JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. RAUCH

Extensions de théorèmes relatifs aux directions de Borel des fonctions méromorphes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 12 (1933), p. 109-171.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12__109_0>

Extensions de théorèmes relatifs aux directions de Borel des fonctions méromorphes ;

PAR A. RAUCH.

INTRODUCTION.

Lorsque M. Picard en 1879 a découvert ses deux théorèmes devenus maintenant classiques, il a donné un essor nouveau à la partie des études mathématiques concernant les fonctions uniformes. Dans le premier de ses théorèmes il a démontré qu'une fonction entière prend toute valeur finie a sauf une au plus, dans le second que plus généralement une fonction uniforme prend autour d'un point singulier essentiel isolé toute valeur a finie ou infinie sauf deux au plus (j, 1°, 2°, 3°)(¹).

Après lui, à son tour en 1896, M. Borel a précisé le premier théorème de M. Picard en démontrant que, si $f(z)$ est une fonction entière d'ordre positif et fini ρ, l'exposant de convergence des racines de $f(z) - x$ est égal à ρ pour toute valeur finie de x sauf une au plus. Définissant ensuite l'ordre ρ d'une fonction méromorphe il a démontré plus généralement que si $f(z)$ est méromorphe d'ordre ρ et $\mathrm{H}(z)$ méromorphe d'ordre $\rho' < \rho$, l'exposant de convergence des racines de

(¹) *Voir* la bibliographie.

$f(z) - H(z)$ est égal à ρ sauf pour deux fonctions $H(z)$ au plus (b, 1°, 2°, 3°, 4°).

Ces théorèmes ont donné naissance à une foule de travaux très intéressants tantôt de nature qualitative comme ceux de M. Picard, tantôt de nature quantitative comme ceux de M. Borel.

La puissante théorie des familles normales de fonctions édifiée par M. Montel (g) a permis de découvrir de nouveaux résultats qualitatifs plus précis que ceux de M. Picard. Ainsi M. Julia a trouvé en 1919 le théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe possédant une valeur asymptotique ; il existe une suite infinie de cercles $\Gamma(n)$ d'équation

$$|z - x(n)| = \alpha(n)\,|x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim |x(n)| = \infty,$$

tel que $f(z)$ prend dans l'ensemble de ces cercles une infinité de fois toute valeur sauf deux au plus (e, 1°, 2°, p. 127).

Il en a déduit qu'il existe au moins une direction (J) telle que dans tout angle de bissectrices (J) il y a une suite infinie de cercles $\Gamma(n)$.

M. Valiron appelle (J) une *direction de Julia*.

En 1924 M. Milloux réussit à trouver indépendamment de la théorie de M. Montel de nouveaux résultats (f, 1°). Il a démontré que si $f(z)$ est une fonction méromorphe à valeur asymptotique, il existe une suite infinie de cercles $\Gamma(n)$ tels que, si z décrit $\Gamma(n)$, la représentation sphérique de $f(z)$ couvre toute la sphère de Riemann sauf peut-être les environs de deux points, raison pour laquelle il appelle les cercles $\Gamma(n)$ *cercles de remplissage*.

En 1925 M. R. Nevanlinna a publié sa remarquable théorie des fonctions méromorphes basée sur l'emploi de la fonction $T(r; f)$ ouvrant ainsi aux recherches de nouveaux chemins. Il retrouve, généralise et précise des résultats de MM. Borel, Hadamard et Valiron.

Dans plusieurs de ses mémoires M. Valiron a repris la théorie des cercles de remplissage et poussé leur étude à un haut degré de perfection. Il y a introduit la fonction $T(r; f)$. Il a démontré l'existence de cercles de remplissage pour toutes les fonctions méromorphes pour lesquelles on a

$$\overline{\lim} \frac{T(r; f)}{(\log r)^2} = \infty \quad (^1).$$

En 1928 (i; 3°) il a trouvé des résultats à peu près définitifs sur le nombre n_1 des zéros de $f(z) - \Pi(z)$ dans le cas où $f(z)$ est d'ordre positif et $\Pi(z)$ une constante ou une fraction rationnelle. Il a démontré l'existence d'une suite infinie de cercles de remplissage d'équation

$$|z - x(n)| = \alpha(n) |x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim |x(n)| = \infty,$$

dans lesquelles on a

$$n_1 > \alpha^2(n) \frac{T(r_n; f)}{\log T(r_n; f)}, \qquad r_n = |x(n)|.$$

Il découvre ainsi pour les fonctions d'ordre fini ρ l'existence d'une direction (B) au moins, telle que l'exposant de convergence des racines de $f(z) - \Pi(z)$ situées dans un angle quelconque de bissectrice (B) est égal à ρ sauf pour deux fonctions $\Pi(z)$ au plus. Le théorème de M. Borel se trouvant ainsi complété il appelle (B) une *direction de Borel*.

M. Milloux a repris et précisé la dernière étude de M. Valiron dans le cas où $\Pi(z)$ est une constante, trouvant (f; 2°)

$$n_1 > \alpha^2(n)\, T(r_n; f)$$

et donnant ainsi aux résultats de M. Valiron une forme plus simple. Puis M. Valiron a précisé encore davantage plusieurs résultats de M. Milloux (i; 4°, 5°) et donné finalement à son théorème cette forme simple et élégante :

Soit $f(z)$ méromorphe d'ordre fini et positif ρ et tel que l'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{T(r; f)}{r^{\rho-1}} dr$$

diverge : il existe une suite infinie de cercles $\Gamma(n)$ d'équation

$$|z - x(n)| = \alpha(n) |x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim |x(n)| = \infty,$$

jouissant de la propriété suivante : Pour chaque n, $f(z)$ prend $\mathfrak{N}(n)$

(1) *Comptes rendus*, t. 186, p. 1189-1191.

fois au moins dans $\Gamma(n)$ toute valeur, sauf au plus celles qui sont représentées sur la sphère de Riemann à l'intérieur de l'un ou de l'autre de deux cercles de rayon $\tau_1(n)$, la série

$$\sum \frac{\mathfrak{N}(n)}{|x(n)|^\rho}$$

étant divergente tandis que

$$\sum \tau_1(n)$$

converge. Il s'ensuit qu'il existe toujours une direction (B) telle que la série

$$\sum \frac{1}{r_q\left(C; f=x\right)^\rho}$$

étendue aux modules r_q des zéros de $f(z) - x$ appartenant à un angle C arbitraire de bissectrice (B) diverge pour tous les x sauf deux au plus.

Il a ensuite étudié les fonctions d'ordre $\rho > \frac{1}{2}$. En s'appuyant sur une proposition antérieure (i; 1° p. 134) il a précisé le dernier théorème par l'énoncé suivant (i; 7°).

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho > \frac{1}{2}$. Si la série

$$\sum \frac{1}{r_q\left(\widehat{A'}; f=a\right)^\rho}$$

relative à un petit angle $\widehat{A'}$ de mesure inférieure à $\frac{\pi}{\rho}$ diverge, il existe dans tout angle $\widehat{A}$ de mesure supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$ et contenant $\widehat{A'}$ à son intérieur (au sens strict) une suite infinie de cercles $\Gamma(n)$ d'équation

$$|z - x(n)| = \alpha(n)|x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim x(n) = \infty,$$

telle que dans $\Gamma(n)$ $f(z)$ prend $\mathfrak{N}(n)$ fois au moins toute valeur x sauf au plus celles qui sont représentées sur la sphère de Riemann à l'intérieur de l'un ou de l'autre de deux cercles de rayon $2^{-\frac{n}{\rho}}$, la série

$$\sum \frac{\mathfrak{N}(n)}{|x(n)|^\rho}$$

étant divergente. Il s'ensuit qu'il existe toujours une direction (B) *intérieure à* $\hat{A}$ *telle que la série*

$$\sum \frac{1}{r_q(\hat{C}; f=x)^{\rho}}$$

diverge quel que soit l'angle $\hat{C}$ *de bissectrice* (B) *et pour tous les* x *sauf deux au plus.*

Dans un travail récent (i; 6°) il a précisé davantage encore la distribution asymptotique des valeurs de $f(z)$ dans certaines directions en démontrant qu'à *chaque* direction (V) est attaché un nombre $\rho(V)$, limite pour tous les x sauf peut-être ceux d'un ensemble de mesure linéaire nulle de l'exposant de convergence des racines de $f(z)-x$ appartenant à un angle de bissectrice (V) et dont l'ouverture tend vers zéro. Il appelle $\rho(V)$ « l'ordre moyen » de $f(z)$ dans la direction (V).

En 1928 M. Biernacki (a) a donné une généralisation importante du premier théorème cité de M. Valiron en démontrant que :

$f(z)$ *étant une fonction méromorphe d'ordre* ρ, $\Pi(z)$ *une fonction méromorphe d'ordre* $\rho' < \rho$ *et* $\varepsilon > 0$ *un nombre arbitrairement petit, il existe une suite de cercles* $\Gamma(n)$ *d'équation*

$$|z - x(n)| = \alpha(n)\,|x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim |x(n)| = \infty,$$

dans chacun desquels $f(z) - \Pi(z)$ *admet plus de* $|x(n)|^{\rho-\varepsilon}$ *racines quel que soit* $\Pi(z)$ *sauf pour deux fonctions exceptionnelles au plus. Il en résulte qu'il existe toujours une direction* (B) *d'argument* φ *telle que l'exposant de convergence des racines des équations* $f(z) - \Pi(z)$ *situées dans l'angle* $|\arg z - \varphi| < \varepsilon$ *est égal à* ρ, *quel que soit* ε *sauf pour deux fonctions* $\Pi(z)$ *au plus.*

Ce sont des généralisations de ce genre mises sous la forme des théorèmes de M. Valiron dont il s'agit surtout dans le présent travail (¹).

Pour atteindre ce but nous généraliserons d'abord un théorème de M. Valiron. f, P, Q, R étant des fonctions méromorphes dans un

(¹) Un résumé a été publié dans les *Comptes rendus*, t. 192, p. 1189-1191.

cercle (C) soit $\mathfrak{N}$ la limite supérieure du nombre des zéros de $f-\mathrm{P}$, $f-\mathrm{Q}$, $f-\mathrm{R}$ dans (C). Nous calculons une limite supérieure du nombre des zéros de $f(z)-x$ dans un cercle concentrique à (C) et de rayon vingt fois plus petit pour presque toutes les valeurs de x. Cette limite est linéaire en $\mathfrak{N}$ (théorème I). Nous en déduisons une généralisation d'un théorème de M. Milloux donnant une limite inférieure du nombre des zéros de $f(z)-\mathrm{H}(z)$ dans un certain cercle, $\mathrm{H}(z)$ étant l'une ou l'autre de trois fonctions méromorphes (théorème II).

Dans le Chapitre II nous établissons à l'aide de ce dernier résultat et d'un théorème de M. Milloux l'existence d'une suite infinie de cercles de remplissage pour toutes les fonctions $f(z)-\mathrm{H}(z)$ dans le cas où $f(z)$ est d'ordre fini positif ou nul et où $\mathrm{H}(z)$ vérifie des conditions de la forme

$$\mathrm{T}[(1-\alpha)r;\mathrm{H}]<\alpha^{3}\,\mathrm{T}(r;f) \tag{1}$$

dans le cas de l'ordre positif et fini, ou

$$\mathrm{T}[(1-\alpha)r;\mathrm{H}]<\alpha^{3}\frac{\mathrm{T}(r;f)}{(\log r)^{2}},\qquad \overline{\lim}\,\frac{\mathrm{T}(r;f)}{(\log r)^{2}}=\infty \tag{2}$$

dans le cas de l'ordre nul (α est inférieur à un nombre fixe) (théorème III). Nous précisons ce résultat dans le cas de l'ordre fini et positif (IV).

Dans le Chapitre III nous généralisons ensuite le premier théorème cité de M. Valiron en l'étendant aux fonctions $f(z)-\mathrm{H}(z)$ où $\mathrm{H}(z)$ vérifie une condition du genre (1) (V, VI, VII). Dans les cas particuliers nous retrouvons le théorème de M. Biernacki et nous complétons un théorème de M. Nevanlinna en montrant l'existence d'une direction (B) pour toutes les fonctions $f(z)-\mathrm{H}(z)$, où f et H sont respectivement de la classe de divergence et de convergence de leur ordre ρ (VII').

Dans le Chapitre IV nous étudions les fonctions d'ordre $\rho>\frac{1}{2}$ dans le sens de M. Valiron en étendant son théorème déjà cité aux fonctions $f(z)-\mathrm{H}(z)$ (VIII, IX).

Dans le Chapitre V nous démontrons en appliquant la méthode de M. Valiron, qui lui a permis de démontrer son deuxième théorème cité, que sur chaque direction (B) il existe une suite infinie de centres de cercles de remplissage pour toutes les fonctions $f(z) - H(z)$, où $H(z)$ est une constante ou une fonction méromorphe. Ici encore les théorèmes ont une forme analogue à ceux de M. Valiron (X, XI).

Le Chapitre VII est consacré à des généralisations de deux théorèmes de M. Milloux concernant les fonctions d'ordre nul vérifiant une condition du genre (2) et les fonctions d'ordre infini pour lesquelles on a une inégalité de la forme

$$T[(1+\alpha)r; H] < \alpha^2 T(r; f).$$

Pour les fonctions d'ordre nul nous montrons l'existence de directions (J) pour $f(z) - H(z)$ (XII).

Dans le cas de l'ordre infini nous trouvons des cercles de remplissage pour $f(z) - H(z)$, où $H(z)$ est d'ordre fini ou d'ordre infini (XIII, XIV, XV). On en déduit pour ces fonctions des directions analogues aux directions de Borel.

Le dernier Chapitre s'appuie sur le théorème de M. Valiron concernant l'ordre moyen $\rho(V)$ de $f(z)$ dans une direction (V) quelconque. Nous nous bornons aux directions (V) d'ordre $\rho(V) > 0$. Nous montrons que sur chacune de ces directions il y a une suite infinie de centres de cercles de remplissage d'ordre $\rho(V)$ pour toutes les fonctions $f(z) - H(z)$, où $H(z)$ est d'ordre inférieur à $\rho(V)$. On en déduit que toutes ces fonctions $f(z) - H(z)$ sont dans la direction (V) d'ordre moyen $\rho(V)$. Comme dans le Chapitre V nous avons essayé de donner aux résultats la forme du deuxième théorème cité de M. Valiron.

Qu'il me soit permis pour terminer cette introduction d'exprimer ici même toute ma reconnaissance à M. Valiron qui a inspiré et dirigé ce travail et auprès de qui j'ai trouvé une aide constante.

CHAPITRE I.

NOTATIONS DE M. NEVANLINNA.

1. Soient $f(z)$ et $g(z)$ des fonctions méromorphes dans un cercle d'équation

$$|z - z_0| = R.$$

$n(|z-z_0|=r;\, f=g)$ désigne le nombre des racines de $f(z)=g(z)$ situées dans le cercle

$$|z-z_0|=r \qquad (r<R),$$

chaque racine étant comptée autant de fois qu'exige son ordre de multiplicité.

Si (Γ) est ce dernier cercle, on écrira aussi

$$n(|z-z_0|=r;\, f=g)\equiv n[(\Gamma);\, f=g].$$

On pose

$$m(|z-z_0|=r;\, f-g)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\log}\,|f(z_0+re^{i\theta})-g(z_0+re^{i\theta})|\,d\theta,$$

$$m\left(|z-z_0|=r;\, \frac{1}{f-g}\right)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\log}\left|\frac{1}{f(z_0+re^{i\theta})-g(z_0+re^{i\theta})}\right|d\theta,$$

où

$$\overline{\log}\,|A|=\log|A| \qquad \text{si } |A|>1,$$

$$\overline{\log}\,|A|=0 \qquad \text{si } |A|\leqq 1.$$

On a donc

$$\log|A|\equiv\overline{\log}\,|A|-\overline{\log}\left|\frac{1}{A}\right|.$$

Nous écrirons plusieurs fois

$$\log\left|\frac{1}{A}\right|+\overline{\log}\,|A|\equiv\overline{\log}\left|\frac{1}{A}\right|.$$

Les fontions N et T sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
&N(|z-z_0|=r;\, f=g)\\
&\quad=\int_0^r[n(|z-z_0|=t;\, f=g)-n(|z-z_0|=0;\, f=g)]\frac{dt}{t}\\
&\quad\quad+n(|z-z_0|=0;\, f=g)\log r;\\
&N(|z-z_0|=r;\, f-g=\infty)\\
&\quad=\int_0^r[n(|z-z_0|=t;\, f-g=\infty)-n(|z-z_0|=0;\, f-g=\infty)]\frac{dt}{t}\\
&\quad\quad+n(|z-z_0|=0;\, f-g=\infty)\log r;\\
&T\left(|z-z_0|=r;\, \frac{1}{f-g}\right)\\
&\quad\equiv m\left(|z-z_0|=r;\, \frac{1}{f-g}\right)+N(|z-z_0|=r;\, f=g);\\
&T(|z-z_0|=r;\, f-g)\\
&\quad\equiv m(|z-z_0|=r;\, f-g)+N(|z-z_0|=r;\, f-g=\infty).
\end{aligned}$$

c étant le coefficient du premier terme du développement de $f(z) - g(z)$ autour de z_0 nous écrivons

$$C(f-g)_{z_0} = \log|c|;$$

si $z_0 = 0$, nous mettons simplement $C(f-g)$.

On sait qu'on a, d'après M. R. Nevanlinna (h, 2°, p. 6),

$$C(f-g)_{z_0} = T(|z-z_0| = r; f-g) - T\left(|z-z_0| = r; \frac{1}{f-g}\right).$$

Remarques préliminaires.

2. Nous utiliserons dans la suite souvent les inégalités suivantes de M. Nevanlinna :

$$\overset{+}{\log}|a+b| \leq \overset{+}{\log}|a| + \overset{+}{\log}|b| + \log 2;$$

$$\overset{+}{\log}|ab| \leq \overset{+}{\log}|a| + \overset{+}{\log}|b|;$$

$$\log|a+b| = \overset{+}{\log}|a+b| - \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a+b}\right| \leq \overset{+}{\log}|a| + \overset{+}{\log}|b| + \log 2.$$

On a donc, $f(z)$ et $g(z)$ étant deux fonctions méromorphes,

$$m(r; f+g) \leq m(r; f) + m(r; g) + \log 2.$$

Or comme on a évidemment

$$N(r; f+g = \infty) \leq N(r; f = \infty) + N(r; g = \infty),$$

on en déduit

$$T(r; f+g) \leq T(r; f) + T(r; g) + \log 2.$$

En particulier, si a est une constante,

$$T(r; f+a) \leq T(r; f) + \overset{+}{\log} a + \log 2.$$

Généralisation d'un théorème de M. Valiron.

Dans son mémoire (i, 3°, p. 77 et 81) M. Valiron a donné une limite supérieure du nombre des zéros de $f(z)-x$ dans le cercle $|z-z_0|=r$, connaissant une limite supérieure du nombre des zéros de $f(z)-P(z)$, $f(z)-Q(z)$, $f(z)-R(z)$ dans le cercle $|z-z_0|=2r$, dans le cas où $f(z)$ est méromorphe et $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ rationnels. Ce théorème a été précisé par M. Milloux [1] dans le cas où P, Q, R sont des constantes, puis de nouveau par M. Valiron [2]. Nous allons le généraliser pour le cas où P, Q, R sont méromorphes. Nous appliquons la méthode de M. Valiron en introduisant comme M. Milloux un théorème de Boutroux (c).

5. Soient $f(z)$, $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ des fonctions méromorphes dans le cercle $|z|=r$. a étant une constante, nous nous proposons de trouver une limite supérieure du nombre des racines de $f(z)=a$ dans un certain cercle intérieur au précédent, connaissant une limite supérieure du nombre des racines de $f-P$, $f-Q$, $f-R$ dans le cercle $|z|=r$.

Si $|z-z_0|=\rho$ est un cercle intérieur au cercle $|z|=r$, on a, en

---

(1) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z|=1$, et n'y prenant pas plus de $\mathfrak{N}$ fois trois valeurs a, b, c dont les distances sphériques sont supérieures à δ. Dès que $\mathfrak{N}$ dépasse une constante numérique, le nombre des zéros de $f(z)-x$ intérieurs au cercle $|z|=\frac{1}{20}$ est inférieur à

$$670\mathfrak{N}+11\log\frac{1}{d}+11\log\frac{1}{\delta},$$

d désignant la distance sphérique de x à une certaine valeur exceptionnelle possible (f: 2, p. 202).

(2) Si $f(z)$ est méromorphe pour $|z|<1$ et ne prend que $\mathfrak{N}$ fois au plus les valeurs 0, 1, ∞, le nombre des zéros de $f(z)-x$ dans le cercle $|z|<r<1$ est moindre que

$$\frac{A\mathfrak{N}+B}{(1-r)^{\alpha}}+\frac{1}{(1-r)^{\beta}}\log\frac{1}{\delta},$$

sauf au plus pour les x représentés sur la sphère de Riemann à l'intérieur d'un cercle $C(r;f)$ de rayon $\delta<1$. A, B, α, β sont des constantes absolues (i: 5°).

supposant $f(z_0)$ fini, différent de a, et $\lambda > 1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(|z-z_0|=\rho;\, f=a) &\geq \int_{\frac{\rho}{\lambda}}^{\rho} n(|z-z_0|=t;\, f=a)\frac{dt}{t} \\
&\geq n\left(|z-z_0|=\frac{\rho}{\lambda};\, f=a\right)\int_{\frac{\rho}{\lambda}}^{\rho}\frac{dt}{t} \\
&= n\left(|z-z_0|=\frac{\rho}{\lambda};\, f=a\right)\log\lambda.
\end{aligned}$$

Or comme on a

$$\mathrm{N}(|z-z_0|=\rho;\, f=a) \leq \mathrm{T}(|z-z_0|=\rho;\, f-a) + \log\left|\frac{1}{f(z_0)-a}\right|,$$

$$\mathrm{T}(|z-z_0|=\rho;\, f-a) \leq \mathrm{T}(|z-z_0|=\rho;\, f) + \overset{+}{\log}|a| + \log 2,$$

on en déduit

$$(1)\quad \begin{aligned} & n\left(|z-z_0|=\frac{\rho}{\lambda};\, f=a\right) \\ & \quad < \frac{1}{\log\lambda}\left[\mathrm{T}(|z-z_0|=\rho;\, f) + \log\left|\frac{1}{f(z_0)-a}\right| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2\right].\end{aligned}$$

Cherchons maintenant une limite supérieure de $\mathrm{T}(|z-z_0|=\rho;\, f)$ en faisant intervenir les fonctions $f-\mathrm{P}$, $f-\mathrm{Q}$, $f-\mathrm{R}$. On a, en écrivant $\mathrm{T}(\varphi)$ à la place de $\mathrm{T}(|z-z_0|=\rho;\, \varphi)$,

$$f = (f-\mathrm{Q}) + \mathrm{Q},$$

d'où

$$(i_1)\qquad \mathrm{T}(f) \leq \mathrm{T}(f-\mathrm{Q}) + \mathrm{T}(\mathrm{Q}) + \log 2;$$

d'ailleurs

$$(i_2)\qquad \mathrm{T}(f-\mathrm{Q}) = \mathrm{T}\left(\frac{1}{f-\mathrm{Q}}\right) + \mathrm{C}(f-\mathrm{Q})_{z_0};$$

de même

$$\frac{1}{f-\mathrm{Q}} \equiv \frac{\mathrm{Q}-\mathrm{P}}{f-\mathrm{Q}}\,\frac{1}{\mathrm{Q}-\mathrm{P}},$$

d'où

$$(i_3)\qquad \mathrm{T}\left(\frac{1}{f-\mathrm{Q}}\right) \leq \mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{Q}-\mathrm{P}}{f-\mathrm{Q}}\right) + \mathrm{T}\left(\frac{1}{\mathrm{Q}-\mathrm{P}}\right);$$

de même

$$\frac{Q-P}{f-Q} \equiv \frac{f-P}{f-Q} - 1,$$

d'où

$$(i_4) \qquad T\left(\frac{Q-P}{f-Q}\right) \leqq T\left(\frac{f-P}{f-Q}\right) + \log 2;$$

de même

$$\frac{f-P}{f-Q} \equiv \frac{f-P}{f-Q}\,\frac{R-Q}{R-P}\,\frac{R-P}{R-Q},$$

d'où

$$(i_5) \qquad T\left(\frac{f-P}{f-Q}\right) \leqq T\left(\frac{f-P}{f-Q}\,\frac{R-Q}{R-P}\right) + T\left(\frac{R-P}{R-Q}\right);$$

de même

$$\frac{R-P}{R-Q} \equiv 1 + (Q-P)\frac{1}{R-Q},$$

d'où

$$(i_6) \qquad T\left(\frac{R-P}{R-Q}\right) \leqq T(P) + T(Q) + T\left(\frac{1}{R-Q}\right) + 2\log 2.$$

En ajoutant de (i_1) à (i_6) membre à membre, on trouve

$$T(f) \leqq T\left(\frac{f-P}{f-Q}\,\frac{R-Q}{R-P}\right) + T\left(\frac{1}{P-Q}\right) + T\left(\frac{1}{Q-R}\right) + T(P) + 2\,T(Q) + C(f-Q)_{z_0} + 4\log 2,$$

d'où, en remplaçant dans (1),

$$(2) \quad n\left(|z-z_0| = \frac{\rho}{\lambda};\ f=a\right) < \frac{1}{\log\lambda}\left[T(F) + T\left(\frac{1}{P-Q}\right) + T\left(\frac{1}{Q-R}\right) + T(P) + 2\,T(Q)\right]_{|z-z_0|=\rho} + \frac{1}{\log\lambda}\left[\log\left|\frac{1}{f(z_0)-a}\right| + C(f-Q)_{z_0} + \overset{+}{\log}|a| + 5\log 2\right],$$

où les fonctions T du premier crochet du second membre sont relatives au cercle $|z-z_0| = \rho$ et où l'on a posé

$$F(z) \equiv \frac{f-P}{f-Q}\,\frac{R-Q}{R-P}.$$

4. Pour limiter T(F) nous appliquons une inégalité fondamentale de M. Valiron (i; 3°, p. 72).

$$
\begin{aligned}
(3)\quad & \mathrm{T}(|z-z_0|=\rho : \mathrm{F}) \\
& < 24[\mathrm{N}(|z-z_0|=\mu\rho : \mathrm{F}=0)+\mathrm{N}(|z-z_0|=\mu\rho : \mathrm{F}=1) \\
& \qquad\qquad\qquad + \mathrm{N}(|z-z_0|=\mu\rho : \mathrm{F}=\infty)] \\
& \quad + 36\log\frac{1}{1-\dfrac{1}{\mu}} + 12\overset{+}{\log}|\mathrm{F}(z_0)| + \overset{+}{\log}\frac{1}{\mu\rho|\mathrm{F}'(z_0)|} + \text{const.} \quad (\mu > 1).
\end{aligned}
$$

On en déduit finalement

$$
(4)\qquad n\left(|z-z_0|=\frac{\rho}{\lambda} ; f=a\right) < \frac{1}{\log\lambda}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}),
$$

où l'on a posé

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{A} = {} & 24[\mathrm{N}(|z-z_0|=\mu\rho : \mathrm{F}=0) \\
& + \mathrm{N}(|z-z_0|=\mu\rho : \mathrm{F}=1) + \mathrm{N}(|z-z_0|=\mu\rho : \mathrm{F}=\infty)], \\
\mathrm{B} = {} & \mathrm{T}\left(|z-z_0|=\rho : \frac{1}{\mathrm{P}-\mathrm{Q}}\right) + \mathrm{T}\left(|z-z_0|=\rho : \frac{1}{\mathrm{Q}-\mathrm{R}}\right) \\
& + \mathrm{T}(|z-z_0|=\rho : \mathrm{P}) \qquad + 2\mathrm{T}(|z-z_0|=\rho : \mathrm{Q}), \\
\mathrm{C} = {} & 12\overset{+}{\log}|\mathrm{F}(z_0)| + \mathrm{C}(f-\mathrm{Q})_{z_0} + \overset{+}{\log}\frac{1}{\mu\rho|\mathrm{F}'(z_0)|} \\
& + 36\log\frac{1}{1-\dfrac{1}{\mu}} + \log\left|\frac{1}{f(z_0-a)}\right| + \overset{+}{\log}|a| + 5\log 2 + \text{const.}
\end{aligned}
\right.
$$

On remarque que l'inégalité (4) n'est utile que si $\mathrm{F}'(z_0)$ n'est pas trop petit, sans quoi il faut utiliser l'inégalité (2). Nous distinguerons donc deux cas suivant que $|\mathrm{F}'(z_0)|$ est grand ou petit. Nous supposons bien entendu que le cercle $|z-z_0|=\mu\rho$ est encore dans le cercle $|z|=r$, et que $\mathrm{F}(z_0)\neq\infty$.

Pour trouver une limitation des expressions (5), nous décomposons les fonctions T en leurs composantes m et N, et nous les limiterons séparément.

5. Limitation des fonctions N. — Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z|=r$. Soit $|z-z_0|=\mathrm{R}$ un cercle intérieur à $|z|=r$. Si $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_p$ sont les points intérieurs à $|z-z_0|=\mathrm{R}$, en lesquels on a $\varphi(z) = b$, et si $\varphi(z_0) \neq b$, on peut écrire

$$N(|z - z_0| = R; \varphi = b) = \log \frac{R^p}{MP_1 . MP_2 \ldots MP_p},$$

où M est le point d'affixe z_0. Or le dénominateur peut être limité par le théorème de Boutroux, que nous utilisons sous la forme de M. H. Cartan (d; p. 18) : $P_1, P_2, \ldots, P_p$ *étant p points distincts ou non d'un plan et h un nombre positif arbitraire, on a*

$$MP_1 . MP_2 \ldots MP_p \geq h^p$$

pour tout point M, *sauf peut-être pour des points qui peuvent être enfermés dans des cercles en un nombre au plus égal à p dont la somme des rayons est* $2eh$.

Nous en déduisons que dans toute bande de largeur K, formée par deux courbes parallèles, il y a au moins une courbe (B), parallèle aux courbes frontières de la bande, telle qu'en tout point M de (B), l'inégalité précédente est vérifiée, pourvu qu'on prenne $h < \frac{K}{4e}$ $\left(\text{par exemple } h = \frac{K}{12}\right)$. Nous appellerons une telle courbe (B) une courbe de Boutroux. Pour un tel point M d'affixe z_0 on a donc

$$N(|z - z_0| = R; \varphi = b) < \log \frac{R^p}{\left(\frac{K}{12}\right)^p} = p \log \frac{12R}{K}.$$

Si $\frac{R}{K}$ est une constante numérique supérieure à 1, ce qui aura toujours lieu dans la suite, on a donc

$$N(|z - z_0| = R; \varphi = b) < \text{const.}\, p.$$

6. (H_1). — Revenons à notre problème. Soient $\mathfrak{N}$ le plus grand nombre des zéros de $f - P$, $f - Q$, $f - R$, et n le nombre des zéros et des pôles de l'ensemble des fonctions P, Q, R, P — Q, Q — R, R — P dans le cercle $|z| = r$ de centre O.

Définissons une courbe (B) relative à l'ensemble de toutes ces fonctions, c'est-à-dire relative aux points $P_1, P_2, \ldots, P_p$ en lesquels on a $g(z) = 0$, avec

$$g = \left\{ \begin{array}{l} f-P,\ f-Q,\ f-R,\ P,\ Q,\ R,\ P-Q,\ Q-R,\ R-P, \\ \dfrac{1}{P},\ \dfrac{1}{Q},\ \dfrac{1}{R},\ \dfrac{1}{P-Q},\ \dfrac{1}{Q-R},\ \dfrac{1}{R-P}. \end{array} \right.$$

Nous considérons d'abord une bande formée par deux droites parallèles situées à une distance $\frac{r}{20}$ du point O. La courbe de Boutroux correspondante est une droite (D). Nous considérons ensuite la bande formée par la couronne circulaire de centre O′, projection de O sur la droite (D), et dont les cercles limites ont pour rayons $\frac{r}{9}$ et $\frac{r}{9} + \frac{r}{10}$. La courbe de Boutroux correspondante est un cercle (C) de centre O′. Nous prendrons comme courbe (B) l'ensemble formé par le cercle (C), et la partie de la droite (D) intérieure à (C), c'est-à-dire son diamètre.

Dorénavant, le point z_0 de (2) ou (4) sera toujours sur la courbe (B). On choisira les constantes λ et μ de façon que le cercle $|z - z_0| = \frac{\rho}{\lambda}$ contienne toujours le cercle $|z| = \frac{r}{20}$, et que le cercle $|z - z_0| = \mu\rho$ soit toujours intérieur au cercle $|z| = r$. Pour cela, il suffit par exemple que le cercle $|z - z_0| = \rho$ ait son centre sur (B), soit tangent au cercle $z = \frac{59}{60} r$ et qu'on prenne

$$\lambda = \frac{13}{10}, \qquad \mu = \frac{169}{166}.$$

Dans ces conditions, on voit immédiatement que toutes les fonctions N intervenant dans (2) ou (4) sont limitées supérieurement par l'expression

$$A_0 \mathfrak{N} + B_0 n, \tag{6}$$

où A_0 et B_0 sont des constantes numériques.

Distinguons alors les deux cas annoncés à la fin du n° **4**.

PREMIER CAS. — *En un point z_0 de la courbe* (B) *on a*

$$\log \mu\rho |F'(z_0)| > -n.$$

Cherchons d'abord une limite supérieure pour C (5). Nous choisirons pour z_0 le premier point satisfaisant à l'inégalité précédente, rencontré en cheminant sur (B) à partir de O′; on a donc en appelant O′ l'affixe du point O′

$$|F(z_0)| < |F(O')| + \text{const.};$$

donc

$$\overset{+}{\log}|F(z_0)| < \overset{+}{\log}|F(O')| + \text{const.}$$

Nous supposons maintenant $f(O')$ fini, sans quoi on prendrait un point voisin de la corde (B) comme le centre du cercle (B). De même nous supposons $f(z_0)$ fini, quitte à remplacer z_0 par un point voisin z'_0 rencontré avant z_0 et en lequel on aurait, par exemple,

$$\log \mu\rho |F(z'_0)| > -\frac{n}{2}.$$

En choisissant ensuite P (z) et Q (z) de façon que l'on ait

$$\left|\frac{f(O') - P(O')}{f(O') - Q(O')}\right| \leqq 1,$$

on peut écrire

$$(i_7) \quad \overset{+}{\log}|F(O')| \leqq \overset{+}{\log}\left|\frac{R(O') - Q(O')}{R(O') - P(O')}\right| = \overset{+}{\log}\left|1 + \frac{P(O') - Q(O')}{R(O') - P(O')}\right|$$
$$\leqq \overset{+}{\log}|P(O')| + \overset{+}{\log}|Q(O')| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{R(O') - P(O')}\right| + 2\log 2.$$

$$(i_8) \quad C(f - Q)_{z_0} = \log|f(z_0) - Q(z_0)| \leqq \overset{+}{\log}|f(z_0)| + \overset{+}{\log}|Q(z_0)| + \log 2.$$

En tenant compte des inégalités (i_7) et (i_8), on trouve finalement

$$(7) \quad C < 12\overset{+}{\log}|P(O')| + 12\overset{+}{\log}|Q(O')| + 12\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{P(O') - R(O')}\right|$$
$$+ A_1 n + \text{const.} + \left(\log\left|\frac{1}{f(z_0) - a}\right| + \overset{+}{\log}|f(z_0)| + \overset{+}{\log}|a|\right).$$

En tenant compte de (6) et de l'hypothèse (H_1) on trouve immédiatement

$$(8) \qquad A < A_2 \mathfrak{N} + B_2 n.$$

Limitation des fonctions m.

7. Pour limiter la quantité B (5) nous sommes obligés de faire une nouvelle hypothèse permettant de limiter les fonctions m intervenant dans B. M. Valiron nous a suggéré de limiter la moyenne superficielle de façon que P, Q, et R diffèrent sensiblement et que en même temps P et Q ne deviennent pas souvent trop grands. Supposons donc qu'on ait relativement au cercle $|z| = r$,

$$(\mathrm{H}_2) \qquad \frac{1}{\pi r^2} \iint^{\bullet} \overset{+}{\log} |\Psi(z)| \, d\sigma < \log \frac{1}{d} \qquad (d < 1),$$

où Ψ est l'une quelconque des fonctions P, Q, $\frac{1}{P-Q}$, $\frac{1}{Q-R}$, $\frac{1}{R-P}$. On s'appuie alors sur le lemme suivant :

Soit $\Psi(z)$ une fonction méromorphe dans un cercle de rayon r. Si l'on a pour ce cercle

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint^{\bullet} \overset{+}{\log} |\Psi(z)| \, d\sigma < A,$$

il existe dans toute couronne

$$\frac{r}{k} \leqq |z - z_0| \leqq \frac{r}{k'}$$

intérieure au cercle $|z| = r$ au moins une circonférence $|z - z_0| = r_0$ telle que l'on ait

$$m(|z - z_0| = r_0;\, \Psi) < \frac{k^2 k'}{k - k'} A.$$

(Pour plus de clarté, nous reporterons la démonstration de ce lemme à la fin de ce paragraphe.)

8. Le premier terme par exemple du second membre de B (5) s'écrit

$$\mathrm{T}\left(|z - z_0| = \rho;\, \frac{1}{P-Q}\right) = m\left(|z - z_0| = \rho;\, \frac{1}{P-Q}\right) + \mathrm{N}(z - z_0| = \rho;\, P - Q = 0).$$

Comme le cercle $|z - z_0| = \rho$ est tangent au cercle $|z| = \left(1 - \frac{1}{60}\right) r$, il existe dans la couronne, formée par ce cercle et le cercle concentrique tangent au cercle $|z| = r$, une circonférence $|z - z| = r_0$ pour laquelle on a

$$m\left(|z - z_0| = r_0;\, \frac{1}{P-Q}\right) < C_1 \log \frac{1}{d}, \qquad \rho \leqq r_0 \leqq \rho + \frac{r}{60}.$$

Nous avons évidemment, d'après l'hypothèse (H_1),

$$N(|z - z_0| = r_0; P - Q = 0) < B_3 n.$$

Or comme la fonction $T(r)$ est non décroissante, on a donc

$$T\left(|z - z_0| = \rho; \frac{1}{P - Q}\right) \leqq T\left(|z - z_0| = r_0; \frac{1}{P - Q}\right) < C_1 \log\frac{1}{d} + B_3 n.$$

En procédant de la même façon pour les autres termes de B (5), on trouve finalement

$$B < B_4 n + C_1 \log\frac{1}{d}. \tag{9}$$

Les hypothèses (H_2) nous permettent maintenant de limiter davantage la quantité C (7). Nous avons par exemple pour un cercle quelconque de centre O' et intérieur au cercle $|z| = r$,

$$\log|P(O')| = T[|z - O'|; P(z)] - T\left[|z - O'|; \frac{1}{P(z)}\right] \leqq T[|z - O'|; P(z)].$$

En faisant intervenir comme tout à l'heure une couronne centrée en O', intérieure au cercle $|z| = r$, et dont les rayons sont dans un rapport constant avec r, on y trouve encore un cercle pour lequel on a, d'après l'hypothèse (H_2),

$$m(|z - O'|; P) < C_2 \log\frac{1}{d}.$$

Or comme on a dans tous les cas, d'après l'hypothèse (H_1),

$$N(|z - O'|; P = \infty) < B_5 n,$$

on trouve

$$\log|P(O')| < B_5 n + C_2 \log\frac{1}{d}.$$

Nous pouvons appliquer le même procédé aux termes analogues du second membre (7).

Nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned} C < B'_5 n + C_2 \log\frac{1}{d} + \text{const.} \\ + \left[\log\left|\frac{1}{f(z_0) - a}\right| + \overline{\log}|f(z_0)| + \overline{\log}|a|\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Finalement on a

$$n\left(|z-z_0|=\frac{\rho}{\lambda};\, f=a\right)$$
$$< \alpha\mathfrak{N}+\beta n+\gamma\log\frac{1}{d}$$
$$+\frac{1}{\log\lambda}\left[\log\left|\frac{1}{f(z_0)-a}\right|+\overset{+}{\log}|f(z_0)|+\overset{+}{\log}|a|\right]+\text{const.}$$

La dernière parenthèse est de la forme

$$P=\log\left|\frac{1}{A-B}\right|+\overset{+}{\log}|A|+\overset{+}{\log}|B|.$$

Pour limiter une expression de ce genre, considérons deux cas :

1° L'un au moins des nombres $|A|$ ou $|B|$ est inférieur à $\frac{1}{\delta}$; soit $|B|<\frac{1}{\delta}$.

On a

$$\overset{+}{\log}|A|=\overset{+}{\log}|A-B+B|\leqq\overset{+}{\log}|A-B|+\overset{+}{\log}|B|+\log 2,$$

d'où

$$P\leqq\log\left|\frac{1}{A-B}\right|+\overset{+}{\log}|A-B|+2\overset{+}{\log}|B|+\log 2$$
$$=\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{A-B}\right|+2\overset{+}{\log}|B|+\log 2.$$

En supposant

$$|A-B|>\delta,\qquad |B|<\frac{1}{\delta},\qquad \delta<\frac{1}{2},$$

on a donc

$$P<4\log\frac{1}{\delta}.$$

2° Aucun des nombres $|A|$ et $|B|$ n'est inférieur à $\frac{1}{\delta}$. On a donc

$$|A|\geqq\frac{1}{\delta}>2,\qquad |B|\geqq\frac{1}{\delta}>2,$$
$$\overset{+}{\log}|A|=\log|A|,\qquad \overset{+}{\log}|B|=\log|B|,$$

d'où

$$P=\log\left|\frac{AB}{A-B}\right|=\log\left|\frac{1}{\frac{1}{A}-\frac{1}{B}}\right|,$$

$\left|\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right|$ représente la distance des inverses des points $z = A$ et $z = B$ par rapport au cercle $|z| = 1$. En supposant donc la distance sphérique des images sphériques des points $z = A$ et $z = B$ supérieure à δ, on voit facilement que l'on a

$$P < \text{const.} \log \frac{1}{\delta}.$$

Ceci reste naturellement exact dans le premier cas. On en déduit

$$(11) \quad n\left(|z - z_0| = \frac{\rho}{k};\ f = a\right)$$
$$< \alpha\mathfrak{N} + \beta n + \gamma_1 \log \frac{1}{d} + \gamma_2 \log \frac{1}{\delta} + \text{const.} \qquad \left(d < \frac{1}{2},\ \delta < \frac{1}{2}\right),$$

quel que soit a, sauf peut-être pour les a dont les images sphériques peuvent être enfermées dans un cercle de la sphère de rayon δ.

Comme le cercle $|z - z_0| = \frac{\rho}{k}$ contient le cercle $|z| = \frac{r}{20}$, le second membre de (11) limitera *a fortiori* le nombre des zéros de $f(z) - a$ dans $|z| = \frac{r}{20}$.

Deuxième cas. — *En tout point z de la courbe* (B) *on a*

$$\log \mu_{\rho} |F'(z)| < -n.$$

On en déduit comme plus haut

$$\overline{\log} |F(z)| < \overline{\log} |F(O')| + \text{const.} < B'n + C' \log \frac{1}{d} + \text{const.}$$

Si r_1 est le rayon du cercle (B) on a donc

$$m(|z - O'| = r_1,\ F) < B'n + C' \log \frac{1}{d} + \text{const.},$$

$$N(|z - O'| = r_1 : F = \infty) < A'\mathfrak{N} + B''n + C'' \log \frac{1}{d} + \text{const.}$$

Appliquons (2) en y faisant $z_0 = O'$, $\rho = r_1$. D'après les inégalités précédentes on a :

$$T(|z - O'| = r_1 : F) < A''\mathfrak{N} + B''n + C'' \log \frac{1}{d} + \text{const.}$$

Les autres termes intervenant au second membre de (2) se limitent comme dans le premier cas, et comme le cercle $|z - O'| = \frac{r_1}{\lambda}$ contient encore le cercle $|z| = \frac{r}{20}$, nous avons finalement le théorème :

I. *Soient* $f(z)$, $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ *des fonctions méromorphes dans un cercle de rayon r, d et* δ *des nombres donnés inférieurs à* $\frac{1}{2}$, $\mathfrak{N}$ le plus *grand nombre des zéros des fonctions* $f - P$, $f - Q$, $f - R$ *et n le nombre des zéros et des pôles de l'ensemble des fonctions* P, Q, R, P — Q, Q — R, R — P *dans ce même cercle. Si dans ce cercle*

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint \overset{+}{\log}\left(|P| + |Q| + \left|\frac{1}{P - Q}\right| + \left|\frac{1}{Q - R}\right| + \left|\frac{1}{R - P}\right|\right) d\sigma < \log\frac{1}{d},$$

le nombre des racines de $f(z) - a$ *dans un cercle concentrique de rayon* $\frac{r}{20}$ *est au plus égal à*

$$\alpha\mathfrak{N} + \beta n + \gamma_1 \log\frac{1}{d} + \gamma_2 \log\frac{1}{\delta} + \text{const.},$$

sauf au plus pour des valeurs a dont la distance sphérique (sur la sphère de Riemann) à une valeur exceptionnelle possible est inférieure à δ. (α, β, γ_1, γ_2 *sont des constantes numériques*).

9. Donnons maintenant la démonstration du lemme.

Soit $\Psi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z| = r$. Supposons qu'on ait dans ce cercle

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint \overset{+}{\log}|\Psi(z)|\, d\sigma < A.$$

Nous avons donc *a fortiori* dans la couronne (s) définie par

$$\frac{r}{k} \leqq |z - z_0| \leqq \frac{r}{k'},$$

supposée intérieure au cercle $|z| = r$,

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{(s)} \overset{+}{\log}|\Psi(z)|\, d\sigma < A,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{\frac{r}{k}}^{\frac{r}{k'}} t\,dt\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|\Psi(z_0+te^{i\theta})|\,d\theta < A.$$

Le premier membre s'écrit encore

$$\frac{2}{r^2}\int_{\frac{r}{k}}^{\frac{r}{k'}} t\,dt\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|\Psi(z_0-te^{i\theta})|\,d\theta = \frac{2}{r^2}\int_{\frac{r}{k}}^{\frac{r}{k'}} t\,m(|z-z_0|=t;\Psi)\,dt.$$

Or comme la dernière intégrale est supérieure ou égale à

$$\frac{2}{kr}\int_{\frac{r}{k}}^{\frac{r}{k'}} m(z-z_0|=t;\Psi)\,dt,$$

on a, *a fortiori*,

$$\frac{2}{kr}\int_{\frac{r}{k}}^{\frac{r}{k'}} m(|z-z_0|=t;\Psi)\,dt < A.$$

Il y a donc dans l'intervalle $\frac{r}{k} \leqq t \leqq \frac{r}{k'}$ au moins une valeur $t = r_0$ telle que

$$m(|z-z_0|=r_0;\Psi) < \frac{A}{C},$$

où C est convenablement choisi. Car, s'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$\frac{2}{kr}\int_{\frac{r}{k}}^{\frac{r}{k'}} m(|z-z_0|=t;\Psi)\,dt > \frac{2}{kr}\int_{\frac{r}{k}}^{\frac{r}{k'}}\frac{A}{C}\,dt = \frac{2}{kr}\,\frac{A}{C}\left(\frac{r}{k'}-\frac{r}{k}\right).$$

Il y a contradiction si l'on prend ce dernier terme supérieur à A. On voit qu'il suffit de prendre

$$\frac{1}{C} = \frac{k^2k'}{k-k'}.$$

10. Faisons dans le théorème I $d = \delta = e^{-\mathfrak{M}}$. On obtient comme limite supérieure des racines de $f(z) - x$

$$A = \alpha'\mathfrak{M} + 3n + \text{const.}$$

L'ensemble exceptionnel est inclus dans un cercle de rayon $e^{-\mathfrak{N}}$. Si deux valeurs x sont à une distance sphérique supérieure à $e^{-\mathfrak{N}}$, l'une d'elles au moins est extérieure à l'ensemble exceptionnel. Si l'on suppose ensuite que le nombre des zéros de $f - x$ correspondant à ces deux valeurs de x est supérieur à Λ, on se met en contradiction avec le théorème I, de sorte que l'une au moins des hypothèses de ce théorème ne sera plus exacte. On obtient ainsi immédiatement le corollaire suivant, généralisation d'un théorème de M. Milloux (f; 2°, p. 202) :

I'. *Soit* P, Q, R *un système quelconque de trois fonctions méromorphes dans un cercle* C *de rayon* r, *et vérifiant dans ce cercle l'inégalité*

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint^{C} \overline{\log}\left(|P| + |Q| + \left|\frac{1}{P-Q}\right| + \left|\frac{1}{Q-R}\right| + \left|\frac{1}{R-P}\right|\right) d\sigma < \mathfrak{N}.$$

Supposons que le nombre des zéros et des pôles des fonctions P, Q, R, Q — R, P — Q, R — P *dans le cercle* (C) *soit inférieur à* $\varepsilon\mathfrak{N}$, *où* ε *est inférieure à une certaine constante numérique* < 1. *Si la fonction* $f(z)$, *méromorphe dans le cercle* (C), *prend dans le cercle concentrique à* (C) *et de rayon* 20 *fois moindre, plus de* $\mathfrak{N}$ *fois deux valeurs, dont la distance sphérique est plus grande que* $e^{-\mathfrak{N}}$, *l'équation* $f - \Pi = 0$, *où* Π *est l'une au moins des fonctions* P, Q, R, *admet dans le cercle* (C) *plus de* $k\mathfrak{N}$ *racines.*

k est une constante numérique. Le corollaire est valable dès que $\mathfrak{N}$ dépasse une certaine constante numérique.

11. On déduit immédiatement du théorème I une généralisation d'un théorème de M. Milloux (f; 2°, p. 203). Soient $f(z)$, $P(z)$, $Q(z)$; $R(z)$ des fonctions méromorphes dans une région (Δ) contenant à son intérieur un domaine (D). Partageons le domaine (D) en p domaines partiels (D_1), (D_2), ..., (D_p). Soit (Γ_i) le cercle concentrique au plus petit cercle contenant (D_i) et de rayon 20 fois plus grand. Nous faisons les hypothèses suivantes :

1° Le nombre des zéros de $f(z) - a$ dans la région (D) est supérieur à M pour certaines valeurs de a;

2° Le nombre des zéros et des pôles de l'ensemble des fonctions P, Q, R, P — Q, Q — R, R — P dans la région (Δ) est égal à n;

3° On a, relativement à chaque cercle (Γ_i), $i = 1, 2, \ldots p$,

$$\frac{1}{\text{aire}\,\Gamma_i}\iint_{\Gamma_i} \overset{+}{\log}\left(|P| + |Q| + \left|\frac{1}{P-Q}\right| + \left|\frac{1}{Q-R}\right| + \left|\frac{1}{R-P}\right|\right) d\sigma < \log\frac{1}{d}$$
$$\left(d < \frac{1}{2}\right);$$

4° Le nombre des zéros de $f - P$, $f - Q$, $f - R$ dans chaque cercle (Γ_i) est inférieur à $\mathfrak{N}$. Le théorème I nous montre alors que dans un quelconque des domaines (D_i) le nombre des zéros de $f(z) - a$ est inférieur à

$$\alpha\mathfrak{N} + \beta n + \gamma_1 \log\frac{1}{d} + \gamma_2 \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a - A_i}\right| + \text{const.},$$

où A_i désigne une certaine valeur exceptionnelle possible pouvant dépendre de (D_i). Par conséquent le nombre des zéros de $f(z) - a$ dans le domaine (D) est inférieur à

$$\alpha p\mathfrak{N} + \beta pn + \gamma_1 p \log\frac{1}{d} + \gamma_2 \log\frac{1}{|a - A_1|.|a - A_2|\ldots|a - A_p|} + p\,\text{const}.$$

Pour limiter le dernier terme, supposons l'hypothèse 1° vérifiée pour toutes les valeurs a du cercle $|z| \leqq \frac{1}{2}$, de façon à pouvoir appliquer le théorème de Boutroux-Cartan. Nous prenons comme valeur de a l'affixe d'un point de Boutroux du cercle $|z| \leqq \frac{1}{2}$ pour lequel on a

$$|a - A_1|.|a - A_2|\ldots|a - A_p| > \frac{1}{12^p}.$$

a étant choisi ainsi, le nombre des zéros de $f(z) - a$ dans le domaine (D) est inférieur à

$$\alpha p\mathfrak{N} + \beta pn + \gamma_1 p \log\frac{1}{d} - p\,\text{const.},$$

où α, β, γ_1 sont des constantes numériques. Nous mettons l'hypothèse 1° en contradiction en prenant

$$d = e^{-\mathfrak{N}}, \qquad M = p[(\alpha + \gamma_1)\mathfrak{N} + \beta n + \text{const.}] = p(A\mathfrak{N} + Bn + C).$$

En supposant $n < \frac{\varepsilon M}{p}$, on en déduit le théorème :

II. *Soient* $f(z)$, $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ *des fonctions méromorphes dans une région* (Δ) *du plan contenant à son intérieur un domaine* (D). *On partage le domaine* (D) *en p domaines partiels et l'on construit les cercles* (Γ_i) *concentriques aux plus petits cercles contenant les domaines partiels* (D_i) *et de rayons* 20 *fois plus grands. On fait les hypothèses suivantes :*

(c_1) *Le nombre des zéros dans* $f(z) - a$ *dans* (D) *est supérieur à* M *pour toutes les valeurs de a pour lesquelles on a* $|a| < \frac{1}{2}$.

$$(c_2) \qquad \frac{1}{\text{aire}\,\Gamma_i}\iint_{\Gamma_i} \overset{+}{\log}\left(|P|+|Q|+\left|\frac{1}{P-Q}\right|+\left|\frac{1}{Q-R}\right|+\left|\frac{1}{R-P}\right|\right)d\sigma < \frac{M}{p}.$$

(c_3) *Le nombre des zéros et des pôles des fonctions* P, Q, R, P — Q, Q — R, R — P *dans* (Δ) *est inférieur à* $\frac{\varepsilon M}{p}$ *(où* ε *est inférieur à une certaine constante numérique inférieure à* 1).

Alors il existe nécessairement un cercle (Γ_i) *à l'intérieur duquel l'équation* $f - H = 0$, H *étant l'une au moins des fonctions* P, Q, R, *admet plus de* $c\frac{M}{p}$ *racines. c est une constante numérique. Le théorème est valable dès que* $\frac{M}{p}$ *dépasse une certaine constante numérique.*

Remarque. — Il est évident que II est encore exact si l'hypothèse (c_1) est vérifiée pour les valeurs a, dont la représentation sphérique est incluse dans un cercle de rayon $\frac{1}{2}$.

CHAPITRE II.

SUR LES CERCLES DE REMPLISSAGE DES FONCTIONS MÉROMORPHES DANS LE PLAN SAUF A L'INFINI.

12. Nous allons généraliser quelques-uns des théorèmes établis par MM. Valiron et Milloux sur les zéros de $f(z) - H(z)$ dans les cercles de remplissage, $f(z)$ et $H(z)$ étant des fonctions méromorphes sauf à l'infini. Nous nous appuierons pour cela sur des théorèmes établis par ces auteurs dans le cas où les H sont des constantes en adaptant leurs méthodes à ce cas un peu plus général.

13. M. Milloux démontre le théorème suivant (*f*; 2°, p. 206) :

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre nul ou fini. Dans la couronne $C(r, R)$ *définie par*

$$r < |z| < R,$$

le nombre des zéros de $f(z) - a$ est supérieur à

$$\frac{T(R; f)}{18 \log \frac{R}{r}}$$

pour toutes les valeurs de a dont les représentations sphériques sont incluses dans un cercle de rayon $\frac{1}{2}$, et ceci dès que l'on a

$$T(R) > c(f), \qquad T(R) > 12 \frac{T(kr)}{\log k} \log \frac{R}{r} \qquad \left(1 < k < \frac{R}{r}\right),$$

$c(f)$ est une constante dépendant uniquement de $f(z)$.

14. Nous allons appliquer à cette couronne le théorème II. Introduisons les notations de ce paragraphe. Partageons le plan par des demi-droites issues du point $z = 0$ en angles égaux de mesure α. Leur nombre est $\frac{2\pi}{\alpha}$. Traçons ensuite les cercles

$$|z| = r(1 + \alpha)^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de façon à diviser la couronne $C(r, R)$ en p quadrilatères curvilignes semblables. On voit qu'on a

$$n = \frac{\log \frac{R}{r}}{\log(1 + \alpha)},$$

d'où en prenant α assez petit

$$p = \frac{\log \frac{R}{r}}{\alpha^2} \text{const.}$$

Les cercles (Γ_i) dépasseront un peu la couronne $C(r, R)$ mais ils restent dans la couronne

$$(1-15\alpha)r < |z| < (1+15\alpha)R.$$

Nous prendrons donc cette dernière comme domaine (Δ) et la première comme domaine (D). La condition (c_1) sera vérifiée, si l'on prend

$$M = \frac{T(r; f)}{18 \log \frac{R}{r}},$$

Passons à la condition (c_2). Soit r_i le module du centre du cercle (Γ_i); son rayon est $(r_i\alpha \,\text{const.})$. Soit (Q_i) la plus petite couronne de centre $z = 0$ contenant (Γ_i). Elle a pour rayons r_1, r_2 :

$$(1-15\alpha)r_i < r_1 \leq |z| \leq r_2 < (1+15\alpha)r_i.$$

On a évidemment

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\text{aire}\,\Gamma_i}\iint_{(\Gamma_i)} \overset{+}{\log}|P(z)|\,d\sigma &< \frac{\text{const.}}{\pi\alpha^2 r_i^2}\iint_{(Q_i)} \overset{+}{\log}|P(z)|\,d\sigma \\
&= \frac{\text{const.}}{\alpha^2 r_i^2}\int_{r_1}^{r_2} t\,dt\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|P(t\,e^{i\theta})|\,d\theta \\
&= \frac{\text{const.}}{\alpha^2 r_i^2}\int_{r_1}^{r_2} m[t; P(z)]\,t\,dt \\
&\leq \frac{\text{const.}}{\alpha^2 r_i^2}\,T[r_2; P(z)]\int_{r_1}^{r_2} t\,dt \\
&= \frac{\text{const.}}{\alpha}\,T[r_2; P(z)].
\end{aligned}$$

Or comme on a quel que soit i

$$T[r_2; P(z)] \leq T[(1+15\alpha)R; P(z)],$$

on a aussi

$$\frac{1}{\text{aire}\,\Gamma_i}\iint_{(\Gamma_i)} \overset{+}{\log}|P(z)|\,d\sigma < \frac{\text{const.}}{\alpha}\,T[(1+15\alpha)R; P(z)].$$

De même, on trouve pour les autres termes de la condition (c_2)

$$\frac{1}{\text{aire}\,\Gamma_i}\iint_{(\Gamma_i)} \overset{+}{\log}|Q(z)|\,d\sigma < \frac{\text{const.}}{\alpha}\,T[(1+15\alpha)R; Q(z)],$$

$$\frac{1}{\text{aire}\,\Gamma_i}\iint_{(\Gamma_i)} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{P(z)-Q(z)}\right|d\sigma < \frac{\text{const.}}{\alpha}\,T\left[(1+15\alpha)R; \frac{1}{P(z)-Q(z)}\right],$$

. . . .

Or on a

$$T\left(r;\frac{1}{P-Q}\right)=T(r;P-Q)-C(P-Q)$$
$$<T(r;P)+T(r;Q)-C(P-Q)+\log 2.$$

Donc

$$\frac{1}{\text{aire}\,\Gamma_i}\iint_{(\Gamma_i)}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{P(z)-Q(z)}\right|d\sigma$$
$$<\frac{\text{const.}}{\alpha}\Big\{\ T[(1+15\alpha)R;P(z)]$$
$$+T[(1+15\alpha)R;Q(z)]-C(P-Q)+\log 2\Big\},$$

et deux expressions analogues en $Q-R$ et $R-P$. La condition (c_2) sera donc renforcée par

$$\frac{\text{const.}}{\alpha}\Big\{3\,T(R';P(z)]+3\,T[R';Q(z)]+2\,T[R';R(z)]$$
$$-C(P-Q)-C(Q-R)-C(R-P)+3\log 2\Big\}<\frac{M}{p}.$$
$$R'=(1+15\alpha)R.$$

En tenant compte des valeurs de M et p on voit donc que la condition (c_2) sera vérifiée si l'on a

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l} T[(1+15\alpha)R;\varphi(z)]<\alpha^2\dfrac{T(R;f)}{\left(\log\dfrac{R}{r}\right)^2}\text{const.},\quad \varphi(z)\equiv P(z),Q(z),R(z);\\[2ex] \qquad C[\Psi(z)]>-\alpha^2\dfrac{T(R;f)}{\left(\log\dfrac{R}{r}\right)^2}\text{const.},\\[2ex] \qquad \Psi(z)\equiv P(z)-Q(z),\ Q(z)-R(z),\ R(z)-P(z).\end{array}\right.$$

Passons à la condition (c_3). On a par exemple :

$$N[(1+16\alpha)R;P(z)=\infty]\geqq\int_{(1+15\alpha)R}^{(1+16\alpha)R}n(t;P(z)=\infty)\frac{dt}{t}$$
$$\geqq n[(1+15\alpha R;P(z)=\infty]\log\frac{1+16\alpha}{1+15\alpha}$$
$$=\text{const.}\,\alpha\,n[(1+15\alpha)R;P(z)=\infty],$$

d'où

$$n[(1+15\alpha)R;P(z)=\infty]<\frac{\text{const.}}{\alpha}N[(1+16\alpha)R;P(z)=\infty]$$
$$<\frac{\text{const.}}{\alpha}T](1+16\alpha)R;P(z)].$$

Le dernier membre limite *a fortiori* le nombre des infinis de $P(z)$ dans (Δ). On procédera de même pour les infinis de Q, R, P — Q, Q — R, R — P. Pour ces derniers on a évidemment des inégalités de la forme

$$\begin{aligned} & n[(1+15\alpha)R;\ P(z)-Q(z)=\infty] \\ & < n[(1+15\alpha)R;\ P(z)=\infty] + n[(1+15\alpha)R;\ Q(z)=\infty] \\ & < \frac{\text{const.}}{\alpha}\{T[(1+16\alpha)R;\ P(z)] + T[(1+16\alpha)R;\ Q(z)]\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des infinis de P, Q, R, P — Q, Q — R, R — P dans (Δ) est donc limité par

$$\frac{\text{const.}}{\alpha}\{T[R';\ P(z)] + T[R';\ Q(z)] + T[R';\ R(z)]\}.$$
$$R' = (1+16\alpha)R.$$

Pour limiter le nombre des zéros de ces mêmes fonctions dans (Δ) on écrira

$$\begin{aligned} n[(1+15\alpha)R;\ P(z)=0] &< \frac{\text{const.}}{\alpha} T\left[(1+16\alpha)R;\ \frac{1}{P(z)}\right] \\ &= \frac{\text{const.}}{\alpha}\{T[(1+16\alpha)R;\ P(z)] - C(P)\}, \end{aligned}$$

et deux expressions analogues pour $Q(z)$ et $R(z)$.

De même

$$\begin{aligned} & n[(1+15\alpha)R;\ P(z)-Q(z)=0] \\ & < \frac{\text{const.}}{\alpha} T\left[(1+16\alpha)R;\ \frac{1}{P(z)-Q(z)}\right] \\ & = \frac{\text{const.}}{\alpha}\{T[(1+16\alpha)R;\ P(z)-Q(z)] - C(P-Q)\} \\ & \leqq \frac{\text{const.}}{\alpha}\{T(1+16\alpha)R;\ P(z)] + T[(1+16\alpha)R;\ Q(z)] + \log 2 - C(P-Q)\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des zéros de P, Q, R, P — Q, Q — R, R — P dans (Δ) est donc limité par

$$\begin{aligned} \frac{\text{const.}}{\alpha}\{ & 2T[R';\ P(z)] + 2T[R';\ Q(z)] + 2T[R';\ R(z)] - C(P) \\ & - C(Q) - C(R) - C(P-Q) - C(Q-R) - C(R-P) + 3\log 2\}. \end{aligned}$$

On voit donc que la condition (c_3) est vérifiée dès que l'on a

$$(2)\begin{cases} T[(1+16\alpha)R;\varphi(z)] < \dfrac{c\varepsilon\alpha^3}{\left(\log\dfrac{R}{r}\right)^2}T(R;f), \\ \varphi(z)\equiv P(z),\ Q(z),\ R(z); \\ C[\Psi(z)] > -\dfrac{c\varepsilon\alpha^3\,T(R;f)}{\left(\log\dfrac{R}{r}\right)^2}, \\ \Psi(z)\equiv P(z),\ Q(z),\ R(z),\ P(z)-Q(z),\ Q(z)-R(z),\ R(z)-P(z). \end{cases}$$

Nous vérifierons évidemment (1) et (2) à la fois par les seules inégalités (2), en y faisant $c\varepsilon=\alpha$, α étant choisi assez petit. On en déduit finalement :

III. *Soient* $f(z)$ *une fonction méromorphe d'ordre nul ou fini,* $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ *un système quelconque de trois fonctions méromorphes. Supposons vérifiées les conditions suivantes :*

$$(\mathfrak{M})\quad T(r;f)>c(f),\qquad T(R;f)>12\,\frac{T(kr;f)}{\log k}\log\frac{R}{r}\qquad \left(1<k<\frac{R}{r}\right).$$

$$(\mathcal{C})\begin{cases} T[(1+\alpha)R;\varphi(z)] < \dfrac{\alpha^4\,T(R;f)}{\left(\log\dfrac{R}{r}\right)^2},\qquad \varphi(z)\equiv P(z),\ Q(z),\ R(z); \\ C[\Psi(z)] > -\dfrac{\alpha^4\,T(R;f)}{\left(\log\dfrac{R}{r}\right)^2}, \\ \Psi(z)\equiv P(z),\ Q(z),\ R(z),\ P(z)-Q(z),\ Q(z)-R(z),\ R(z)-P(z). \end{cases}$$

Alors il existe dans la couronne $C(r, R)$ *un point d'affixe* $x(r<|x|<R)$ *centre d'un cercle* (Γ) *d'équation*

$$|z-x|=\alpha|x|,$$

à l'intérieur duquel le nombre des racines de $f(z)-H(z)$, *où* $H(z)$ *est l'une au moins des fonctions* $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, *est supérieur à*

$$n_1=\frac{\alpha^2\,T(R;f)}{\left(\log\dfrac{R}{r}\right)^2}\text{const.}$$

Le théorème s'applique dès que n_1 et $\frac{1}{\alpha}$ dépassent des constantes numériques.

Application aux fonctions méromorphes d'ordre positif.

15. Nous allons d'abord montrer que la condition $(\mathfrak{M})$ est vérifiée pour une suite infinie de valeurs de r, si l'on prend pour $C(r, R)$ des couronnes d'épaisseur relative finie.

Prenons $\frac{R}{r} = k^2$. La condition $(\mathfrak{M})$ se réduit à la suivante :

$$(\mathfrak{M}_1) \qquad T(k^2 r; f) > 24\, T(kr; f) \qquad (r > r_0).$$

Soit ρ l'ordre de la fonction $f\,(\rho > 0)$. On sait que l'intégrale

$$(3) \qquad \int^{\infty} \frac{T(t; f)\, dt}{t^{\lambda+1}}$$

diverge quel que soit $\lambda < \rho$. [On écrira dans la suite $T(r)$ au lieu de $T(r; f)$.] Or on a, en posant

$$r_{n+1} = k r_n,$$

$$\int^{\infty} \frac{T(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt = \sum^{n=\infty} \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{T(t)\, dt}{t^{\lambda+1}} \leqq \sum^{n=\infty} T(r_{n+1}) \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{dt}{t^{\lambda+1}} = \text{const.} \sum^{n=\infty} \frac{T(r_{n+1})}{r_{n+1}^{\lambda}}.$$

Par conséquent la série

$$(4) \qquad \sum \frac{T(r_n)}{r_n^{\lambda}} \qquad (r_n = k r_{n-1})$$

diverge, quel que soit $\lambda < \rho$. Or, supposons qu'on ait à partir d'une certaine valeur p de l'indice n

$$(5) \qquad T(r_n) \leqq 24\, T(r_{n-1}) \qquad (n = p, p+1, \ldots),$$

on en déduit

$$\sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{T(r_n)}{r_n^{\lambda}} = \frac{T(r_p)}{r_p^{\lambda}} + \frac{T(r_{p+1})}{r_{p+1}^{\lambda}} + \ldots \leqq \frac{T(r_p)}{r_p^{\lambda}} \left[1 + \frac{24}{k^{\lambda}} + \left(\frac{24}{k^{\lambda}} \right)^2 + \ldots \right].$$

Si nous prenons $\frac{24}{k^{\lambda}} < 1$, le crochet restera fini et la série (4) ne pourrait plus diverger. Nous démontrons ainsi deux faits :

1° Quelle que soit la valeur initiale r_0 de r, il existe une infinité de nombres de la suite

$$r_0,\quad kr_0,\quad k^2 r_0,\quad \ldots,\quad k^n r_0,\quad \ldots,\quad k > \sqrt[\lambda]{24}$$

(quel que soit $\lambda < \rho$), pour lesquels on a

$$T(k^{n-1} r_0) > 24\, T(k^n r_0). \tag{6}$$

2° Si nous supprimons dans la série (4) tous les termes pour lesquels on a (5), la série des termes restants est encore divergente. Nous avons donc une série divergente (4′), quel que soit $\lambda < \rho$,

$$\sum{}' \frac{T(r_n)}{r_n^\lambda} \qquad \begin{cases} r_n \geq k r_{n-1}, \\ T(r_n) > 24\, T\left(\dfrac{r_n}{k}\right). \end{cases} \tag{4′}$$

Faisons correspondre à chaque terme $\frac{T(r_n)}{r_n^\lambda}$ de la série (4′) la couronne $\left(\frac{r_n}{k^2}, r_n\right)$. Comme on a

$$T(r_n) > 24\, T\left(\frac{r_n}{k}\right),$$

cette couronne peut contenir le centre d'un cercle de remplissage [il suffit que les conditions (C) soient vérifiées et que l'on ait $r > r_0$]. Si ces couronnes ont des parties communes ou se touchent, il peut arriver que certains cercles de remplissage soient comptés plusieurs fois. Afin qu'il n'en soit certainement pas ainsi il suffit de supprimer dans (4′) assez de termes, pour qu'à chaque terme de la série ainsi modifiée puisse correspondre une couronne $\left(\frac{r_n}{k^2}, r_n\right)$ n'ayant avec les autres couronnes aucun point commun. Mais pour que cette opération soit intéressante, il faudrait naturellement que la nouvelle série diverge encore. Or nous allons démontrer qu'on peut supprimer, de trois termes consécutifs de (4′), pour lesquels les couronnes se touchent, chaque fois les deux premiers sans changer la divergence de la série ainsi modifiée. En effet on a, dans ce cas,

$$\frac{T(r_{n-2})}{r_{n-2}^\lambda} + \frac{T(r_{n-1})}{r_{n-1}^\lambda} + \frac{T(r_n)}{r_n^\lambda} \leq \frac{T(r_n)}{r_n^\lambda}(k^{2\lambda} + k^\lambda + 1) = \text{const.}\ \frac{T(r_n)}{r_n^\lambda}.$$

Après avoir supprimé 0, 1 ou 2 termes consécutifs partout où cette opération est nécessaire, nous avons finalement la série divergente (4'')

$$(4'') \qquad \sum{}' \frac{T(r_n)}{r_n^{\lambda}} \qquad \begin{cases} r_n > k^2 r_{n-1}, \\ T(r_n) > 24\, T\left(\dfrac{r_n}{k}\right) \end{cases}$$

(quel que soit $\lambda < \rho$).

Or (4'') restera divergente si l'on prend $\lambda = \lambda(n)$, fonction de n, tel que

$$\lambda(n) < \rho, \qquad \lim \lambda(n) = \rho.$$

Nous pouvons modifier ensuite la série

$$\sum{}' \frac{T(r_n)}{r_n^{\lambda(n)}}$$

sans changer sa divergence en supprimant tous les termes inférieurs ou égaux aux termes de même rang de la série convergente

$$\sum \frac{1}{n^{1-\varepsilon}} \qquad (1 > \varepsilon > 0):$$

car l'ensemble de ces termes supprimés forme une série convergente.

Nous aurons finalement une série (4'''),

$$(4''') \qquad \sum{}'' \frac{T(r_n)}{r_n^{\lambda(n)}} \qquad \begin{cases} r_n > k^2 r_{n-1}, \\ T(r_n) > 24\, T\left(\dfrac{r_n}{k}\right), \end{cases}$$

divergente, où chaque terme vérifie

$$\frac{T(r_n)}{r_n^{\lambda(n)}} > \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \qquad (r_n > k^{2n} r_0 > k^{2n}).$$

Donc en posant

$$\lambda(n) = \rho - \eta(n) \qquad [\lim \eta(n) = 0],$$

on a pour n assez grand, en remarquant que $f(z)$ est d'ordre ρ,

$$r_n^{\rho - \varepsilon_1(n)} < T(r_n) < r_n^{\rho + \varepsilon_1(n)}, \qquad \lim \varepsilon_1(n) = 0.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème III dans la couronne $\left(\frac{r_n}{k^2}, r_n\right)$ correspondant au $n^{\text{ième}}$ terme de la série (4'''). On obtient :

IV. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre positif. Étant donné un nombre α, il existe une suite $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ de valeurs de r,*

$$r_n > k^2 r_{n-1},$$

jouissant des propriétés suivantes :

1°
$$\lim \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} = \rho ;$$

2° *La série*

$$(7) \qquad \sum \frac{T(r_n, f)}{r_n^\lambda}$$

diverge quel que soit $\lambda \leq \lambda(n) < \rho$; $\lim \lambda(n) = \rho$;

3° *Si $H(z)$ est une fonction méromorphe telle qu'on a*

$$T[(1+\alpha)r_n, H] < \alpha^3 T(r_n, f),$$
$$C[H(z)] > -\alpha^3 T(r_n, f),$$

il existe dans la couronne $\frac{r_n}{k^2} < |z| < r_n$ un point d'affixe $x(n)$, centre d'un cercle de rayon $\alpha|x(n)|$, à l'intérieur duquel le nombre des zéros de $f(z) - H(z)$ est supérieur à

$$\alpha^2 T(r_n, f)$$

pour toutes les fonctions $H(z)$ pour lesquelles on a

$$C(H - H_{0,n}) > -\alpha^3 T(r_n, f),$$
$$C(H - H_{1,n}) > -\alpha^3 T(r_n, f).$$

$H_{0,n}(z)$ et $H_{1,n}(z)$ sont deux fonctions exceptionnelles possibles, vérifiant les conditions

$$C(H_{0,n}) > -\alpha^3 T(r_n, f),$$
$$C(H_{1,n}) > -\alpha^3 T(r_n, f),$$
$$C(H_{0,n} - H_{1,n}) > -\alpha^3 T(r_n, f).$$

Le théorème est applicable dès que α est plus petit qu'une certaine constante numérique.

Remarque. — Si l'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{T(t, f)}{t^{\rho-1}} dt$$

diverge, c'est-à-dire si $f(z)$ est, d'après une classification de M. Valiron de la classe de divergence de son ordre, on peut remplacer dans IV partout λ par ρ.

III et IV sont des généralisations de deux théorèmes de M. Milloux (f; 2°, p. 207, 209).

Cas particuliers.

16. 1° Considérons d'abord le cas simple des fonctions $\Pi(z)$ d'ordre $\rho' < \rho$. Étant donné $\varepsilon > 0$ on peut écrire

$$T(r_n; f) > r_n^{\rho-\varepsilon}, \qquad r_n \geq r(f, \varepsilon),$$
$$T(r; \Pi) < r^{\rho'+\varepsilon}, \qquad r \geq r(\Pi, \varepsilon);$$

d'où

$$T[(1+x)r_n; \Pi] < (1+x)^{\rho'+\varepsilon} r_n^{\rho'+\varepsilon}, \qquad r_n \geq r(\Pi, \varepsilon).$$

Le théorème IV sera donc applicable dès que l'on a

$$(1+x)^{\rho'+\varepsilon} r_n^{\rho'+\varepsilon} < x^4 r_n^{\rho-\varepsilon}$$

ou encore

$$r_n^{\rho-\rho'-2\varepsilon} > \frac{(1+x)^{\rho'+\varepsilon}}{x^4}.$$

Comme x est une constante, ceci a lieu à partir d'une certaine valeur $r_n > r(\varepsilon)$. Si l'on a par exemple

$$\rho' \leq \rho - 3\varepsilon,$$

quelque petit que soit ε, prenons $\lambda = \rho - \varepsilon$, d'où $\rho' < \lambda < \rho$. Il est évident que la condition

$$C(\Pi) > - x^4\, T(r_n : f)$$

sera vérifiée à partir d'une certaine valeur $r(\Pi, x)$, si l'on suppose

$$\Pi(z) \not\equiv 0.$$

A chaque fonction Π correspond un $r(\Pi, \varepsilon)$ et un $r(\Pi, x)$. Or comme la série (7) diverge, il en est encore ainsi de la série

$$\sum_{r_n \geq r(\Pi)} \frac{T(r_n; f)}{r_n^{\lambda}}$$

$$[r_n(\Pi) > r(\Pi, x), r(\Pi, \varepsilon), r(f, \varepsilon), r(\varepsilon)].$$

On peut donc appliquer IV à toutes les fonctions $\text{H}(z) \not\equiv 0$ et d'ordre inférieur à ρ.

2° Un autre cas plus général est celui des fonctions $\text{H}(z)$ pour lesquelles on a, quel que soit $r_0 > r_1$,

$$(i_1) \qquad \text{T}[(1-x)r_0 ; \text{H}] < x^3\,\text{T}(r_0 : f).$$

Supposons par exemple que f vérifie

$$(i_2) \qquad \frac{\text{T}(r:f)}{r^\rho} > h \qquad (r > r_1),$$

où h est une constante positive. Pour avoir (i_1) il suffit

$$\text{T}[(1-x)r : \text{H}] < x^3 h r^\rho \qquad (r > r_1),$$

ou encore

$$\frac{\text{T}[(1-x)r : \text{H}]}{[(1-x)r]^\rho} < \frac{x^3 h}{(1-x)^\rho} \qquad (r > r_1)$$

ou encore

$$(i_3) \qquad \frac{\text{T}(r : \text{H})}{r^\rho} < \frac{x^3 h}{(1-x)^\rho} \qquad (r > r'_1).$$

Ceci a lieu pour toutes les fonctions H pour lesquelles $\dfrac{\text{T}(r:\text{H})}{r^\rho}$ tend vers zéro. A chacune de ces fonctions H correspond un nombre $r(\text{H})$ tel que l'on a (i_3), $r'_1 = r(\text{H})$. On raisonnera ensuite comme dans le cas précédent.

Remarque I. — Les fonctions telles que (i_2) se présentent assez souvent. Il en est par exemple ainsi si l'on a

$$hr^\rho < \text{T}(r : f) < kr^\rho \qquad (r > r_1),$$

où h et k sont des constantes positives. M. Valiron appelle ces fonctions « très régulières ».

Remarque II. — Les fonctions telles que (i_3) comprennent en particulier la classe de convergence de l'ordre ρ. Car l'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{\text{T}(r : \text{H})}{r^{\rho-1}}\,dr$$

étant convergente, on a

$$\varepsilon > \int_{\text{R}}^{\infty} \frac{\text{T}(r:\text{H})\,dr}{r^{\rho-1}} > \text{T}(\text{R}, \text{H}) \int_{\text{R}}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho-1}} = \frac{\text{T}(\text{R}:\text{H})}{\rho\,\text{R}^\rho} \qquad [\text{R} = \text{R}(\varepsilon : \text{H})].$$

Le théorème IV s'applique donc aux fonctions $H(z)$ de la classe de convergence de l'ordre ρ chaque fois que la fonction f est « très régulière » et du même ordre.

CHAPITRE III.

LES DIRECTIONS DE BOREL.

17. M. Valiron a découvert dans son Mémoire (i; 3°, p. 80, 82) l'existence, pour toute fonction méromorphe d'ordre ρ positif et fini, de directions, qu'il a appelées « Directions de Borel », c'est-à-dire de directions (B) telles que l'exposant de convergence de la suite des zéros de $f(z)-H(z)$ relatifs à tout angle admettant (B) comme bissectrice est égal à ρ, sauf pour deux fonctions au plus. M. Valiron a démontré cette propriété dans le cas où les fonctions $H(z)$ sont des constantes ou des fractions rationnelles. M. Biernacki (n) a généralisé ensuite pour les fonctions $H(z)$ d'ordre inférieur à ρ. Nous allons généraliser ces résultats et passer ensuite aux fonctions $f(z)$ d'ordre nul ou d'ordre infini.

18. Pour cela, cherchons une fonction $\alpha = \alpha(n)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$ telle que, pour tout $\lambda < \rho$, la série

$$\sum \frac{\alpha^2(n)\,T(r_n)}{r_n^\lambda} \tag{8}$$

correspondant à la suite (r_n) du théorème IV diverge, et que $\alpha^4(n).T(r_n)$ tend vers l'infini. Appelons $S(n)$ la somme des n premiers termes de la série (7), et prenons par exemple

$$\alpha(n) = \frac{1}{S(n)^\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0).$$

On a

$$\begin{aligned}
&\alpha^2(1)\frac{T(r_1)}{r_1^\lambda} + \ldots + \alpha^2(n)\frac{T(r_n)}{r_n^\lambda} \\
&= \frac{1}{S(1)^{2\varepsilon}}\frac{T(r_1)}{r_1^\lambda} + \ldots + \frac{1}{S(n)^{2\varepsilon}}\frac{T(r_n)}{r_n^\lambda} \\
&> \frac{1}{S(n)^{2\varepsilon}}\left[\frac{T(r_1)}{r_1^\lambda} + \ldots + \frac{T(r_n)}{r_n^\lambda}\right] = S(n)^{1-2\varepsilon}.
\end{aligned}$$

On en déduit la divergence de (8) dès que l'on a $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Évaluons l'ordre de grandeur de $\alpha^4(n).\mathrm{T}(r_n)$. On peut écrire

$$(9) \qquad \alpha^4(n)\,\mathrm{T}(r_n) = \frac{\mathrm{T}(r_n)}{\mathrm{S}(n)^{4\varepsilon}} > \frac{\mathrm{T}(r_n)}{\mathrm{T}(r_n)^{4\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1^{\lambda}} + \frac{1}{r_2^{\lambda}} + \ldots + \frac{1}{r_n^{\lambda}}\right)^{4\varepsilon}}$$
$$= \text{const.}\, r_1^{4\lambda\varepsilon}\,\mathrm{T}(r_n)^{1-4\varepsilon}.$$

Car on a

$$\frac{1}{r_1^{\lambda}} + \ldots + \frac{1}{r_n^{\lambda}} < \frac{1}{r_n^{\lambda}}\left(1 + \frac{1}{k^{\lambda}} + \frac{1}{k^{2\lambda}} + \ldots + \frac{1}{k^{n\lambda}}\right) = \frac{\text{const.}}{r_1^{\lambda}} \qquad (k^{\lambda} > 2,4 > 1).$$

Il suffirait de prendre ε entre 0 et $\frac{1}{4}$ pour que le produit $\alpha^4(n).\mathrm{T}(r_n)$ augmente indéfiniment. Mais $\mathrm{T}(r_n)$ étant de l'ordre ρ on peut choisir $\varepsilon = \varepsilon(n)$ et $\lambda = \lambda(n)$ fonctions de n, ε tendant vers zéro et λ tendant vers ρ, pour que le dernier membre de (9) soit d'ordre ρ et pour que

$$\sum \frac{\alpha^2(n)\,\mathrm{T}(r_n)}{r_n^{\lambda(n)}}$$

diverge, donc pour que (8) diverge pour tout $\lambda < \rho$.

On a ainsi le théorème suivant, généralisation d'un théorème de M. Valiron (i; 4°) :

V. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho > 0$. Il existe une suite infinie de cercles $\Gamma(n)$ d'équation*

$$|z - x(n)| = \alpha(n)\,|x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim |x(n)| = \infty$$

jouissant de la propriété suivante. Pour chaque n le nombre des zéros de $f(z) - \mathrm{II}(z)$ dans $\Gamma(n)$, soit $n[\Gamma(n); f = \mathrm{II}]$, vérifie

$$n[\Gamma(n); f = \mathrm{II}] > \alpha^2(n)\,\mathrm{T}(r_n; f), \qquad |x(n)| < r_n < k^2 |x(n)|,$$

pour toutes les fonctions $\mathrm{II}(z)$, pour lesquelles on a, quel que soit n,

$$[\mathfrak{F}(\alpha; f)] \quad \mathrm{T}\{[1 + \alpha(n)]r_n; \mathrm{II}\} < \alpha^4(n)\,\mathrm{T}(r_n; f), \quad \mathrm{G}(\mathrm{II}) > -\alpha^4(n)\,\mathrm{T}(r_n; f),$$

sauf peut-être pour celles pour lesquelles

$$\mathrm{G}(\Psi) \leqq -\alpha^4(n)\,\mathrm{T}(r_n; f), \qquad \Psi \equiv \mathrm{II} - \mathrm{II}_{0,n}, \; \mathrm{II} - \mathrm{II}_{1,n},$$

$\mathrm{II}_{0,n}(z)$ et $\mathrm{II}_{1,n}(z)$ étant deux fonctions exceptionnelles possibles de la

famille $\mathcal{F}(\alpha, f)$ vérifiant la condition

$$C(\Pi_{0,n} - \Pi_{1,n}) > -\alpha^1(n)\,T(r_n; f).$$

Quel que soit $\lambda \leqq \lambda(n) < \rho$, $\lim \lambda(n) = \rho$, *la série*

$$\sum \frac{\alpha^2(n)\,T(r_n; f)}{r_n^{\lambda}} \tag{10}$$

diverge et

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \alpha^1(n)\,T(r_n; f)}{\log r_n} = \rho.$$

Si $f(z)$ est de la classe de divergence de son ordre ρ, on peut remplacer dans (10) λ *par* ρ.

19. Si donc $\Pi(z)$ est une fonction non exceptionnelle de la famille $\mathcal{F}(\alpha, f)$, on a

$$n[\Gamma(n); f = \Pi] > \alpha^2(n)\,T(r_n; f),$$

de sorte que la série

$$\sum \frac{n[\Gamma(n); f = \Pi]}{|x(n)|^{\lambda(n)}} \tag{11}$$

diverge, ce qui entraîne la divergence de la série

$$\sum \frac{1}{r_q[\Gamma(n); f = \Pi]^{\lambda(n)}}, \tag{12}$$

étendue aux modules des zéros de $f - \Pi$ situés dans la suite des $\Gamma(n)$ et réciproquement. Je dis que (12) diverge pour toutes les fonctions Π de la famille $\mathcal{F}(\alpha, f)$ sauf deux au plus.

Soient en effet deux fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ de cette famille $[P(z) \not\equiv Q(z)]$. Supposons que les séries (12) correspondantes,

$$\sum \frac{1}{r_q[\Gamma(n); f = P]^{\lambda(n)}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_q[\Gamma(n); f = Q]^{\lambda(n)}},$$

soient convergentes. Il en est donc de même pour les séries

$$\sum \frac{n[\Gamma(n); f = P]}{|x(n)|^{\lambda(n)}} \tag{11'}$$

et

$$(11'') \qquad \sum \frac{n[\Gamma(n); f = Q]}{|x(n)|^{\lambda(n)}}.$$

L'ensemble des termes de (10) pour lesquels on a

$$\frac{n[\Gamma(n); f = P]}{|x(n)|^{\lambda(n)}} \geqq \frac{\alpha^2(n)\,T(r_n; f)}{|x(n)|^{\lambda(n)}}$$

forme une série convergente, sans quoi (11′) divergerait. En supprimant ces termes dans (10), il nous reste une série divergente (10′) :

$$(10') \qquad \sum{}' \frac{\alpha^2(n)\,T(r_n; f)}{|x(n)|^{\lambda(n)}}, \qquad n[\Gamma(n); f = P] < \alpha^2(n)\,T(r_n; f).$$

L'ensemble des termes de (10′) pour lesquels on a

$$\frac{n[\Gamma(n); f = Q]}{|x(n)|^{\lambda(n)}} \geqq \frac{\alpha^2(n)\,T(r_n; f)}{|x(n)|^{\lambda(n)}}$$

forme une série divergente sans quoi (11″) divergerait. En supprimant ces termes dans (10′), il nous reste une série divergente (10″) :

$$(10'') \qquad \sum{}'' \frac{\alpha^2(n)\,T(r_n; f)}{|x(n)|^{\lambda(n)}} \qquad \begin{cases} n[\Gamma(n); f = P] < \alpha^2(n)\,T(r_n; f), \\ n[\Gamma(n); f = Q] < \alpha^2(n)\,T(r_n; f). \end{cases}$$

Comme on a évidemment à partir d'une certaine valeur r_0 de r_n

$$C(P - Q) > -\alpha^1(n)\,T(r_n) \qquad (r_n \geqq r_0).$$

$P(z)$ et $Q(z)$ peuvent servir de fonctions exceptionnelles pour la suite (s) des cercles $\Gamma(n)$ correspondant à (10″). On a donc pour tout cercle $\Gamma(n)$ de la suite (s)

$$n[\Gamma(n); f = R] > \alpha^2(n)\,T(r_n; f)$$

pourvu que

$$\begin{aligned} C(R - P) &> -\alpha^1(n)\,T(r_n; f), \\ C(R - Q) &> -\alpha^1(n)\,T(r_n; f), \\ C(R) \quad &> -\alpha^1(n)\,T(r_n; f). \end{aligned}$$

Il en est évidemment ainsi pour toute fonction $R(z)$ de la famille $\mathfrak{F}(\alpha, f)$ telle que

$$P(z) \not\equiv Q(z) \not\equiv R(z) \not\equiv P(z), \qquad P(z)\,Q(z)\,R(z) \not\equiv 0,$$

dès que r_n est assez grand. Comme (10″) diverge, il en est encore ainsi des séries

$$\sum' \frac{n[\Gamma(n); f=\mathrm{R}]}{|x(n)|^{\lambda(n)}}$$

et

$$\sum \frac{1}{r_q[\Gamma(n); f=\mathrm{R}]^{\lambda(n)}},$$

On en déduit :

VI. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho > 0$ et $\Pi(z)$ une fonction méromorphe de la famille* $\mathrm{F}(\alpha, f)$ *définie par*

$$[\mathrm{F}(\alpha, f)] \quad \mathrm{T}\{[1+\alpha(n)]r_n, \Pi\} < \alpha^1(n)\,\mathrm{T}(r_n, f), \qquad [\Pi(z) \not\equiv 0].$$

Il existe une suite de cercles $\Gamma(n)$ *d'équation*

$$|z - x(n)| = \alpha(n)\,|x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim |x(n)| = \infty,$$

telle que, pour tout $\lambda \leqq \lambda(n) < \rho$, $\lim \lambda(n) = \rho$, *la série*

$$\sum \frac{1}{r_q[\Gamma(n); f=\Pi]^{\lambda}}, \tag{13}$$

étendue aux modules des zéros de $f(z) - \Pi(z)$ situés dans les $\Gamma(n)$, est divergente quel que soit $\Pi(z)$ sauf pour deux fonctions exceptionnelles au plus.

Si $f(z)$ est de la classe de divergence de son ordre ρ, on peut remplacer dans (13) λ par ρ.

20. Divisons maintenant avec Mlle M. Collier (*Thèse*, Strasbourg) le plan en p secteurs égaux (s_1), (s_2), ..., (s_p) par des demi-droites, issues du point $z = 0$.

Supposons le secteur (s_i) défini par

$$\frac{2(i-1)\pi}{p} \leqq \arg z < \frac{2i\pi}{p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Répartissons la suite infinie des cercles $\Gamma(n)$ du théorème V en p groupes (g_1), (g_2), ..., (g_p), de façon que le groupe (g_i) ait ses centres dans le secteur (s_i). Réunissons ensuite les termes de la série (10) relatifs à chacun de ces groupes (g_i). Soient S_1, S_2, ..., S_p les sommes correspondantes. Il est évident que la série (10) pourra ainsi se mettre sous la forme

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_p, \qquad S_i = \sum_i \frac{\alpha^2(n)\,T(r_n; f)}{x(n)^\lambda}. \tag{14}$$

Comme (14) diverge, il en est encore ainsi de l'une au moins des sommes S_i. Soit l l'indice correspondant ($1 \leq l \leq p$). Nous pouvons maintenant citer pour ce secteur (S_l) un théorème identique à V avec cette différence que la suite des $\Gamma(n)$ ne se compose plus que de ceux qui ont leur centre dans (S_l), et que la suite des fonctions exceptionnelles $H_{0,n}$, $H_{1,n}$ est plus restreinte. Nous en déduisons ensuite un énoncé analogue à VI, se rapportant au secteur (s_l) seulement, avec deux fonctions exceptionnelles au plus. Ces fonctions exceptionnelles ne sont plus forcément les mêmes que celles du théorème VI, en ce sens qu'elles peuvent être exceptionnelles dans le secteur (s_l) sans l'être dans le plan entier. Par conséquent ces fonctions exceptionnelles peuvent dépendre du secteur (s_l).

Subdivisons ensuite le secteur (s_l) en secteurs égaux et opérons sur le groupe de cercles (g_l) et la série (s_l) comme nous avons fait pour la suite $\Gamma(n)$ de V et la série (10). Nous mettons ainsi en évidence un nouveau secteur d'ouverture $\frac{2\pi}{p^2}$ pour lequel on a encore des théorèmes analogues à V et VI. En continuant toujours de la même façon, on voit qu'il existe chaque fois au moins un secteur d'ouverture de plus en plus petite, pour lequel on a toujours des théorèmes analogues à V et VI avec la remarque précédente sur les fonctions exceptionnelles possibles. Soit (B) la limite des bissectrices de ces secteurs. Il est évident que tout angle ayant pour bissectrice (B) et une ouverture arbitraire contiendra pour n assez grand les cercles $\Gamma(n)$ appartenant à un secteur de rang assez grand. On en déduit :

VII. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho > 0$ et $H(z)$ une fonction méromorphe de la famille $F(\alpha, f)$, il existe toujours une direction de Borel* (B) *telle que pour tout $\lambda < \rho$ la série*

$$\sum \frac{1}{r_q(\hat{A}; f = H)^\lambda}$$

étendue aux modules des zéros de $f(z) - H(z)$ appartenant à un angle *arbitraire de bissectrice* (B) *diverge quel que soit* $\Pi(z)$ *sauf pour deux fonctions exceptionnelles au plus.*

Si $f(z)$ *est de la classe de divergence de son ordre* ρ, *on peut remplacer* λ *par* ρ.

Cas particuliers.

21. Comme dans le nº **16**, nous allons appliquer les théorèmes V, VI et VII à certains cas particuliers. Nous avons vu (nº **18**) que, si l'on prend $\alpha(n) = S(n)^{-\varepsilon}$, $\alpha^{\lambda}(n)$. $T(r_n; f)$ est pour n et $\frac{1}{\varepsilon}$ assez grand de l'ordre ρ.

1º En raisonnant comme au nº **16**, on voit que V, VI et VII sont applicables aux fonctions méromorphes $\Pi(z)$ d'ordre inférieur à ρ. On retrouve ainsi un théorème de M. Biernacki (a).

2º Un autre cas plus général est celui où l'on a quel que soit $r_n > r_0$

$$T\{[1+\alpha(n)]r_n; \Pi\} < \alpha^{\lambda}(n)\, T(r_n; f).$$

Ceci a lieu pour toutes les fonctions pour lesquelles $\frac{T(kr; \Pi)}{T(r; f)}$ $(k > 1)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Supposons par exemple que $f(z)$ vérifie

$$\frac{T(r; f)}{r^{\rho}} > h > 0 \qquad (r > r_1,\ h = \text{const.}).$$

Parmi les fonctions Π se trouvent alors celles pour lesquelles $\frac{T(r; \Pi)}{r^{\rho}}$ tend vers zéro, en particulier les fonctions de la classe de convergence de l'ordre ρ.

3º Étudions encore le cas où f et Π sont respectivement de la classe de divergence et de convergence de l'ordre $\rho\,[\Pi(z) \not\equiv 0]$. Remarquons que si l'on prend $\alpha(n) = S(n)^{-\varepsilon}$, la série

$$\sum \alpha^{k}(n) \frac{T(r_n; f)}{r_n^{\rho}}$$

diverge pourvu que l'on ait $\varepsilon < \frac{1}{k}$. La démonstration se fait comme au nº **18**.

En prenant donc $\varepsilon < \frac{1}{4}$ la série

$$\sum \alpha^{3}(n) \frac{T(r_n; f)}{r_n^2}$$

diverge. Or, $\Pi(z)$ étant une fonction quelconque de la classe de convergence, la série

$$\sum \frac{T\{[1+\alpha(n)] r_n; \Pi\}}{r_n^2}$$

converge.

Soit (S) la suite des cercles $\Gamma(n)$ du théorème V. La série (15) correspondante

$$(15) \qquad \sum \frac{\alpha^{3}(n) T(r_n; f)}{|x(n)|^{\rho}}$$

diverge tandis que

$$\sum \frac{T\{[1+\alpha(n)] r_n; \Pi\}}{|x(n)|^{\rho}}$$

converge. Je dis que la série

$$\sum \frac{1}{r_n [\Gamma(n); f = \Pi]^{\rho}}$$

relative à la suite (S) des cercles $\Gamma(n)$ de centres $x(n)$ diverge, sauf pour deux fonctions Π au plus.

Nous appliquons la méthode du n° **19**. Soient $P(z)$ et $Q(z)$ deux fonctions exceptionnelles de la famille, et $R(z)$ une fonction quelconque de la même famille ($P \not\equiv Q \not\equiv R \not\equiv P$; $PQR \not\equiv 0$). Nous avons donc les séries convergentes suivantes :

$$(16) \qquad \begin{cases} \sum \dfrac{n[\Gamma(n); f = \varphi]}{|x(n)|^{\rho}}, & \varphi(z) \equiv P(z), Q(z), \\[2ex] \sum \dfrac{T\{[1+\alpha(n)] r_n; \Psi\}}{|x(n)|^{\rho}}, & \Psi(z) \equiv P(z), Q(z), R(z). \end{cases}$$

(15) étant divergente, nous pouvons en extraire par cinq opérations successives analogues à celle du n° **19** faites avec les cinq séries (16)

une nouvelle série (15′) divergente et telle que

$$(15') \qquad \sum{}' \frac{x^1(n)\,\mathrm{T}(r_n; f)}{|x(n)|^\rho} \qquad \left\{\begin{array}{ll} n[\Gamma(n): f=\mathrm{P}] & < x^1(n)\,\mathrm{T}(r_n; f), \\ n[\Gamma(n): f=\mathrm{Q}] & < x^1(n(\mathrm{T}(r_n; f), \\ \mathrm{T}\{[1+x(n)]r_n; \mathrm{P}\} & < x^1(n)\,\mathrm{T}(r_n; f), \\ \mathrm{T}\{[1+x(n)]r_n; \mathrm{Q}\} & < x^1(n)\,\mathrm{T}(r_n; f), \\ \mathrm{T}\{[1+x(n)]r_n; \mathrm{R}\} & < x^1(n)\,\mathrm{T}(r_n; f). \end{array}\right.$$

Soit (S′) la suite des $\Gamma(n)$ correspondant à (15′). D'après les deux premières inégalités (15′) on a, *a fortiori*,

$$(15')_1 \qquad n[\Gamma(n): f=\varphi] < x^2(n)\,\mathrm{T}(r_n; f), \qquad \varphi(z) \equiv \mathrm{P}(z): \mathrm{Q}(z).$$

D'ailleurs à partir d'une certaine valeur de n on peut écrire

$$(15')_2 \quad \mathrm{C}(\omega) > -x^1(n)\,\mathrm{T}(r_n; f). \qquad \omega \equiv \mathrm{P}-\mathrm{Q},\ \mathrm{Q}-\mathrm{R},\ \mathrm{R}-\mathrm{P},\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R}.$$

En tenant compte des trois dernières inégalités (15′) ainsi que de $(15')_1$ et $(15')_2$, on voit que le théorème V s'applique aux fonctions P, Q et R, P et Q sont deux fonctions exceptionnelles, tandis que R ne l'est pas; donc

$$(17) \qquad n[\Gamma(n): f=\mathrm{R}] > x^2(n)\,\mathrm{T}(r_n; f).$$

La divergence de (15′) entraîne forcément celle de

$$\sum{}' \frac{x^2(n)\,\mathrm{T}(r_n; f)}{|x(n)|^\rho}.$$

En tenant compte de (17) on en déduit que les séries

$$\sum{}' \frac{n[\Gamma(n): f=\mathrm{R}]}{|x(n)|^\rho} \qquad \text{et} \qquad \sum{}' \frac{1}{r_q[\Gamma(n): f=\mathrm{R}]^\rho}$$

divergent. *A fortiori*, la série

$$(18) \qquad \sum \frac{1}{r_q[\Gamma(n): f=\mathrm{R}]^\rho}$$

relative à la suite (S) diverge.

Nous précisons ainsi un théorème de M. R. Nevanlinna (*h*; 3).

Subdvisons maintenant le plan comme au nº **20** en *p* secteurs égaux. Pour l'un au moins de ces secteurs la partie contributive correspondante de la série (15) relative à la suite (s) des cercles $\Gamma(n)$, ayant leurs centres dans ce secteur, diverge. On opérera sur (s) comme nous avons opéré précédemment sur (S). On trouvera encore une série analogne à (18) mais relative aux $\Gamma(n)$ ayant leurs centres dans le secteur en question. Les fonctions exceptionnelles peuvent naturellement dépendre du secteur, mais leur nombre est au plus égal à deux. En continuant ensuite comme d'habitude, on obtient le théorème :

VII'. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ et de la classe de divergence et $\mathrm{H}(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ et de la classe de convergence $[\mathrm{H}(z) \not\equiv 0]$, il existe toujours une direction de Borel (B) telle que la série*

$$\sum \frac{1}{r_q(\hat{A} : f = \mathrm{H})^\rho},$$

étendue aux modules des zéros des $f(z) - \mathrm{H}(z)$ appartenant à un angle arbitraire $\hat{A}$ de bissectrice (B), diverge quel que soit $\mathrm{H}(z)$ sauf pour deux fonctions exceptionnelles au plus.

CHAPITRE IV.

SUR LES FONCTIONS MÉROMORPHES D'ORDRE FINI $\rho > \frac{1}{2}$.

22. Nous allons généraliser le théorème suivant de M. Valiron (i; 7°) :

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho > \frac{1}{2}$. Si la série

$$\sum \frac{1}{r_q(\hat{A}' : f = a)^\rho} \tag{1}$$

étendue aux modules des racines de $f(z) - a$ situées dans un petit angle $\hat{A}'$ diverge, il existe dans tout angle A de mesure supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$ et contenant $\hat{A}'$ à son intérieur (au sens strict) une suite de cercles $C(n)$

ayant pour équation

$$|z - x(n)| = \alpha(n)\,|x(n)| \qquad \begin{cases} |x(n+1)| > 2\,|x(n)|, \\ \lim \alpha(n) = 0, \quad \lim |x(n)| = \infty, \end{cases}$$

tels que, dans $C(n)$, $f(z) - x$ *admet au moins* $\mathfrak{N}(n)$ *solutions pour tous les* x *sauf au plus ceux qui sont représentés sur la sphère de Riemann dans deux cercles de rayon* $e^{-\frac{\mathfrak{N}}{2}}$, *la série*

$$\sum \frac{\mathfrak{N}(n)}{|x(n)|^2} \tag{2}$$

étant divergente.

[$\alpha(n)$ est la fonction habituelle. On peut aussi considérer à sa place une constante α aussi petite que l'on veut.]

Nous appliquons à ces cercles le corollaire I'. Nous ne considérons que ceux des cercles $C(n)$ pour lesquels $\mathfrak{N}(n)$ dépasse la constante numérique du corollaire I'. Il y a dans chacun de ces cercles certainement deux valeurs de x dont la distance sphérique est supérieure à $e^{-\mathfrak{N}(n)}$, pour lesquelles $f(z) - x$ admet plus de $\mathfrak{N}(n)$ racines. Vérifions les conditions de I'. Soit $\Gamma(n)$ le cercle concentrique à $C(n)$ et de rayon 20 fois plus grand. P, Q, R étant trois fonctions méromorphes quelconques, il faut qu'on ait d'une part

$$\frac{1}{\text{aire}\,\Gamma(n)} \iint_{\Gamma_n} \overline{\log}\left(|P| + |Q| + \left|\frac{1}{P-Q}\right| + \left|\frac{1}{Q-R}\right| + \left|\frac{1}{R-P}\right|\right) d\sigma < \mathfrak{N}(n),$$

et d'autre part le nombre des zéros et des pôles des fonctions P, Q, R, $P - Q$, $Q - R$, $R - P$ situées dans $\Gamma(n)$ doit être inférieur à $\varepsilon\mathfrak{N}(n)$ (ε inférieur à une constante numérique). Introduisons la couronne

$$(1 - 15\alpha)\,|x(n)| < |z| < (1 + 15\alpha)\,|x(n)|$$

contenant le cercle $\Gamma(n)$ et procédons comme au n° **14**. On voit que nos conditions sont vérifiées si l'on a

$$T[(1 + 16\alpha)\,|x(n)|;\ \varphi(z)] < c\varepsilon\alpha\,\mathfrak{N}(n),$$
$$\varphi(z) \equiv P(z),\ Q(z),\ R(z);$$
$$C[\Psi(z)] > -c\varepsilon\alpha\,\mathfrak{N}(n),$$
$$\Psi(z) \equiv P(z),\ Q(z),\ R(z),\ P(z) - Q(z),\ Q(z) - R(z),\ R(z) - P(z).$$

Nous remplaçons encore $c\varepsilon$ par α. Nous supprimons ensuite dans la série (2) tous les termes pour lesquels on a

$$\frac{\mathfrak{N}(n)}{|x(n)|^\rho} \leq \frac{1}{n^{1+\eta}}, \qquad \lim \eta = 0.$$

Cela ne change pas la divergence de la nouvelle série, et les $\mathfrak{N}(n)$ seront de l'ordre de $|x(n)|^\rho$, donc supérieurs à la constante numérique du corollaire I'. Finalement on a le théorème :

VIII. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho > \frac{1}{2}$. Supposons que la série*

$$\sum \frac{1}{r_\nu(\hat{A}' : f = a)^\rho},$$

étendue aux modules des racines de $f(z) - a$ situées dans un petit angle $(\hat{A}')$ diverge. Soit $(\hat{A})$ un angle quelconque de mesure supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$ contenant $(\hat{A}')$ à son intérieur (au sens strict). Il existe dans $(\hat{A})$ une suite de cercles $\Gamma(n)$ d'équation

$$|z - x(n)| = \alpha|x(n)|, \qquad |x(n+2)| > 2|x(n)| \qquad (n > n_0, \alpha < \alpha_0),$$

à l'intérieur desquels le nombre des zéros des $f(z) - x$ est supérieur à $\mathfrak{N}(n)$ sauf pour les valeurs de x intérieures à deux cercles sphériques de rayon $e^{-\frac{n}{2}}$. Il en est de même pour les zéros de $f(z) - \text{H}(z)$, où $\text{H}(z)$ est une fonction méromorphe telle qu'on a

$$T[(1+\alpha)|x(n)|; \text{H}] < \alpha^2 \mathfrak{N}(n),$$
$$C[\varphi(z)] > -\alpha^2 \mathfrak{N}(n), \qquad \varphi = \text{H}, \text{H} - \text{H}_{0,n}, \text{H} - \text{H}_{1,n},$$

$\text{H}_{0,n}(z)$ et $\text{H}_{1,n}(z)$ étant deux fonctions exceptionnelles possibles vérifiant les conditions

$$C(\text{H}_{0,n}) > -\alpha^2 \mathfrak{N}(n),$$
$$C(\text{H}_{1,n}) > -\alpha^2 \mathfrak{N}(n),$$
$$C(\text{H}_{0,n} - \text{H}_{1,n}) > -\alpha^2 \mathfrak{N}(n).$$

On a de plus

$$\lim \frac{\log \mathfrak{N}(n)}{\log |x(n)|} = \rho$$

et la série

$$\sum \frac{\mathfrak{N}(n)}{|x(n)|^\rho}$$

diverge.

25. On procédera ensuite comme d'habitude. On prendra pour α une fonction $\alpha(n)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, mais pas trop vite de façon que la série $\Sigma \alpha^2(n)\frac{\mathfrak{N}(n)}{|x(n)|^\rho}$ diverge encore, et que $\alpha^2(n)\mathfrak{N}(n)$ continue à tendre vers l'infini (cette dernière quantité pourra même rester de l'ordre de $|x(n)|^\rho$). On introduira ensuite la famille $\mathcal{H}(\alpha)$ des fonctions définies par

$$[\mathcal{H}(\alpha)] \quad |T\{[1-\alpha(n)]|x(n)|, H\}| < \alpha^2(n)\mathfrak{N}(n), \qquad C(H) > -\alpha^2(n)\mathfrak{N}(n).$$

Cette famille dépend naturellement de $f(z)$, car $\mathfrak{N}(n)$ en dépend. On obtient le théorème suivant :

IX. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho > \frac{1}{2}$. Supposons que la série*

$$\sum \frac{1}{r_\rho(\hat{\Lambda}; f = a)^\rho}$$

diverge. Soit $\hat{A}$ un angle de mesure supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$, et contenant $\hat{\Lambda}$ à son intérieur (au sens strict). Il existe dans $(\hat{A})$ une suite de cercles $\Gamma(n)$ d'équation

$$|z - x(n)| = \alpha(n)|x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim |x(n)| = \infty,$$

telle que la série

$$\sum \frac{1}{r_\rho[\Gamma(n); f = H]^\rho}$$

étendue aux modules des zéros de $f - H$ située dans $\Gamma(n)$ est divergente, et ceci pour toutes les constantes H sauf deux au plus, et pour toutes les fonctions H de la famille $K(\alpha, f)$ sauf deux au plus. $K(\alpha, f)$ est définie par

$$[K(\alpha, f)] \quad |T\{[1-\alpha(n)]|x(n)|, H\}| < \alpha^2(n)\mathfrak{N}(n), \qquad H(z) \not\equiv 0.$$

Il existe donc dans l'angle $(\hat{A})$ toujours une direction de Borel (B) telle que la série

$$\sum \frac{1}{r_q(A'': f = U)^{\rho}},$$

étendue aux modules des zéros de $f - U$ appartenant à un angle arbitraire $\hat{A}''$ de bissectrice (B), diverge quel que soit U sauf au plus pour deux constantes U et deux fonctions U de la famille $K(\alpha, f)$.

Remarque. — Ici encore on voit que la famille $K(\alpha, f)$ comprend en particulier toutes les fonctions méromorphes d'ordre inférieur à ρ, mais aussi certaines fonctions d'ordre ρ, on pourrait procéder comme au n° **21**.

CHAPITRE V.

LES DIRECTIONS DE BOREL ET LES CERCLES DE REMPLISSAGE DES FONCTIONS MÉROMORPHES D'ORDRE ρ POSITIF ET FINI.

24. Nous avons vu que les cercles de remplissage donnaient naissance à des directions de Borel. Cherchons à établir la réciproque. Pour cela nous suivrons la méthode de M. Valiron pour établir son théorème du n° **22**.

(B) étant une direction de Borel, la série

$$(1) \qquad \sum \frac{1}{r_q(A: f = a)^{\lambda}} \qquad (\lambda < \rho),$$

étendue aux modules des zéros de $f(z) - a$ relative à tout angle $(\hat{A})$ de bissectrice (B), diverge pour toutes les valeurs de a sauf deux au plus et quel que soit $\lambda < \rho$. Considérons donc un petit angle $\hat{A}$ quelconque de bissectrice (B) et de mesure α. Considérons les quadrilatères $Q(p)$, limités par les côtés de cet angle et par les cercles $|z| = 2^p$ et $|z| = 2^{p-1}$. Divisons les quadrilatères $Q(p)$ en quadrilatères homothétiques $Q(p, i)$ par les cercles

$$z = 2^p(1 + \alpha)^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

On voit facilement que si χ est assez petit, on a

$$s = \frac{\text{const.}}{\chi}.$$

Soit $\Gamma(p, i)$ le cercle concentrique au plus petit cercle circonscrit à $Q(p, i)$ et de rayon 20 fois plus grand. Soit $\mathfrak{N}(p, i)$ le minimum du nombre des racines du produit $[f(z)-x_1][f(z)-x_2][f(z)-x_3]$ pour tous les systèmes de trois nombres x_1, x_2, x_3 dont la distance sphérique mutuelle est supérieure à 2^{-p}. D'après le théorème de M. Valiron le nombre des racines de $f(z)-x$ dans $Q(p, i)$ est donc inférieur à

$$A\,\mathfrak{N}(p, i) + Bp$$

sauf peut-être pour les x extérieurs à un cercle $\gamma_i(p, i)$ de rayon 2^{-p}.

L'aire totale des cercles $\gamma_i(p, i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$, et pour p fixe est

$$\frac{\text{const.}\, s}{2^{2p}} = \frac{\text{const.}}{\chi\, 2^{2p}}.$$

Donc l'aire totale de tous les cercles $\gamma_i(p, i)$ $(p = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots)$ est

$$\sum^{p=\infty} \frac{\text{const.}}{\chi\, 2^{2p}} = \frac{\text{const.}}{\chi} \sum^{p=\infty} \frac{1}{2^{2p}}.$$

Or, cette série converge, on peut donc prendre P assez grand pour qu'on ait

$$(2) \qquad \frac{\text{const.}}{\chi} \sum_{p=P}^{p=\infty} \frac{1}{2^{2p}} = \frac{\text{const.}}{\chi\, 2^{2P}} < 4\pi \qquad \text{(aire de la sphère de Riemann).}$$

On déduit de là qu'il y a des valeurs a de x extérieures à tous les cercles exceptionnels. En appelant $\mathfrak{N}(p, m)$ le plus grand des nombres $\mathfrak{N}(p, i)$ on a, *a fortiori*, quel que soit $\lambda > 0$,

$$(3) \qquad \sum \frac{1}{r_q(\Lambda : f = a)^{\lambda}} < \text{const.} \left[\sum \frac{s\,\mathfrak{N}(p, m)}{2^{p\lambda}} + \sum \frac{sp}{2^{p\lambda}} \right] = \text{const.} \left[\sum \frac{\mathfrak{N}(p, m)}{\chi\, 2^{p\lambda}} + \sum \frac{p}{\chi\, 2^{p\lambda}} \right].$$

Il est évident que la série $\sum \frac{p}{\chi\, 2^{p\lambda}}$ converge, car χ est fixe. Comme la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ est une direction de Borel, le premier membre de (3) diverge quel que soit α et pour tout $\lambda < \rho$, de sorte que

$$\sum \frac{\mathfrak{N}(p, m)}{\alpha\, 2^{p\lambda}}$$

diverge quel que soit α et pour tout $\lambda < \rho$. On peut même mettre à la place de α et λ des fonctions $\alpha(p)$ et $\lambda(p)$ tendant vers zéro et vers ρ respectivement, de façon que $\sum \frac{p}{\alpha\, 2^{p\lambda}}$ continue à converger et que $\sum \frac{\mathfrak{N}(p, m)}{2^{p\lambda}}$ ne cesse pas de diverger. Aux termes de cette dernière série correspondent des cercles de remplissage $\Gamma(p, m)$. Nous avons donc :

X. (B) *étant une demi-droite de Borel d'une fonction* $f(z)$ *méromorphe d'ordre* ρ, *il existe sur* (B) *une suite de points d'affixes* $x(n)$, *centres de cercles* $\Gamma(n)$ *d'équation*

$$|z - x(n)| = \alpha(n)\,|x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim |x(n)| = \infty,$$

à l'intérieur desquels l'équation $f(z) - x$ *possède* $\mathfrak{N}(n)$ *zéros pour tous les* x *sauf au plus ceux qui sont représentés sur la sphère de Riemann dans deux cercles de rayon* 2^{-n}, *la série*

$$\sum \frac{\mathfrak{N}(n)}{|x(n)|^{\lambda}}$$

étant divergente pour tout $\lambda < \rho$.

Si la direction (B) *est une direction de divergence de son ordre* ρ, *on peut remplacer* λ *par* ρ.

En continuant ensuite comme au n° **22**, on trouve :

XI. (B) *étant une demi-droite de Borel d'une fonction* $f(z)$ *méromorphe d'ordre* ρ, *il existe sur* (B) *une suite de points d'affixes* $x(n)$, *centres de cercles* $\Gamma(n)$ *d'équation*

$$|z - x(n)| = \alpha(n)\,|x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim |x(n)| = \infty,$$

à l'intérieur desquels le nombre des zéros de $f(z) - \mathrm{H}(z)$ *est supérieur à* $\mathfrak{N}(n)$.

Quel que soit $\lambda < \rho$, la série

$$\sum \frac{\mathfrak{N}(n)}{|x(n)|^{\lambda}}$$

diverge et

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \alpha^{-1}(n)\,\mathfrak{N}(n)}{\log |x(n)|} = \rho.$$

Les fonctions H *comprennent toutes les constantes sauf deux au plus ainsi que toutes les fonctions méromorphes de la famille* $K(\alpha, f)$ *définie par*

$$[K(\alpha, f)] \qquad T\{[1+\alpha(n)]|x(n)|; H\} < \alpha^2(n)\,\mathfrak{N}(n) \qquad [H(z) \not\equiv 0]$$

sauf deux au plus.

Si (B) *est une direction de divergence de son ordre* ρ, *on peut remplacer* λ *par* ρ.

Remarque. — Ici encore la famille $K(\alpha, f)$ comprend en particulier les fonctions méromorphes d'ordre inférieur à ρ ainsi que certaines classes de fonctions d'ordre ρ.

CHAPITRE VI.

SUR LES FONCTIONS MÉROMORPHES D'ORDRE NUL ET D'ORDRE INFINI.

1. Sur les fonctions méromorphes d'ordre nul.

25. Le théorème III n'est applicable que si n_1 et $\frac{1}{\alpha}$ sont assez grands. Comme on peut écrire (*voir* ce théorème)

$$n_1 = c\alpha^2 \frac{T(R; f)}{\left(\log \frac{R}{r}\right)^2} > c\alpha^2 \frac{T(R; f)}{(\log R)^2} \qquad (r > 1),$$

il suffit que $\frac{T(R; f)}{(\log R)^2}$ soit assez grand.

Les conditions ($\mathfrak{M}$) sont toujours réalisables, si l'on prend $\frac{R}{r}$ assez grand. Les couronnes $C(r, R)$ ne sont plus forcément d'une épaisseur relative finie. Les conditions (C) seront vérifiées, si l'on a

$$(\mathrm{C}')\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T}[(1+\alpha)\mathrm{R};\varphi] &< \alpha^4\,\frac{\mathrm{T}(\mathrm{R};f)}{(\log \mathrm{R})^2},\\ \mathrm{C}[\Psi(z)] &> -\alpha^4\,\frac{\mathrm{T}(\mathrm{R};f)}{(\log \mathrm{R})^2}.\end{aligned}\right.$$

On généralise ainsi le théorème de M. Milloux (f; 2°, p. 208) et l'on trouve :

XII. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre nul pour laquelle on a*

$$\overline{\lim}\,\frac{\mathrm{T}(r;f)}{(\log r)^2} = \infty$$

et $\mathrm{H}(z)$ une fonction de la famille $\mathcal{G}(\alpha, f)$

$$[\mathcal{G}(\alpha, f)]\qquad \mathrm{T}\{[1-\alpha(n)]r;\mathrm{H}\} < \alpha^4(n)\,\frac{\mathrm{T}(r;f)}{(\log r)^2}\qquad [\mathrm{H}(z)\not\equiv 0,\ r > r_0].$$

Il existe une suite de cercles $\Gamma(n)$ d'équation

$$|z - x(n)| = \alpha(n) = \alpha(n)|x(n)|,\qquad \lim \alpha(n) = 0,\qquad \lim |x(n)| = \infty,$$

dans lesquels $f(z) - \mathrm{H}(z)$ admet une infinité de zéros quel que soit $\mathrm{H}(z)$ sauf pour deux fonctions exceptionnelles au plus.

Nous en déduisons l'existence *d'une direction de Julia* (J) correspondant à ces fonctions $\mathrm{H}(z)$.

2. Sur les fonctions méromorphes d'ordre infini.

26. Comme au n° **13**, partons du théorème suivant de M. Milloux :

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre infini. Dans la couronne $\mathrm{C}(r, \mathrm{R})$ définie par

$$r < |z| < \mathrm{R}$$

le nombre des zéros de $f(z) - a$ est supérieur à

$$\text{const.}\,\frac{\mathrm{T}\left[\mathrm{R} - \dfrac{2}{\mathrm{T}(\mathrm{R}-1)}\right]}{\log \dfrac{\mathrm{R}}{r}}$$

pour toutes les valeurs de a dont les représentations sphériques sont incluses dans un cercle de rayon $\frac{1}{2}$, et ceci dès que l'on a

$$T\left[R - \frac{2}{T(R-1)}\right] > e(f), \qquad T\left[R - \frac{2}{T(R-1)}\right] > 24\frac{T(kr)}{\log k}\log\frac{R}{r}$$

$$\left(1 < k < \frac{R}{r}\right).$$

En suivant la méthode du n° **14**, on trouve la généralisation suivante d'un théorème de M. Milloux (f; 2°, p. 214) :

XIII. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre infini,*

$$P(z), Q(z), R(z),$$

un système quelconque de trois fonctions méromorphes. Supposons vérifiées les conditions suivantes :

$$(\mathfrak{M}')\left\{\begin{array}{l} T(R';f) > e(f), \qquad T(R';f) > 24\,\dfrac{T(kr;f)}{\log k}\log\dfrac{R}{r}, \\ R' = R - \dfrac{2}{T(R-1;f)} \qquad \left(1 < k < \dfrac{R}{r}\right); \end{array}\right.$$

$$(C')\left\{\begin{array}{l} T[(1-\alpha)R;\varphi] < \alpha^4\dfrac{T(R';f)}{\left(\log\dfrac{R}{r}\right)^2}, \\ \varphi(z) \equiv P(z);\ Q(z);\ R(z); \\ C[\Psi(z)] > -\alpha^4\dfrac{T(R';f)}{\left(\log\dfrac{R}{r}\right)^2}, \\ \Psi(z) = P(z);\ Q(z);\ R(z);\ P(z)-Q(z);\ Q(z)-R(z);\ R(z)-P(z). \end{array}\right.$$

Alors il existe dans la couronne $C(r, R)$ *un point d'affixe* x, ($r < |x| < R$) *centre d'un cercle* (Γ) *d'équation*

$$|z - x| = \alpha|x|$$

à l'intérieur duquel le nombre des racines de $f(z) - \mathrm{H}(z)$, où $\mathrm{H}(z)$ est l'une au moins des fonctions P, Q, R, *est supérieur à*

$$n_1' = \alpha^2\frac{T(R';f)}{\left(\log\dfrac{R}{r}\right)^2}\,\text{const.}$$

Le théorème s'applique dès que n_1 et $\frac{1}{\alpha}$ dépassent des constantes numériques.

27. Nous allons montrer qu'il existe une infinité de couronnes d'épaisseur relative arbitrairement petite pour lesquelles ($\mathfrak{M}'$) est vérifiée.

Prenons

$$\frac{R}{r} = k^3;\ k = 1 + \alpha.$$

Les conditions ($\mathfrak{M}'$) se réduisent à

$$T(R') > 72\,T(kr) \qquad (r > r_0).$$

Il est évident que l'on a pour r assez grand

$$r < kr < k^2 r < R' < k^3 r.$$

Donc il suffit d'avoir $T(k^2 r) > 72\,T(kr)$, pour que ($\mathfrak{M}'$) soit vérifiée dans $C(r, k^3 r)$. Or, on ne peut pas avoir tout le temps

$$T(kt) \leq 72\,T(t) \qquad (t > t_0)$$

sans avoir

$$T(t) \leq \text{const.}\, t^{\frac{\log 72}{\alpha}} \qquad (t > t_0),$$

ce qui est impossible si $f(z)$ est d'ordre infini, aussi petit que soit la constante α.

Nous avons ainsi en particulier le théorème suivant :

XIV. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre infini. Il existe une suite de valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de r jouissant des propriétés suivantes :*

1°
$$\frac{\log T(r_n; f)}{\log r_n} > \frac{1}{\alpha}.$$

2° *Si $H(z)$ est une fonction méromorphe telle que*

$$[\mathcal{H}(\alpha, f)] \quad T[(1+\alpha)^2 r_n; H] < \alpha^2\, T(r_n; f), \qquad C(H) > -\alpha^2\, T(r_n; f),$$

il existe dans la couronne

$$\left[\frac{r_n}{(1+\alpha)^2},\ (1+\alpha) r_n\right]$$

un point d'affixe $x(n)$, centre d'un cercle $\Gamma(n)$ d'équation

$$|z - x(n)| = \alpha |x(n)|,$$

à l'intérieur duquel le nombre des zéros de $f - \mathrm{H}$ est supérieur à

$$\mathrm{T}(r_n; f)\,\text{const.}$$

pour toutes les $\mathrm{H}(z)$ de la famille $\mathcal{H}(\alpha, f)$ sauf peut-être pour celles pour lesquelles

$$\mathrm{C}(\Psi) > -\alpha^2\,\mathrm{T}(r_n; f), \qquad \Psi = \mathrm{H} - \mathrm{H}_{0,n};\ \mathrm{H} - \mathrm{H}_{1,n};$$

$\mathrm{H}_{0,n}(z)$ et $\mathrm{H}_{1,n}(z)$ étant deux fonctions exceptionnelles possibles vérifiant

$$\mathrm{C}(\mathrm{H}_{0,n} - \mathrm{H}_{1,n}) > -\alpha^2\,\mathrm{T}(r_n; f).$$

28. Le théorème s'applique en particulier à toutes les fonctions H pour lesquelles on a

$$\mathrm{T}[(1+\alpha)^2 r; \mathrm{H}] < \alpha^2\,\mathrm{T}(r; f) \qquad (r > r_0).$$

Pour r assez grand, ces fonctions comprennent celles d'ordre inférieur à $\frac{1}{\alpha}$.

Nous pouvons maintenant comme d'habitude remplacer α par une fonction $\alpha(n)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, mais pas trop vite, pour que l'on ait encore

$$\overline{\lim}\,\frac{\log \mathrm{T}(r; f)}{\log r} > \frac{1}{\alpha(n)}.$$

On trouve ainsi :

XV. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre infini. Il existe une suite infinie de cercles $\Gamma(n)$ d'équation*

$$|z - x(n)| = \alpha(n)\,|x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim |x(n)| = \infty$$

jouissant de la propriété suivante. Pour chaque n le nombre des zéros de $f(z) - \mathrm{H}(z)$ dans $\Gamma(n)$ est supérieur à

$$\mathrm{T}(r_n; f)\,\text{const.}$$

pour toutes les fonctions $\mathrm{H}(z)$, pour lesquelles on a, quel que soit n,

$$[\mathcal{H}_1(\alpha, f)] \quad \mathrm{T}\{[1+\alpha(n)]r_n; \mathrm{H}\} < \alpha^2(n)\,\mathrm{T}(r_n; f), \quad \mathrm{C}(\mathrm{H}) > -\alpha^2(n)\,\mathrm{T}(r_n; f),$$

sauf peut-être pour celles pour lesquelles

$$C(\Psi) > -x^2(n)\,T(r_n; f), \qquad \Psi \equiv H - H_{0,n};\ H - H_{1,n};$$

$H_{0,n}(z)$ *et* $H_{1,n}(z)$ *étant deux fonctions exceptionnelles possibles de la famille* $\mathcal{H}_1(x, f)$ *vérifiant la condition*

$$C(H_{0,n} - H_{1,n}) > -x^2(n)\,T(r_n; f).$$

On voit donc qu'il existe des cercles de remplissage vus de l'origine sous un angle qui tend vers zéro. Ceci entraîne l'existence d'une sorte de direction de Borel au moins, pour toutes les H de la famille $H(x, f)$ sauf deux au plus. $H(x, f)$ est définie par

$$[H(x, f)] \quad T\{[1 - x(n)]\,r_n; H\} < x^2(n)\,T(r_n; f) \qquad [H(z) \not\equiv 0].$$

D'après la propriété 1° du théorème XIV, la famille $\mathcal{H}_1(x, f)$ comprend en particulier toutes les fonctions d'ordre fini.

CHAPITRE VII.

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE M. VALIRON SUR L'ORDRE $\rho(V)$ D'UNE FONCTION MÉROMORPHE SUR UNE DIRECTION (V).

29. M. Valiron a démontré (i; 6°) que si $f(z)$ est méromorphe dans un angle $\hat{A}$ à toute direction (V) de $\hat{A}$ est attaché un nombre $\rho(V)$, limite pour presque tous les x de l'exposant de convergence des racines de $f(z) - x$ appartenant à un angle admettant comme bissectrice (V) et dont l'ouverture tend vers zéro. Il démontre en particulier le théorème suivant :

(V) *étant donnée quelconque intérieure à* $\hat{A}$, *l'ordre réel* $\rho(x, V)$ (*c'est-à-dire le coefficient de convergence*) *a la même valeur* $\rho(V)$ *pour tous les* x *sauf ceux d'un ensemble* $E(V)$ *dont la représentation sphérique a une mesure linéaire nulle : pour les* x *exceptionnels on a* $\rho(x, V) > \rho(V)$ *sauf au plus pour deux valeurs de* x.

Nous allons étendre en partie ces résultats pour les directions (V)

d'ordre $\rho(V) > 0$. $\hat{A}$ étant un angle quelconque de bissectrice (V), il est évident que la série

$$\sum \frac{1}{r_q(\hat{A}, f = x)^\lambda}$$

diverge pour presque tous les x et quel que soit $\lambda < \rho(V)$. Nous pouvons donc appliquer la méthode du nº **24**. On trouve ainsi :

XVI. (V) *étant une direction d'ordre* $\rho(V) > 0$ *d'une fonction méromorphe* $f(z)$, *il existe sur* (V) *une suite de points d'affixes* $x(n)$, *centres de cercles* $\Gamma(n)$ *d'équation*

$$|z - x(n)| = \alpha(n)|x(n)|, \qquad \lim \alpha(n) = 0, \qquad \lim |x(n)| = \infty,$$

à l'intérieur desquels le nombre des zéros de $f(z) - H(z)$ *est supérieur à* $\mathfrak{N}(n)$. *Quel que soit* $\lambda < \rho(V)$, *la série*

$$\sum \frac{\mathfrak{N}(n)}{|x(n)|^\lambda}$$

diverge et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log \alpha^{-1}(n)\, \mathfrak{N}(n)}{\log |x(n)|} = \rho(V).$$

Les fonctions H *comprennent toutes les constantes sauf deux au plus ainsi que toutes les fonctions méromorphes de la famille* $L(\alpha, f)$ *définie par*

$$|L(\alpha, f)|\, T\{[1 + \alpha(n)]|x(n)|, H\} < \alpha^2(n)\, \mathfrak{N}(n) \qquad [H(z) \not\equiv 0],$$

sauf deux au plus.

Si (V) *est une direction de divergence de son ordre* $\rho(V) \geqq 0$, *on peut remplacer* λ *par* $\rho(V)$.

On en déduit immédiatement :

XVII. *Si* (V) *est une direction d'ordre* $\rho(V) > 0$, *la série*

$$\sum \frac{1}{r_q(\hat{A}, f = H)^\lambda},$$

étendue aux modules des zéros de $f(z) - H(z)$ *situés dans tout angle* $\hat{A}$ *de bissectrice* (V), *diverge quel que soit* $\lambda < \rho(V)$ *et pour toute fonction de la classe* $L(\alpha, f)$ *sauf deux au plus.*

Si (V) est une direction de divergence de son ordre $\rho(V) \geqq 0$, on peut remplacer λ par $\rho(V)$.

Remarque I. — La famille $L(\alpha, f)$ comprend en particulier les fonctions méromorphes d'ordre inférieur à $\rho(V)$, ainsi que certaines classes de fonctions d'ordre $\rho(V)$.

Remarque II. — Si $\rho(V)$ atteint son maximum $\rho =$ ordre de $f(z)$, (V) est ce que M. Valiron a appelé « Direction de Borel ». On retrouve ainsi les théorèmes correspondant à ces directions.

D'après XVII on voit que l'ordre réel de $f(z) - H(z)$ sur (V) est au moins égal à $\rho(V)$. Nous allons démontrer que cet ordre est égal à $\rho(V)$ pour presque toutes les fonctions $f(z) - H(z)$, où $H(z)$ est d'ordre inférieur à $\rho(V)$.

En effet, supposons que l'ordre réel de $f(z) - H(z)$ sur (V) soit supérieur à $\rho(V)$ pour une fonction $H(z)$ d'ordre inférieur à $\rho(V)$. Donc

$$\sum \frac{1}{r_\nu(\lambda, F = \nu)^{\mu}},$$

où l'on a posé

$$F(z) = f(z) - H(z),$$

diverge pour certaines valeurs $\mu > \rho(V)$ et quelle que soit la constante ν, sauf deux au plus. Nous en déduisons un énoncé analogue à XVI avec des cercles de remplissage $\Gamma_1(n)$ pour toutes les fonctions $H_1(z)$ de la famille $L_1(\alpha_1, f)$ définie par

$$[L_1(\alpha_1, f)] \quad T_1\{[1 + \alpha_1(n)]\, x_1(n),\, H_1\} < \alpha_1^2(n)\, \mathfrak{N}_1(n) \qquad [H_1(z) \not\equiv 0],$$

sauf deux au plus. La série

$$\sum \frac{\mathfrak{N}_1(n)}{[x_1(n)]^{\mu}}$$

diverge, ce qui entraîne la divergence de

$$\sum \frac{n[\Gamma_1(n) : F = H_1]}{[x_1(n)]^{\mu}}.$$

La famille $L_1(\alpha_1, f)$ contient en particulier les fonctions $H_1(z)$ d'ordre inférieur à μ. Comme $\rho(V) < \mu$, nous pouvons prendre

$$H_1(z) = -H(z) - x \qquad (x = \text{const.}).$$

d'où

$$F_1(z) - H_1(z) = f(z) - x.$$

On en déduit la divergence de

$$\sum \frac{n[\Gamma_1(n); f = x]}{[x_1(n)]^\mu} \qquad [\mu > \rho(V)]$$

et par conséquent de

$$\sum \frac{1}{r_\nu(V; f = x)^\mu} \qquad [\mu > \rho(V)].$$

Or, d'après le théorème de M. Valiron, ceci est impossible pour la plupart des valeurs de x. On en déduit :

XVIII. *Si $f(z)$ est d'ordre ρ, l'ordre $\rho(V)$ est le même sur toute direction (V) pour toutes les fonctions $f(z) + H(z)$, $H(z)$ étant d'ordre inférieur à $\rho(V)$. Il y a exception pour deux fonctions $H(z)$ au plus.*

Ouvrages à consulter.

E. BOREL. — *Leçons sur les fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1903).

E. BOREL. — *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, Gauthier-Villars, 1921).

G. JULIA. — *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé* (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

P. MONTEL. — *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

R. NEVANLINNA. — *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1929).

G. VALIRON. — *Lectures on the general Theory of integral Functions* (Deighton, Belle and C°, Cambridge).

Mémorial des Sciences math. (Paris, Gauthier-Villars) :

1° G. VALIRON. — *Fonctions entières et fonctions méromorphes* (fasc. II).

2° A. BLOCH. — *Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle unité* (fasc. XX).

3° G. VALIRON. — *Familles normales et quasi normales de fonctions méromorphes* (fasc. XXXVIII).

Bibliographie.

a. BIERNACKI. — *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes* (*C. R.*, t. **189**, 1929, p. 21; *Acta math.*, t. **56**, 1930, p. 197-204).

b. E. BOREL. — 1° *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières* (*C. R.*, 1896).

2° *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta math.*, t. **20**, 1897, p. 357-396).

3° *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, Gauthier-Villars, 1900, 2e édition, 1921).

4° *Leçons sur les fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars 1903).

c. P. BOUTROUX. — *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (*Thèse*, Paris, 1903; *Acta math.*, 1903).

d. H. CARTAN. — *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications* (*Thèse*, 1928).

e. G. JULIA. — 1° *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes* (*Ann. Éc. Norm.*, t. **36**, 1919, p. 93-126; t. **37**, 1920, p. 165-218; t. **38**, 1921).

2° *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé* (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

f. MILLOUX. — 1° *Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières* (*Thèse*, 1924; *Journal de Math.*, 9e série, t. **3**, 1924).

2° *Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel* (*Acta math.*, t. **52**, 1928, p. 189-255).

g. P. MONTEL. — *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

h. R. NEVANLINNA. — 1° *Zur Theorie der meromorphen Funktionen* (*Acta math.*, t. **46**, 1925, p. 1-99).

2° *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1929).

i. G. VALIRON. — 1° *Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes* (*Acta math.*, t. **47**, 1925, p. 117-141).

2° *Compléments au théorème de Picard-Julia* (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. **51**, 1927, p. 167-183).

3° *Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes* (*Acta math.*, t. **52**, 1928).

4° *Sur les valeurs d'une fonction méromorphe dans le voisinage d'une singularité* (*C. R.*, t. **186**, 1928, p. 803).

5° *Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes* (*C. R.*, t. **185**, 1928, p. 935).

6° *Sur une propriété générale des fonctions méromorphes* (*C. R.*, t. **192**, 1931, p. 269).

7° *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini* (*Journal de Math.*, t. X, 1931, p. 457-480).

j. E. Picard. — 1° *Sur une propriété des fonctions entières* (*C. R.*, t. **88**, 1879, p. 1024).

2° *Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (*C. R.*, t. **89**, 1879, p. 745).

3° *Mémoire sur les fonctions entières* (*Ann. Éc. Norm.*, 2ᵉ série, t. **9**, 1880, p. 145-166).