis d'y annuler  $\Lambda_{ik}$  et  $a(x)$ ; pour l'utiliser, introduisons les notations suivantes :

$$I(t) = \iiint_{\Pi(t)} u_i(x, t) \delta x_i, \\ J(t) = \iiint_{\Pi(t)} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k} \delta x;$$

le symbole  $\Lambda(t)$  représentera diverses fonctions continues de  $t$ , dépendant de  $\Pi(t)$ , de  $\alpha_i(x, t)$  et de  $u_i(x, 0)$ , mais indépendantes de  $\mu$  et de  $\rho$ ; choisissons une fois pour toutes  $\gamma_i(x, t)$ , en sorte que

$$|\gamma_i(x, t)| < \Lambda(t), \quad \left| \frac{\partial \gamma_i(x, t)}{\partial x_i} \right| < \Lambda(t), \quad \left| \frac{\partial \gamma_i(x, t)}{\partial t} \right| < \Lambda(t);$$

on déduit bien aisément de cette relation fondamentale l'inégalité

$$\rho \iiint_{\Pi(t)} \frac{\partial}{\partial t} [(u_i - \gamma_i)(u_i - \gamma_i)] \delta x + \mu J(t) \leq \rho \Lambda(t) I(t) + (\mu + \rho) \Lambda(t).$$

D'où

$$\rho I(t) + \mu \int_0^t J(t') dt' \leq \rho \int_0^t \Lambda(t') I(t') dt' + (\mu + \rho) \Lambda(t),$$

Et finalement

$$(25) \quad \mathbf{I}(t) < \frac{\mu + 2}{\rho} \Lambda(t), \quad \int_0^t \mathbf{J}(t') dt' < \frac{(\mu + 2)}{\mu} \Lambda(t).$$

Dans le cas très particulier où  $\alpha_i(x, t) = 0$ , on a plus exactement

$$\rho \mathbf{I}(t) + 2\mu \int_0^t \mathbf{J}(t') dt' = \rho \mathbf{I}(0).$$

Il me semble peu probable qu'on puisse déduire des deux inégalités (25) la régularité du mouvement pour toutes les valeurs positives de  $t$ .

Supposons que le mouvement cesse d'être régulier à l'époque  $t_0$ ; faisons tendre  $t$ , en croissant vers  $t_0$ ; alors les fonctions  $u_i(x, t)$  convergent faiblement en moyenne vers des fonctions  $u_i(x, t_0)$ , de carrés sommables sur  $\Pi(t_0)$ ; mais ces fonctions sont peut-être trop irrégulières pour qu'aucune méthode d'approximations successives permette de définir les  $u_i(x, t)$  quand  $t$  surpasse  $t_0$ .

9. Les tentatives que j'ai faites pour démontrer que ces fonctions  $u_i(x, t_0)$  sont bornées ont attiré mon attention sur les solutions du système (24) régulières dans tout l'espace, et de la forme

$$u_i(x, t) = \lambda(t) U_i[\lambda(t)x].$$

$\lambda(t)x$  étant le point de coordonnées  $\lambda(t)x_i$ . On constate que  $U_i(x)$  doit satisfaire le système, où  $\alpha$  représente une constante arbitraire

$$(26) \quad \mu \Delta U_i - \alpha \rho \left[ U_i + x_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] - \frac{\partial P}{\partial x_i} = \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0$$

et que

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha(t - t_0)}}.$$

Si ce système admet des solutions non identiquement nulles,  $\alpha$  est sûrement positif, dès que le nombre  $n$  des dimensions de l'espace dépasse 2. En effet,  $\Pi$  désignant l'espace tout entier, nous avons

$$\iiint_{\Pi} U_i \left[ \mu \Delta U_i - \alpha \rho U_i - \alpha \rho x_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] \delta x = 0$$

D'où, par une intégration par parties, et moyennant des hypothèses supplémentaires concernant l'allure à l'infini des fonctions  $U_i(x)$  et  $P(x)$ ,

$$-\mu \iiint_{\Pi} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \delta x + \frac{1}{3} \rho (n-2) \iiint_{\Pi} U_i U_i \delta x = 0.$$

Dès lors les fonctions

$$u_i(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha(t-t_0)}} U_i\left(\frac{x}{\sqrt{1-2\alpha(t-t_0)}}\right)$$

définiraient un mouvement, régulier pour  $t < t_0$ , qui deviendrait irrégulier quand  $t$  tendrait vers  $t_0$ . On aurait d'ailleurs  $u_i(x, t_0) = 0$ ; et le mouvement pourrait être défini pour  $t > t_0$ : ce serait le repos.

**10.** La difficulté signalée au paragraphe 8 est de même nature que celle qui nous a empêché de déduire les théorèmes A, B, C des lemmes A, B, C, dans le cas d'un espace à plus de trois dimensions. Elle nous interdit de compléter l'étude des régimes permanents par une étude similaire des régimes quasi périodiques ou presque périodiques, parmi lesquels se trouvent vraisemblablement les régimes stables qui correspondent aux phénomènes réels.

Pourtant il n'est pas impossible de la tourner: un premier procédé consisterait à modifier les équations de l'Hydrodynamique, en y renforçant l'effet des forces de viscosité: il est raisonnable d'admettre que la régularité du mouvement devient certaine quand le coefficient de viscosité  $\mu$  cesse d'être une constante dès que la quantité scalaire

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

dépasse une certaine limite L, pour être alors une fonction rapidement croissante de cette quantité scalaire.

Les équations de Navier doivent maintenant s'écrire:

$$(27) \quad \frac{d}{dx_k} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] - \rho \frac{du_i}{dt} - \frac{dp}{dx_i} = \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0;$$

ce sont les quantités

$$I(t) = \iiint_{\Pi, t} u_i(x, t) u_i(x, t) \delta x$$

et

$$\int_0^t dt \iiint_{\Pi(t)} \mu \left[ \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_i} \right] \left[ \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_i} \right] \delta x$$

qui restent inférieures à certaines fonctions continues  $A(t)$ . La démonstration de la régularité exigerait une étude très longue; et celle-ci terminée la question se poserait de chercher comment se comportent les solutions  $u_i(x, t)$  ainsi construites quand la quantité  $L$  augmente indéfiniment.

Démontrer que ces solutions convergent uniformément vers une limite serait aussi difficile que de démontrer directement la régularité et l'unicité des solutions de (24), ce à quoi nous avons renoncé. Mais les intégrales  $I(t)$  et  $\int_0^t J(t) dt$  restent inférieures à une fonction  $A(t)$  indépendantes de  $L$ ; et sur tout le domaine à quatre dimensions engendré par  $\Pi(t)$  les fonctions  $u_i(x, t)$  et  $\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j}$  convergent donc faiblement en moyenne vers une ou plusieurs limites,  $U_i(x, t)$  et  $U_{i,j}(x, t)$ , qu'il convient d'étudier. Ces limites satisfont certaines relations intégrales, que vérifie d'ailleurs toute solution régulière de (24). Il n'y aurait pas lieu de considérer les fonctions  $U_i(x, t)$  et  $U_{i,j}(x, t)$  comme dénuées de sens physique, même si elles présentaient les plus grandes irrégularités : les composantes de la vitesse d'un liquide sont définies par un passage à la limite, celui d'un milieu discontinu, constitué d'un grand nombre de molécules, à celui d'un milieu continu; ce passage à la limite ne peut-il justement présenter les mêmes difficultés que le passage à la limite que nous venons d'effectuer en faisant augmenter  $L$  indéfiniment ?

Il n'est pas paradoxal de supposer qu'il conduise à des fonctions  $U_i(x, t)$  irrégulières et indéterminées. Au cas où les fonctions  $U_i(x, t)$ ,  $U_{i,j}(x, t)$  ne coïncideraient effectivement pas avec une solution régulière de (24), nous proposons de dire que ces fonctions constituent « une solution turbulente » de ce système.

*Remarques.* — Le procédé que nous venons de décrire peut être transposé à l'étude des régimes quasi périodiques ou presque périodiques et des régimes permanents des espaces à plus de trois dimensions; il est analogue à celui par lequel nous avons abordé les régimes

permanents réguliers dans des domaines  $\Pi$  infinis. Et c'est par un tel procédé que l'on a déjà souvent cherché à élucider la question des liquides parfaits : on les considère comme liquides à coefficient de viscosité évanescant; quand  $\mu$  tend vers zéro la fonction  $I(t)$  reste inférieure à une fonction continue  $A(t)$ ; on est donc assuré que les composantes de la vitesse des solutions, régulières ou turbulentes, de (24) convergent faiblement en moyenne vers des limites, dont il reste à préciser les propriétés. Ainsi les difficultés relatives aux liquides à coefficient de viscosité constant sont analogues à ces difficultés, signalées depuis longtemps, que présentent les liquides parfaits.

II. Il est préférable de donner, des « solutions turbulentes », non une définition constructive et assez arbitraire, comme la précédente, mais une définition descriptive consistant en un système de conditions imposées aux fonctions  $U_i(x, t)$  et  $U_{ij}(x, t)$ . La considération des équations (27) ne sert plus dès lors qu'à montrer l'existence d'au moins une solution, régulière ou turbulente, des équations (24). Mais on peut établir ce théorème d'existence à l'aide de systèmes plus simples que (27), voisins de (24) et n'ayant plus nécessairement de signification hydrodynamique : on fait tendre ces systèmes vers (24) et l'on prouve que leurs solutions ont au moins une limite, qui est une solution de (24), régulière ou turbulente. C'est un tel procédé d'étude que nous utiliserons effectivement au cours de deux autres Mémoires : l'un étudiera un liquide à deux dimensions, enfermé dans des parois; l'autre un liquide illimité à trois dimensions.

Si le liquide est à deux dimensions et s'il est illimité, l'existence d'une solution régulière est d'ailleurs assurée, et même le passage au cas d'un liquide parfait s'effectue sans difficulté : les démonstrations seront le sujet d'un quatrième Mémoire; elle sont basées sur les propriétés du tourbillon découvertes par Helmholtz. Dès qu'existent des parois ces propriétés sont inutilisables; et nous ne disposons plus que des inégalités (25) dont l'origine est la relation de dissipation de l'énergie; aussi est-il intéressant d'établir que la régularité des mouvements plans d'un liquide visqueux illimité résulte des seules propriétés de (24) qui permettent d'établir la relation de dissipation de l'énergie; tel est l'objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE IV.

## MOUVEMENTS PLANS D'UN LIQUIDE VISQUEUX ILLIMITÉ.

**I. SOMMAIRE.** — Les mouvements d'un liquide plan, de viscosité  $\mu$  et de densité  $\rho$ , sont régis par les équations de Navier :

$$(1) \quad \begin{cases} \mu \Delta u_i(x, t) - \rho \frac{d u_i(x, t)}{dt} - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} = \rho u_k(x, t) \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_k} = 0 \quad (i, k=1, 2). \end{cases}$$

On peut les mettre sous la forme équivalente, où  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  :

$$(2) \quad \begin{cases} \nu \Delta u_i(x, t) - \frac{d u_i(x, t)}{dt} - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x_i} = \left[ \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_i} \right] u_k(x, t), \\ \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_k} = 0. \end{cases}$$

$x$  est un point d'un plan  $\Pi$ ; ses deux coordonnées sont  $x_i$ ; l'élément d'aire qu'il engendre sera nommé  $\hat{x}$ .

Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^2(t) &= \iint_{\Pi} u_i(x, t) \cdot u_i(x, t) \hat{x}, \\ \mathfrak{J}^2(t) &= \iint_{\Pi} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k} \hat{x}, \end{aligned}$$

et soit  $\mathfrak{V}(t)$  la plus grande longueur à l'instant  $t$  du vecteur vitesse  $u_i(x, t)$ .

Le liquide étant au repos à l'infini, une solution  $u_i(x, t)$  du système (1) sera dite régulière de l'époque  $t = t_1$  à l'époque  $t = t_2$  quand les fonctions  $\mathcal{J}(t)$ ,  $\mathfrak{J}(t)$ ,  $\mathfrak{V}(t)$  seront bornées pour  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Nous nous proposons d'établir l'existence d'une solution régulière unique, définie pour  $t \geq 0$  et coïncidant à l'époque  $t = 0$  avec des données  $u_i(x, 0)$ .

Ces valeurs initiales sont continues ainsi que leurs dérivées premières;  $\mathcal{J}(0)$ ,  $\mathfrak{J}(0)$ ,  $\mathfrak{V}(0)$  sont bornées; enfin

$$\frac{\partial u_k(x, 0)}{\partial x_k} = 0.$$

La construction de cette solution s'effectuera suivant un mode classique (cf. Chap. I, § I) : une méthode d'approximations successives convenable nous permettra de la définir pour  $0 \leq t \leq T_1$  ; puis les quantités  $u_i(x, T_1)$  nous serviront de valeurs initiales et le même processus d'approximations successives fournira la solution pour  $T_1 \leq t \leq T_2$ , etc. La suite croissante  $0, T_1, T_2, T_3, \dots$  a une limite  $T_\infty$ , et la solution est construite pour  $0 \leq t < T_\infty$ . Or nous prouverons que  $T_\infty = +\infty$  en utilisant la propriété du second membre de (2) qui sert à établir la relation de dissipation de l'énergie, à savoir :

$$\left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] u_i u_k = 0.$$

Mais il est nécessaire d'étudier d'abord le système

$$(3) \quad \begin{cases} \nu \Delta u_i(x, t) - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x_i} = X_i(x, t), \\ \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_k} = 0. \end{cases}$$

Les fonctions  $X_i(x, t)$  sont supposées données; elles sont continues, dérivables, et

$$\mathcal{F}^2(t) = \iint_{\Omega} X_i(x, t) X_i(x, t) \delta x$$

reste inférieur, pour  $t \geq 0$ , à une fonction continue de  $t$ . La définition des solutions régulières étant la même pour le système (3) que pour le système (1), nous établirons un théorème d'existence ayant même énoncé.

*Remarque.* — Les coefficients numériques, autres que les exposants, qui figurent dans les diverses inégalités de ce chapitre jouent un rôle accessoire. Quant aux valeurs de ces exposants elles peuvent être prévues, le plus souvent, par de simples *considérations d'homogénéité*.

### I. — Étude préliminaire du système (3).

**2. PREMIER CAS PARTICULIER.** — Supposons  $X_i = 0$ . L'obtention d'une solution de (3) régulière pour  $t \geq 0$  et dont les valeurs sont données pour  $t = 0$  est aisée : on prend  $q(x, t) = 0$  et  $u_i(x, t)$  égal à la solution

de l'équation de la chaleur :

$$(4) \quad \nu \Delta w(x, t) - \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = 0$$

qui vaut  $u_i(x, 0)$  pour  $t = 0$

$$(5) \quad u_i(x, t) = \frac{1}{4\pi\nu t} \iint_{\Pi} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} u_i(y, 0) \hat{q}y;$$

$r$  est la distance du point  $x$  au point  $y$ .

De même  $\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j}$  est la solution de (4) qui vaut  $\frac{\partial u_i(x, 0)}{\partial x_j}$  pour  $t = 0$ .

Rappelons que le maximum à l'instant  $t$  d'une solution  $w(x, t)$  de (4) est une fonction décroissante de  $t$ , ainsi que l'intégrale

$$\iint_{\Pi} w^2(x, t) \hat{q}x.$$

Donc

$$(6) \quad \mathfrak{D}(t) \leq \mathfrak{D}(0), \quad \mathfrak{J}(t) \leq \mathfrak{J}(0), \quad \mathfrak{Q}(t) \leq \mathfrak{Q}(0).$$

*Remarque.* — Il est également possible de majorer  $\mathfrak{Q}(t)$  à l'aide des seules quantités  $\nu$  et  $\mathfrak{D}(0)$  : l'inégalité de Schwarz appliquée à (5) donne

$$u_i(x, t) u_i(x, t) \leq \frac{1}{16\pi^2\nu^2 t^2} \mathfrak{D}^2(0) \iint_{\Pi} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \hat{q}y,$$

c'est-à-dire

$$(7) \quad \mathfrak{Q}(t) \leq \frac{\mathfrak{D}(0)}{2\sqrt{2\pi\nu t}}.$$

**3. SECOND CAS PARTICULIER.** — Supposons maintenant le vecteur  $X_i(x, t)$  nul hors d'un domaine fini  $\omega$  du plan  $\Pi$ . M. Oseen a fait connaître une solution de (3) définie pour  $t \geq 0$ , nulle pour  $t = 0$  [*Acta mathematica*, t. 34; ou *Hydrodynamik*, Leipzig, 1927]; cette solution est de la forme

$$(8) \quad u_i(x, t) = \int_0^t dt' \iint_{\Pi} T_{ij}(x, y, t-t') X_j(y, t') \hat{q}y.$$

On a des inégalités :

$$|T_{ij}(x, y, t-t')| < \frac{\Lambda}{r^2 - t - t'}$$

et

$$\left| \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}(x, y, t-t') \right| < \frac{Ar}{(r^2+t-t')^2} \quad (t' < t);$$

A représente une quantité qui dépend de  $\nu$ .

Donc quand  $x$  s'éloigne indéfiniment  $u_i(x, t)$  tend vers zéro comme  $(x_k x_k)^{-1}$ ,  $\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j}$  comme  $(x_k x_k)^{-\frac{3}{2}}$ ; on constate de même que  $q(x, t)$  tend vers zéro comme  $(x_k x_k)^{-\frac{1}{2}}$ . Or on a, sur toute portion bornée  $\omega$  de  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} & \nu \int_0^t dt' \iint_{\omega} u_i(x, t') \Delta u_i(x, t') \delta x \\ & - \frac{1}{2} \iint_{\omega} u_i(x, t) u_i(x, t) \delta x - \int_0^t dt' \iint_{\omega} u_i(x, t') \frac{\partial q(x, t')}{\partial x_i} \delta x \\ & = \int_0^t dt' \iint_{\omega} u_i(x, t') X_i(x, t') \delta x. \end{aligned}$$

Intégrons par parties et faisons tendre  $\omega$  vers  $\Pi$ ; nous obtenons :

$$(9) \quad \nu \int_0^t \bar{J}^2(t') dt' + \frac{1}{2} J^2(t) = - \int_0^t dt' \iint_{\Pi} u_i(x, t') X_i(x, t') \delta x.$$

D'où

$$\nu \int_0^t \bar{J}^2(t') dt' + \frac{1}{2} J^2(t) \leq \int_0^t J(t') \bar{F}(t') dt'.$$

Or la solution de l'équation

$$\frac{1}{2} \bar{J}^2(t) = \int_0^t \bar{J}(t') \bar{F}(t') dt'$$

est

$$\bar{J}(t) = \int_0^t \bar{F}(t') dt'.$$

Nous avons donc

$$(10) \quad J(t) < \int_0^t \bar{F}(t') dt'.$$

Ce premier résultat acquis, considérons à nouveau la relation (8) : l'inégalité de Schwarz permet d'en déduire

$$|u_i(x, t)| < \int_0^t \bar{F}(t') dt' \sqrt{\iint_{\Pi} T_{ii}(x, y, t-t') T_{ii}(x, y, t-t') \delta y}.$$

Un calcul élémentaire donne

$$\iint_{\Pi} T_{ii}(x, y, t-t') T_{ii}(x, y, t-t') \delta y = \frac{1}{16\pi\nu(t-t')}.$$

Donc

$$(11) \quad \mathfrak{V}(t) < \frac{1}{4} \int_0^t \frac{\mathfrak{F}(t') dt'}{\sqrt{\pi\nu(t-t')}}.$$

4. Il reste à majorer  $\mathfrak{J}(t)$ . Posons

$$v_i(x, t, t') = \iint_{\Pi} T_{ij}(x, y, t-t') X_j(y, t') \delta y,$$

(8) s'écrit

$$u_i(x, t) = \int_0^t v_i(x, t, t') dt';$$

$$\mathfrak{J}^2(t) = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \iint_{\Pi} \frac{\partial v_i(x, t, t')}{\partial x_k} \frac{\partial v_i(x, t, t'')}{\partial x_k} \delta x.$$

Posons

$$K(t, t', t'') = \iint_{\Pi} \frac{\partial v_i(x, t, t')}{\partial x_k} \frac{\partial v_i(x, t, t'')}{\partial x_k} \delta x.$$

Nous avons

$$\mathfrak{J}^2(t) = \int_0^t \int_0^{t'} K(t, t', t'') dt' dt''.$$

Or le vecteur  $v_i(x, t, t'')$  satisfait l'équation de la chaleur

$$\nu \Delta v_i(x, t, t'') - \frac{\partial v_i(x, t, t'')}{\partial t} = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \nu K(t, t', t'') &= - \iint_{\Pi} \frac{\partial v_i(x, t, t'')}{\partial t} v_i(x, t, t') \delta x \\ &= - \iint_{\Pi} \iint_{\Pi} \frac{\partial v_i(x, t, t'')}{\partial t} T_{ij}(x, y, t-t') X_j(y, t') \delta x \delta y. \end{aligned}$$

Le vecteur  $\frac{\partial v_j(y, \tau, t'')}{\partial \tau}$  vérifie le système

$$\begin{aligned} \nu \Delta \left[ \frac{\partial v_j(y, \tau, t'')}{\partial \tau} \right] - \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial v_j(y, \tau, t'')}{\partial \tau} \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y_j} \left[ \frac{\partial v_j(y, \tau, t'')}{\partial \tau} \right] &= 0; \end{aligned}$$

d'après le Mémoire de M. Oseen déjà cité nous avons donc

$$\frac{\partial v_i(y, \tau, t')}{\partial \tau} = \iint_{\Pi} T_{ij}(x, y, \tau - t) \frac{\partial v_i(x, t, t')}{\partial t} \delta x \quad (\tau > t).$$

Prenons  $\tau = 2t - t'$ , il vient :

$$\begin{aligned} \nu K(t, t', t') &= - \iint_{\Pi} \frac{\partial v_i(y, 2t - t', t')}{\partial (2t - t')} X_j(y, t') \delta y \\ &= - \iint_{\Pi} \iint_{\Pi} X_i(x, t') \frac{\partial T_{ij}(x, y, 2t - t' - t')}{\partial (2t - t' - t')} X_j(y, t') \delta x \delta y. \end{aligned}$$

D'où

$$|K(t, t', t')| < \frac{1}{\nu} \iint_{\Pi} \iint_{\Pi} |X_i(x, t')| \left| \frac{\partial T_{ij}(x, y, 2t - t' - t')}{\partial (2t - t' - t')} \right| |X_j(y, t')| \delta x \delta y.$$

On a

$$\left| \frac{\partial T_{ij}(x, y, \theta)}{\partial \theta} \right| \leq \begin{cases} \frac{1}{4\pi\nu e\theta^2} e^{-\frac{r}{s\nu\theta}} & \text{pour } i \neq j, \\ \frac{1}{2\pi\nu e\theta^2} e^{-\frac{r}{s\nu\theta}} & \text{pour } i = j. \end{cases}$$

Puisque les fonctions

$$w_j(x, \theta) = \iint_{\Pi} \frac{1}{8\pi\nu\theta} e^{-\frac{r}{s\nu\theta}} |X_j(y, t')| \delta y$$

satisfont l'équation de la chaleur

$$2\nu \Delta w_j(x, \theta) - \frac{\partial w_j(x, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

et qu'elles coïncident avec  $|X_j(y, t')|$  pour  $\theta = 0$ ,

$$\iint_{\Pi} w_j^2(x, \theta) \delta x$$

est une fonction décroissante de  $\theta$  et

$$\iint_{\Pi} w_j^2(x, \theta) \delta x \leq \iint_{\Pi} X_j^2(x, t') \delta x.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |K(t, t', t')| &< \frac{2}{\nu e(2t - t' - t')} \iint_{\Pi} [2|X_1(x, t')| w_1(x, 2t - t' - t') \\ &\quad + 2|X_2| w_2 + |X_1| w_2 + |X_2| w_1] \delta x. \end{aligned}$$

Donc

$$|\mathbf{K}(t, t', t'')| < \frac{6}{2e(2t-t'-t'')} \bar{\mathfrak{F}}(t') \mathfrak{J}(t'').$$

Finalement

$$(12) \quad \mathfrak{J}^2(t) < \int_0^t \int_0^t \frac{6}{2e(2t-t'-t'')} \bar{\mathfrak{F}}(t') \bar{\mathfrak{F}}(t'') dt' dt''.$$

**3. CAS GÉNÉRAL.** — Ajoutons les deux solutions particulières du système (3) définies aux paragraphes 2 et 5. Nous obtenons une solution particulière de (3), égale pour  $t=0$  à des valeurs données  $u_i(x, 0)$ ; à savoir :

$$(13) \quad u_i(x, t) = \frac{1}{4\pi\gamma t} \iint_{\Pi} e^{-\frac{r^2}{4\gamma t}} u_i(x, 0) \delta y \\ + \int_0^t dt' \iint_{\Pi} \mathbf{T}_{ij}(x, y, t-t') \mathbf{X}_j(x, t') \delta y.$$

D'après (6), (10), (11) et (12), cette solution satisfait les inégalités

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{J}(t) \leq \mathfrak{J}(0) + \int_0^t \bar{\mathfrak{F}}(t') dt', \\ \mathfrak{J}(t) \leq \mathfrak{J}(0) + \sqrt{\int_0^t \int_0^t \frac{6}{2e(2t-t'-t'')} \bar{\mathfrak{F}}(t') \bar{\mathfrak{F}}(t'') dt' dt''} \\ < \mathfrak{J}(0) + \int_0^t \sqrt{\frac{3}{2e(t-t')}} \bar{\mathfrak{F}}(t') dt' \\ \mathfrak{V}(t) \leq \mathfrak{V}(0) + \frac{1}{4} \int_0^t \frac{\bar{\mathfrak{F}}(t') dt'}{\sqrt{\pi} \gamma (t-t')} \end{array} \right.$$

De plus un calcul analogue à celui qui fournit (9) donne ici

$$(15) \quad \gamma \int_0^t \mathfrak{J}^2(t') dt' + \frac{1}{3} \mathfrak{J}^2(t) = \frac{1}{3} \mathfrak{J}^2(0) - \int_0^t dt' \iint_{\Pi} u_i(x, t') \mathbf{X}_i(x, t') \delta x.$$

Ces résultats sont valables à condition que  $\mathbf{X}_i(x, t)$  soit nul hors d'un domaine borné. Or supposons donné au second membre de (3) un vecteur  $\mathbf{X}_i(x, t)$  continu, dérivable, assujéti à la seule condition que  $\bar{\mathfrak{F}}(t)$  reste inférieur à une fonction continue de  $t$ . Soit une longueur  $R$  qui augmente indéfiniment; soit  $\mathbf{X}_i^*(x, t)$  un vecteur continu et dérivable, égal à  $\mathbf{X}_i(x, t)$  pour  $x_k x_k \leq R^2$ , de longueur inférieure en tout point à celle de  $\mathbf{X}_i(x, t)$  pour  $R^2 < x_k x_k \leq 2R^2$ , nul

pour  $\mathfrak{R}^2 \leq x_k, x_k$ . Le système (3\*) obtenu en remplaçant dans (3)  $X_i$  par  $N_i$  admet une solution  $u_i^*(x, t)$  donnée par une formule (13\*) analogue à (13); et sur toute portion bornée de  $\Pi$ ,  $u_i^*(x, t)$  tend uniformément vers le vecteur  $u_i(x, t)$  que définit (13). Mais les fonctions  $\mathcal{J}^*(t)$ ,  $\mathcal{J}^*(t)$ ,  $\mathcal{V}^*(t)$  vérifient des relations (14\*) analogues à (14); leurs plus petites limites sont au moins égales à  $\mathcal{J}(t)$ ,  $\mathcal{J}(t)$  et  $\mathcal{V}(t)$ . Les inégalités (14) sont donc satisfaites. De même résulte de (15) l'inégalité

$$(16) \quad \int_0^t \mathcal{J}^2(t') dt' + \frac{1}{3} \mathcal{J}^2(t) \leq \frac{1}{3} \mathcal{J}^2(0) - \int_0^t dt' \iint_{\Pi} u_i(x, t') N_i(x, t') \delta x.$$

[On démontre facilement qu'en réalité les deux nombres de (16) sont toujours égaux : pour chaque valeur de  $t$  les fonctions  $u_i^*(x, t)$  et  $\frac{\partial u_i^*(x, t)}{\partial x_j}$  convergent fortement en moyenne sur  $\Pi$  vers  $u_i(x, t)$  et  $\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j}$ ; c'est-à-dire

$$\iint_{\Pi} [u_i^*(x, t) - u_i(x, t)]^2 \delta x$$

et

$$\iint_{\Pi} \left[ \frac{\partial u_i^*(x, t)}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} \right]^2 \delta x$$

tendent vers zéro.]

Le système (3) n'admet pas de solution régulière autre que (13) : il suffit de le montrer pour  $N_i(x, t) = 0$  et  $u_i(x, 0) = 0$ ; or les équations intégrales de M. Oseen permettent bien aisément d'établir dans ce cas l'identité à zéro de toute solution de (3) telle que  $\mathcal{J}(t)$  et  $\mathcal{J}(t)$  restent inférieurs à des fonctions continues de  $t$ .

**6. OBTENTION D'UNE NOUVELLE INÉGALITÉ** — Supposons maintenant  $N_i(x, t)$  de la forme

$$N_i(x, t) = v_k(x, t) \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_k};$$

les fonctions  $v_i(x, t)$  sont des fonctions données; elles sont bornées et continues ainsi que leurs dérivées; pour la durée de ce paragraphe nous posons

$$\mathcal{J}^2(t) = \iint_{\Pi} v_k(x, t) v_k(x, t) \delta x,$$

$$\mathcal{J}^2(t) = \iint_{\Pi} \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_k} \delta x;$$

par hypothèse  $\mathcal{J}(t)$  et  $\mathcal{Y}(t)$  restent inférieurs à des fonctions continues de  $t$ . Il sera important de savoir majorer la plus grande longueur à l'instant  $t$  du vecteur  $u_i(x, t)$ ,  $\mathfrak{V}(t)$ , à l'aide de  $\mathcal{J}(t)$  et de  $\mathcal{Y}(t)$ . Considérons d'abord le cas où  $u_i(x, 0) = 0$ . Nous avons

$$u_i(x, t) = \int_0^t dt' \iint_{\Pi} T_{ij}(x, y, t-t') v_k(y, t') \frac{\partial v_k(y, t')}{\partial y_k} dy.$$

D'où, à l'aide de l'inégalité de Schwarz,

$$\mathfrak{V}(t) \leq \int_0^t \mathcal{Y}(t') dt' \sqrt{\iint_{\Pi} T_{ij}(x, y, t-t') T_{ij}(x, y, t-t') v_k(y, t') v_k(y, t') dy}.$$

Or  $T_{ij}(x, y, t-t') T_{ij}(x, y, t-t')$  est inférieur à  $\frac{1}{4\pi^2[4v(t-t')]^2}$  et à  $\frac{1}{4\pi^2 r^4}$ ; soit

$$s = 2\sqrt{v(t-t')};$$

la première majorante est préférable pour  $r < s$ , la seconde pour  $r > s$ . Posons

$$y_1 - x_1 = r \cos \omega, \quad y_2 - x_2 = r \sin \omega;$$

$$\lambda^2(r) = \int_0^{2\pi} v_k(y, t) v_k(y, t) d\omega.$$

Il vient

$$(17) \quad \mathfrak{V}(t) \leq \frac{1}{3\pi} \int_0^t \mathcal{Y}(t') dt' \sqrt{\frac{1}{s^2} \int_0^s \lambda^2(r) r dr + \int_0^\infty \frac{1}{r^3} \lambda^2(r) dr}.$$

Notons les renseignements que nous avons sur la fonction  $\lambda(r)$ .

$$(18) \quad \int_0^\infty \lambda^2(r) r dr = \mathcal{J}^2(t).$$

D'autre part,

$$\lambda(r) \lambda'(r) = \int_0^{2\pi} v_k(y, t) \frac{\partial v_k(y, t)}{\partial r} d\omega.$$

D'où, par l'inégalité de Schwarz,

$$\lambda'^2(r) \leq \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_k(y, t)}{\partial r} \frac{\partial v_k(y, t)}{\partial r} d\omega$$

et par suite

$$(19) \quad \int_0^\infty \lambda'^2(r) r dr < \mathcal{Y}^2(t).$$

Écrivons l'identité

$$3 \int_0^s \lambda^2(r) r dr = [r^2 \lambda^2(r)]_0^s - 2 \int_0^s r^2 \lambda(r) \lambda'(r) dr.$$

D'où

$$\left[ 3 \int_0^s \lambda^2(r) r dr - s^2 \lambda^2(s) \right]^2 \leq 4s^2 \int_0^s \lambda^2(r) r dr \int_0^s \lambda'^2(r) r dr$$

et

$$\sqrt{\int_0^s \lambda^2(r) r dr} < s \sqrt{\int_0^s \lambda'^2(r) r dr} + \frac{s \lambda(s)}{\sqrt{3}}.$$

On a de même

$$3 \int_s^\infty \frac{1}{r^3} \lambda^2(r) dr = - \left[ \frac{1}{r^2} \lambda^2(r) \right]_s^\infty + 2 \int_s^\infty \frac{1}{r^3} \lambda(r) \lambda'(r) dr.$$

D'où

$$\left[ 3 \int_s^\infty \frac{1}{r^3} \lambda^2(r) dr - \frac{\lambda^2(s)}{s^2} \right]^2 \leq \frac{4}{s^2} \int_s^\infty \frac{1}{r^3} \lambda^2(r) dr \int_s^\infty r \lambda'^2(r) dr$$

et

$$\sqrt{\int_s^\infty \frac{1}{r^3} \lambda^2(r) dr} < \frac{1}{s} \sqrt{\int_s^\infty \lambda'^2(r) r dr} + \frac{\lambda(s)}{s\sqrt{3}}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{s^2} \int_0^s \lambda^2(r) r dr + \int_s^\infty \frac{1}{r^3} \lambda^2(r) dr < \left[ \frac{1}{s} \sqrt{\int_0^\infty \lambda'^2(r) r dr} + \frac{\lambda(s)}{s} \right]^2.$$

Tenons compte de (19) et portons dans (17); il vient

$$(20) \quad \mathfrak{Y}(t) < \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{\mathfrak{Y}(t')}{\sqrt{2(t-t')}} [\mathfrak{Y}(t') + \lambda(s)] dt'.$$

Ainsi le problème se pose de majorer  $\lambda(s)$ . Utilisons d'abord l'inégalité (19) :

$$|\lambda(r) - \lambda(s)|^2 = \left| \int_s^r \lambda'(\rho) d\rho \right|^2 \leq \int_s^r \rho \lambda'^2(\rho) d\rho \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} < \mathfrak{Y}^2(t) \left| \log \frac{r}{s} \right|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \lambda(r) &> \lambda(s) - \mathfrak{Y}(t) \sqrt{\left| \log \frac{r}{s} \right|}, \\ \lambda(r) &> \frac{1}{3} \lambda(s) \quad \text{pour } s_1 < r < s_2; \\ s_1 &= s e^{-\frac{\lambda(s)}{4\mathfrak{Y}^2(t)}}, \quad s_2 = s e^{+\frac{\lambda(s)}{4\mathfrak{Y}^2(t)}}. \end{aligned}$$

Dès lors l'inégalité (18) nous donne

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\lambda^2(s)}{4} r \, dr < \mathfrak{J}^2(t'),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{4} s^2 \lambda^2(s) \operatorname{sh} \frac{\lambda^2(s)}{2 \mathfrak{J}^2(t)} < \mathfrak{J}^2(t')$$

et a fortiori

$$\frac{1}{8} s^2 \frac{\lambda^2(s)}{\mathfrak{J}^2(t)} < \mathfrak{J}^2(t), \quad \lambda(s) < \frac{\sqrt[3]{24} \sqrt{\mathfrak{J}(t') \mathfrak{J}(t')}}{\sqrt[4]{2(t-t')}}.$$

Portons donc (20), nous obtenons

$$\mathfrak{N}(t) < \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{\mathfrak{J}^2(t') \, dt'}{\sqrt{2(t-t')}} + \frac{\sqrt[3]{24}}{4\pi} \int_0^t \frac{\mathfrak{J}^{\frac{1}{2}}(t') \mathfrak{J}^{\frac{3}{2}}(t')}{[2(t-t')]^{\frac{3}{4}}} dt'.$$

Considérons maintenant le cas général où  $u_i(x, 0)$  n'est plus identiquement nul; c'est par l'inégalité (7) que nous compléterons la précédente; il vient

$$(21) \quad \mathfrak{N}(t) < \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{\mathfrak{J}^2(t') \, dt'}{\sqrt{2(t-t')}} + \frac{\sqrt[3]{24}}{4\pi} \int_0^t \frac{\mathfrak{J}^{\frac{1}{2}}(t') \mathfrak{J}^{\frac{3}{2}}(t')}{[2(t-t')]^{\frac{3}{4}}} dt' + \frac{\mathfrak{J}(0)}{3\sqrt[3]{24\pi}t}.$$

## II. — Solutions régulières du système (1).

7. Une méthode d'approximations successives va nous permettre de construire une solution  $u_i(x, t)$  du système (1), régulière durant un certain intervalle de temps :  $t_1 \leq t \leq t_1 + \tau_1$ , et coïncidant pour  $t = t_1$  avec un vecteur donné  $u_i(x, t_1)$ . Écrivons une suite de systèmes :

$$\begin{aligned} \triangleright \Delta u_i^{(1)}(x, t) - \frac{\partial u_i^{(1)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial p^{(1)}(x, t)}{\partial x_i} &= 0, & \frac{\partial u_k^{(1)}(x, t)}{\partial x_k} &= 0, \\ \triangleright \Delta u_i^{(2)}(x, t) - \frac{\partial u_i^{(2)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial p^{(2)}(x, t)}{\partial x_i} &= u_k^{(1)}(x, t) \frac{\partial u_i^{(1)}(x, t)}{\partial x_k}, & \frac{\partial u_k^{(2)}(x, t)}{\partial x_k} &= 0, \\ \triangleright \Delta u_i^{(3)}(x, t) - \frac{\partial u_i^{(3)}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial p^{(3)}(x, t)}{\partial x_i} &= u_k^{(2)}(x, t) \frac{\partial u_i^{(2)}(x, t)}{\partial x_k}, & \frac{\partial u_k^{(3)}(x, t)}{\partial x_k} &= 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

Le premier de ces systèmes admet une solution qui est régulière pour  $t_1 \leq t$  et qui coïncide avec  $u_i(x, t_1)$  pour  $t = t_1$ ; cette solution satisfait des inégalités

$$\mathfrak{J}_1(t) \leq \mathfrak{J}(t_1), \quad \mathfrak{J}_1(t) \leq \mathfrak{J}(t_1), \quad \mathfrak{N}_1(t) \leq \mathfrak{N}(t_1).$$

Le second système est du type (3) ;

$$\mathfrak{F}_2(t) \leq \mathfrak{J}_1(t) \mathfrak{Q}_1(t).$$

Il admet une solution qui est régulière pour  $t_1 \leq t$  et qui coïncide avec  $u_i(x, t_1)$  pour  $t = t_1$ . Le troisième système est du type (3), etc.

La suite des fonctions  $u_i^{(n)}(x, t)$  est ainsi définie pour  $t \geq t_1$  ; nous allons l'étudier pour  $t_1 \leq t \leq t_1 + \tau_1$ ,  $\tau_1$  devant être choisi ultérieurement. Soient  $\mathfrak{J}_n, \mathfrak{J}_n, \mathfrak{Q}_n$  les maxima respectifs de  $\mathfrak{J}_n(t), \mathfrak{J}_n(t), \mathfrak{Q}_n(t)$  pour  $t_1 \leq t \leq t_1 + \tau_1$ . Nous avons

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}(t_1), \quad \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}(t_1), \quad \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}(t_1).$$

et (1.4) fournit les formules de récurrence :

$$(22) \quad \begin{cases} \mathfrak{J}_{n+1} \leq \mathfrak{J}_1 + \tau_1 \mathfrak{J}_n \mathfrak{Q}_n \\ \mathfrak{J}_{n+1} \leq \mathfrak{J}_1 + \tau_1 \sqrt{\frac{3\tau_1 \log 2}{2e}} \mathfrak{J}_n \mathfrak{Q}_n < \mathfrak{J}_1 + \tau_1 \sqrt{\frac{\tau_1}{2}} \mathfrak{J}_n \mathfrak{Q}_n \\ \mathfrak{Q}_{n+1} \leq \mathfrak{Q}_1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\tau_1}{2}} \mathfrak{J}_n \mathfrak{Q}_n. \end{cases}$$

D'où

$$\mathfrak{J}_{n+1} \mathfrak{Q}_{n+1} < \left[ \mathfrak{J}_1 + \tau_1 \sqrt{\frac{\tau_1}{2}} \mathfrak{J}_n \mathfrak{Q}_n \right] \left[ \mathfrak{Q}_1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\tau_1}{2}} \mathfrak{J}_n \mathfrak{Q}_n \right].$$

Le produit  $\mathfrak{J}_n \mathfrak{Q}_n$  reste donc inférieur à la plus petite racine positive de l'équation

$$Z = \left[ \mathfrak{J}_1 + \tau_1 \sqrt{\frac{\tau_1}{2}} Z \right] \left[ \mathfrak{Q}_1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\tau_1}{2}} Z \right].$$

Cette équation est supposée admettre une racine positive. Nous choisirons  $\tau_1$  en sorte qu'elle admette une racine double positive :

$$(23) \quad \sqrt{\frac{2}{\tau_1}} = \sqrt{\frac{1}{4\tau_1}} \sqrt{\mathfrak{J}(t_1) + \sqrt{3} \mathfrak{Q}(t_1)}.$$

Nous avons donc

$$\mathfrak{J}_n \mathfrak{Q}_n < \frac{1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\tau_1}{2}} \mathfrak{J}_1 - \tau_1 \sqrt{\frac{\tau_1}{2}} \mathfrak{Q}_1}{\frac{2}{3} \frac{\tau_1}{2}}$$

D'après (22) les quantités  $\mathfrak{J}_n, \mathfrak{J}_n, \mathfrak{Q}_n$  sont dès lors bornées dans

leur ensemble; on a par exemple

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathfrak{J}_{n-1} + 2\mathfrak{V}_{n-1} < \sqrt{\frac{y}{\tau_1}}.$$

Il est facile d'en déduire la convergence des fonctions  $u_i^{(n)}(x, t)$  vers une limite  $u_i(x, t)$  qui est définie pour  $t_1 \leq t \leq t_1 + \tau_1$  et qui constitue la solution régulière cherchée du système (1). Cette solution vérifie l'inégalité

$$(24) \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathfrak{J}^i(t) + 2\mathfrak{V}^i(t) \leq \sqrt{\frac{y}{\tau_1}}.$$

**8. APPLICATIONS.** — Soient des valeurs initiales données  $u_i(x, 0)$ . Prenons  $t_1 = 0$ ; le processus que nous venons de décrire nous fournit une solution de (1) qui possède ces valeurs initiales et qui est régulière pour  $0 \leq t \leq T_1$ ; d'après (23)

$$\sqrt{\frac{y}{T_1}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \sqrt{\mathfrak{J}(0) + 4\mathfrak{V}(0)}.$$

Prenons  $t_1 = T_1$ ; le même processus définit cette solution  $u_i(x, t)$  pour  $T_1 \leq t \leq T_2$ :

$$\sqrt{\frac{y}{T_2 - T_1}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \sqrt{\mathfrak{J}(T_1) + 4\mathfrak{V}(T_1)}, \quad \dots$$

Soit  $T_\infty$  la limite de la suite croissante  $T_1, T_2, \dots$ ; une solution régulière du système (1), ayant les valeurs initiales imposées, se trouve ainsi définie pour  $0 \leq t < T_\infty$ . Au cours du paragraphe I nous avons déjà annoncé que  $T_\infty = +\infty$ .

Pour le démontrer, il suffira d'établir que les fonctions  $\mathfrak{J}(t)$  et  $\mathfrak{V}(t)$  restent inférieures à des quantités indépendantes de  $t$  quand  $T_1 \leq t < T_\infty$ . Mais une digression s'impose.

**Théorème d'unicité :** Soient deux solutions du système (2)  $u_i(x, t)$  et  $u_i(x, t) + v_i(x, t)$  régulières pour  $t_1 \leq t \leq t_2$  et coïncidant pour  $t = t_1$ ; je dis qu'elles sont confondues :

$$\begin{aligned} \Delta v_i(x, t) - \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x_i} \\ = \left[ \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k(x, t)}{\partial x_i} \right] u_k(x, t) \\ - \left[ \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k} - \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_i} \right] v_k(x, t), \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial v_k(x, t)}{\partial x_k} = 0.$$

Le second membre de ce système satisfait la condition imposée au second membre de (3). La relation (16) vaut donc

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \iint_{\Pi} \frac{\partial v_i(x, t')}{\partial x_k} \frac{\partial v_i(x, t')}{\partial x_k} dx + \frac{1}{2} \iint_{\Pi} v_i(x, t) v_i(x, t) dx \\ & \leq \int_0^t dt' \iint_{\Pi} \left[ \frac{\partial v_i(x, t')}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k(x, t')}{\partial x_i} \right] u_k(x, t') v_i(x, t') dx. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} i(t) &= \iint_{\Pi} v_i(x, t) v_i(x, t) dx, \\ j^2(t) &= \iint_{\Pi} \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_k} dx. \end{aligned}$$

Nous avons, en désignant par C une constante,

$$\int_0^t j^2(t') dt' - \frac{1}{2} i(t) \leq C \int_0^t i(t') j(t') dt'.$$

D'où

$$\begin{aligned} \sqrt{2} i(t) \sqrt{\int_0^t j^2(t') dt'} &\leq C \sqrt{\int_0^t i(t') dt'} \sqrt{\int_0^t j^2(t') dt'}, \\ 2 i(t) &\leq C^2 \int_0^t i(t') dt' \end{aligned}$$

et, par suite,

$$i(t) = 0, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

*Conséquences des relations (23) et (24).* — Soit  $t_1$  une valeur quelconque comprise entre zéro et  $T_*$ . En vertu du théorème d'unicité  $u_i(x, t)$  est identique à la solution de (1) qui coïncide avec  $u(x, t_1)$  pour  $t = t_1$  et qui est définie par les approximations successives du paragraphe 7. L'inégalité (24) est donc valable pour  $0 \leq t - t_1 \leq \tau_1$ . Autrement dit, soit  $t$  une valeur quelconque comprise entre 0 et  $T_*$ ; soit  $t_1$  une valeur quelconque comprise entre 0 et  $t$ ; ou bien

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} j(t) + 2 i(t) \leq \sqrt{\frac{2}{\tau_1}}$$

ou bien

$$\sqrt{\frac{\gamma}{t-t_1}} \leq \sqrt{\frac{\gamma}{\tau_1}}$$

D'après (23)

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\tau_1}} = \left[ \sqrt{\frac{\gamma}{4\pi}} \sqrt{\mathfrak{J}(t_1)} + \sqrt{2\mathfrak{V}(t_1)} \right]^2.$$

Nous remplacerons cette égalité peu maniable par l'inégalité

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\tau_1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \mathfrak{J}(t_1) + 4\mathfrak{V}(t_1);$$

et nous avons finalement, en désignant par le symbole  $\{A; B\}$  la plus petite des deux quantités A et B :

$$(25) \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \mathfrak{J}(t_1) + 4\mathfrak{V}(t_1) \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \sqrt{\frac{\gamma}{t-t_1}}; \frac{1}{3\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \mathfrak{J}(t) + 3\mathfrak{V}(t) \quad (0 < t_1 < t < T_x).$$

**9.** Une relation équivalente à la relation de dissipation de l'énergie va nous fournir des inégalités dont la confrontation avec (25) prouvera que  $\mathfrak{J}(t)$  et  $\mathfrak{V}(t)$  sont bornés pour  $T_1 \leq t < T_x$ . Les fonctions  $u_i(x, t)$ , définies pour  $0 \leq t < T_x$ , satisfont le système (2), dont le second membre vérifie la condition imposée au second membre de (3). Nous avons donc, d'après (16), la relation

$$\begin{aligned} & \gamma \int_0^t \mathfrak{J}^2(t') dt' - \frac{1}{2} \mathfrak{J}^2(t) \\ & \leq \frac{1}{2} \mathfrak{J}^2(0) - \int_0^t dt' \iint_{\mathbb{R}^n} \left[ \frac{\partial u_i(x, t')}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i(x, t')}{\partial x_i} \right] u_i(x, t') u_i(x, t') \delta x \\ & = \frac{1}{2} \mathfrak{J}^2(0). \end{aligned}$$

Par suite

$$(26) \quad \gamma \int_0^t \mathfrak{J}^2(t') dt' < \frac{1}{2} \mathfrak{J}^2(0) \quad \text{et} \quad \mathfrak{J}(t) \leq \mathfrak{J}(0).$$

De plus la relation (21) est applicable : jointe aux deux précédentes

elle va nous permettre d'établir que l'intégrale

$$\int_0^t \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathfrak{J}(t_1) + 4 \mathfrak{J}^2(t_1)}{\sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}} dt_1$$

reste inférieure à une quantité indépendante de  $t$  — on constate que sous le signe  $\int$  figure le premier membre de (25) —. Nous avons, d'après (21) :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathfrak{J}(t_1) + 4 \mathfrak{J}^2(t_1)}{\sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}} dt_1 \\ < & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mathfrak{J}(t_1) dt_1}{\sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{t_1} \frac{\mathfrak{J}^2(t') dt'}{\sqrt{t_1-t'}} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^t \frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{t_1} \frac{\mathfrak{J}^{\frac{1}{2}}(t') \mathfrak{J}^{\frac{3}{2}}(t') dt'}{[2(t_1-t')]^{\frac{3}{2}}} \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathfrak{J}(0)}{\sqrt{2}} \int_0^t \frac{dt_1}{\sqrt{t_1} \sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mathfrak{J}(t_1) dt_1}{\sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}} \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_0^t \mathfrak{J}^2(t_1) dt_1} \sqrt{\int_0^t \frac{dt_1}{(t-t_1) \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^3}} < \frac{\mathfrak{J}(0)}{\sqrt{2\pi}}; \end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{t_1} \frac{\mathfrak{J}^2(t') dt'}{\sqrt{t_1-t'}} \\ & < \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \int_0^t \mathfrak{J}^2(t') dt' \int_t^{t_1} \frac{dt_1}{\sqrt{(t-t_1)(t_1-t')}} < \frac{\mathfrak{J}^2(0)}{2\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^t \frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{t_1} \frac{\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(t') \mathcal{J}^{\frac{3}{2}}(t') dt'}{[\nu(t_1-t')]^{\frac{3}{2}}} \\
 & < \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^t \frac{\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(t') \mathcal{J}^{\frac{3}{2}}(t') dt'}{\left( \log \frac{et}{t-t'} \right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{t'} \frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1} [t_1-t']^{\frac{3}{2}}} \\
 & < \frac{2\sqrt{2}}{\nu^{\frac{3}{2}}} \int_0^t \frac{\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(t') \mathcal{J}^{\frac{3}{2}}(t') dt'}{(t-t')^{\frac{1}{2}} \left( \log \frac{et}{t-t'} \right)^{\frac{3}{2}}} \\
 & < \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\mathcal{J}(0)}}{\nu^{\frac{3}{2}}} \left[ \int_0^t \mathcal{J}^2(t') dt' \right]^{\frac{3}{2}} \left[ \int_0^t \frac{dt'}{(t-t') \left( \log \frac{et}{t-t'} \right)^3} \right]^{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{2}{\nu}} \frac{\mathcal{J}^2(0)}{\nu^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned}$$

enfin

$$\frac{\sqrt{2}\mathcal{J}(0)}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{dt_1}{\sqrt{t_1}\sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}} < \frac{\sqrt{2}\mathcal{J}(0)}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{dt_1}{\sqrt{t_1}\sqrt{t-t_1}} < \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \mathcal{J}(0).$$

Donc

$$\int_0^t \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{J}(t_1) + 4\mathcal{N}(t_1)}{\sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}} dt_1 < \left( \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) \frac{\mathcal{J}^2(0)}{\nu^{\frac{3}{2}}} + \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{2\pi} \right) \frac{\mathcal{J}(0)}{\sqrt{\nu}}.$$

Tenons compte maintenant de (25); il vient

$$\begin{aligned}
 (27) \quad & \int_0^t \left\{ \sqrt{\frac{\nu}{t-t_1}}; \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathcal{J}(t) + 2\mathcal{N}(t) \right\} \frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1} \left( \log \frac{et}{t-t_1} \right)^{\frac{3}{2}}} \\
 & < \left( \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) \frac{\mathcal{J}^2(0)}{\nu^{\frac{3}{2}}} + \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{2\pi} \right) \frac{\mathcal{J}(0)}{\sqrt{\nu}}.
 \end{aligned}$$

*Conclusions.* — Introduisons donc la fonction

$$\mathcal{E}[B] = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\sigma}}; B \right\} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma} \left( \log \frac{e}{1-\sigma} \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (B \geq e).$$

— Rappelons que le symbole  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\sigma}}; B \right\}$  représente la plus petite des quantités  $\frac{1}{\sqrt{1-\sigma}}$  et  $B$ .

$g[B]$  est une fonction de  $B$  continue et croissante; elle est proportionnelle à  $B$  pour  $0 \leq B \leq 1$ ; elle augmente indéfiniment avec  $B$  car l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{d\sigma}{(1-\sigma) \left( \log \frac{e}{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

diverge, fait qui est essentiel. Soit  $B = G[C]$  la relation inverse de  $C = g[B]$ ;  $G[C]$  est définie pour  $0 \leq C$ ; elle est continue et croissante; elle est proportionnelle à  $C$  pour les faibles valeurs de  $C$ ; elle augmente indéfiniment avec  $C$ .

La relation (27) s'écrit

$$(28) \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}}} \mathcal{J}(t) + \nu \mathcal{N}(t) < \sqrt{\frac{\nu}{t}} G \left[ \left( \frac{1}{\nu} + \sqrt{\frac{1}{\nu}} \right) \frac{\mathcal{J}^2(0)}{\nu^2} + \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}}} + \sqrt{\frac{1}{\pi}} \right) \frac{\mathcal{J}(0)}{\nu} \right].$$

Cette inégalité achève la démonstration des résultats annoncés au paragraphe I.

### III. — Compléments.

10. La relation (28) montre que  $\mathcal{J}(t)$  et  $\mathcal{N}(t)$  tendent vers zéro avec  $\frac{1}{t}$ , au moins aussi rapidement que  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ . Les résultats obtenus ne permettent d'ailleurs pas d'affirmer que  $\mathcal{J}(t)$  tend vers zéro avec  $\frac{1}{t}$ . Ils ne permettent pas non plus d'étudier comment se comporte  $u_i(x, t)$  lorsque l'on fait tendre  $\nu$  vers zéro.

La relation de dissipation de l'énergie est vérifiée.

Quand  $\mathcal{J}(0)$  tend vers zéro,  $\mathcal{J}(t)$ ,  $\mathcal{J}'(t)$  et  $\mathcal{N}(t)$  tendent vers zéro.

M. Oseen a prouvé que si à un instant  $t_2$  la quantité

$$(x_2, x_2)^2 u_i(x, t) u_i(x, t) - (x_2, x_2)^{1-\alpha} \frac{du_i(x, t)}{dx_j} \frac{du_i(x, t)}{dx_j} \quad (\alpha > 0)$$

est bornée, il en est de même pour  $t_2 < t < t_2 + \tau_2$ ,  $\tau_2$  étant convenablement choisi; autrement dit les époques auxquelles cette quantité est bornée constituent certains intervalles de l'axe des  $t$  et certaines origines de ces intervalles; nous ignorons si ces intervalles, quand ils existent, se réduisent nécessairement à un seul qui s'étendrait jusqu'à  $+\infty$ .

Signalons une dernière difficulté : soit une suite de valeurs initiales  $u_i^*(x, 0)$  qui convergent fortement en moyenne vers une limite  $u_i(x, 0)$  telle que l'un au moins des nombres  $\mathfrak{N}(0)$  et  $\mathfrak{J}(0)$  n'existe pas; on déduit bien aisément des inégalités (28) et (26) que les solutions régulières de (1),  $u_i^*(x, t)$ , correspondant aux valeurs initiales  $u_i^*(x, 0)$  admettent au moins une limite  $u_i(x, t)$  qui est solution régulière de (1) pour  $t > 0$ . Cette limite satisfait les inégalités (28) et (26); on peut établir facilement que  $u_i(x, t)$  converge fortement en moyenne vers  $u_i(x, 0)$  quant  $t$  tend vers zéro. Mais je ne sais pas si cette solution, qui correspond aux « valeurs initiales irrégulières »  $u_i(x, 0)$ , est nécessairement unique.

Ainsi certains problèmes posés par le système (1) présentent des difficultés comparables à celles qu'énonce la dernière section du troisième Chapitre.

